Néhány fizikai probléma

Összeállította: Tasnádi Tamás

Harmonikus rezgőmozgás

Az ideális rugó által kifejtett F erő arányos, és ellentétes irányú a rugó x megnyúlásával, $F(x) = -Dx$. Hogyan mozog (egydimenzióban) az a test, amelyre egyetlen rugó hat?

Newton II. törvénye értelmében $F(x) = m\ddot{x}$. Beírva a rugóerő alakját, a

$$-Dx(t) = m\ddot{x}(t)$$

másodrendű differenciálegyenlethez jutunk, melynek általános megoldása

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t),$$

ahol $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$.

(Az egyenletet visszavezethetjük elsőrendűre, ha megszorozzuk $\dot{x}(t)$-vel, és felhasználjuk, hogy $2\dot{x}(t)x(t) = \frac{d}{dt}\big(x^2(t)\big)$, valamint $2\ddot{x}(t)\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\big(\dot{x}^2(t)\big)$.)

Kondenzátor kisülése

A C kapacitású, Q_0 kezdeti töltéssel feltöltött kondenzátort az R ellenálláson keresztül kisütjük. Határozzuk meg a kondenzátor $Q(t)$ töltésének időfüggését, az áramkörben folyó $I(t)$ áramot, valamint a kondenzátor kapcsain mérhető $U(t)$ feszültséget az idő függvényében!

A szükséges fizikai ismeretek: A kondenzátor $U(t)$ feszültsége, $Q(t)$ töltése és C kapacitása között minden pillanatban fennáll, hogy $C = \frac{Q}{U}$. Az ellenálláson folyó áram és a sarkai közt mérhető feszültség kapcsolata: $R = \frac{U}{I}$. Végül a kondenzátor töltése és az áram közti kapcsolat: $Q(t) = Q_0 + \int_{\tau=t_0}^{t} I(\tau)d\tau$, azaz $\dot{Q}(t) = I(t)$.

Az áramkörben nincsen telep, tehát az ellenálláson és a kondenzátoron eső feszültségek összege minden pillanatban zérus, $U_C(t)+U_R(t) = 0$. Az $U_C(t)$ feszültség a kondenzátor töltésével kifejezve: $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$. Az áramkörben folyó áram $I(t) = \dot{Q}(t)$, tehát az ellenálláson eső feszültség $U_R(t) = RI(t) = R\dot{Q}(t)$. De e két feszültség összege zérus, tehát a

$$\frac{Q(t)}{C} + R\dot{Q}(t) = 0, \qquad Q(0) = Q_0$$

differenciálegyenletet kapjuk, aminek a kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{C}{R}t}.$$

Radioaktív bomlás

Radioaktív bomlás során az időegység alatt elbomlott atomok száma arányos a még el nem bomlott atomok számával. Határozzuk meg, hogyan változik az idő függvényében a még el nem bomlott atomok száma, valamint a minta aktivitása (időegységre jutó bomlások száma)!

Legyen a még el nem bomlott atomok száma $N(t)$. Rövid dt idő alatt elbomlott atomok száma arányos (N(t)-vel és dt-vel, azaz $N(t) - N(t+dt) = N(t)\lambda dt$, ahonnan $\dot{N}(t) = -\lambda N(t)$ differenciálegyenlethez jutunk. Ennek megoldása: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$; a minta aktivitásának időfüggése pedig $A(t) = -\dot{N}(t) = N_0 \lambda e^{-\lambda t}$.

Oszlopra tekert kötél

A matrózok úgy tartják a nagy hajókat a partnál, hogy a kikötőkötelet előbb néhányszor a kikötőhöz betonozott függőleges oszlopra csavarják, és a felcsavart kötél másik végét húzzák. Vajon miért teszik ezt? Mennyivel tudnak így nagyobb erőt kifejteni, mintha a kötelet közvetlenül húznák?

Az oszlopra csavart kötél ráfeszül az oszlopra, és az oszlop és a kötél közt ébredő súrlódási erő segít megtartani a hajót.

Jelölje az oszlop sugarát R. Legyen φ az oszlopra csavart kötél pontjait jellemző szög ($\varphi = 0$ a hajó felé eső kötélpont, $\varphi = \varphi_0$ pedig a matróz felé eső kötélpont), és legyen $K(\varphi)$ a kötelet a φ szöggel jellemzett pontban feszítő erő. (Tehát K iránya az oszlop érintőjébe esik.) Szemeljünk ki egy φ-nél elhelyezkedő, kis $d\varphi$ kötéldarabot. E kis kötéldarabra a két végénél $K(\varphi)$, ill. $K(varphi + d\varphi \approx K(\varphi)$ erő hat. A két erő iránya közel ellentétes, a hatásvonalaik szöge $d\varphi$. Egyszerű geometriai megfontolásból adódik, hogy ($d\varphi \ll 1$ esetében) a két erő eredője közel sugár irányú, és nagysága $dN(\varphi) \approx K(\varphi)d\varphi$. Ekkora nyomóerőnél a tapadási súrlódási erő maximuma $dS(\varphi) = \mu_0 dN(\varphi) \approx \mu_0 K(\varphi)d\varphi$. A kiszemelt $d\varphi$ szögű kötéldarab nyugalomban van, tehát a rá ható érintő irányú erők eredője zérus, azaz $K(\varphi) = K(\varphi + d\varphi) + dS(\varphi)$. Innen a kötélet feszítő erőre, mint a felcsavarodási szög függvényére a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{d}{d\varphi}K(\varphi) = -\mu_0 K(\varphi); \qquad K(0) = K_0,$$

aminek a megoldása:

$$K(\varphi) = K_0 e^{-\mu_0 \varphi}.$$

Tehát ha a matróz φ_0 szögben csavarja rá a kötelet az oszlopra, és a kötél és az oszlop között a tapadási súrlódási együttható μ_0, akkor a matróz $e^{-\mu_0\varphi}$-szer kisebb erő kifejtésével képes megtartani a hajót.

Esés nagy magasságból a világűrben

Tegyük föl, hogy egy gonosz varázsló megállítaná a Holdat, és az kezdősebesség nélkül szabadon esne a Föld felé. Hogyan változna a Föld–Hold távolság az idő függvényében?

Legyen a Föld tömege M, a Hold tömege m, kezdeti távolságuk h_0, és tegyük föl –az egyszerűség kedvéért–, hogy a Föld nem mozdu el a Hold felé. (Ez a közelítés akkor jogos, ha $M \gg m$.) A gravitációs állandót jelölje γ.

Amikor a Föld és a Hold távolsága $r(t)$, akkor a Föld által a Holdra kifejtett gravitációs vonzóerő $F(r) = \gamma \frac{mM}{r^2}$, így a Hold mozgásegyenlete:

$$m\ddot{r}(t) = -\gamma \frac{mM}{r^2(t)}.$$

(A negatív előjel utal arra, hogy az erő vonzó.) A kapott egyenlet másodrendű differenciálegyenlet az $r(t)$ függvényre nézve, azonban egy ügyes trükkel elsőrendűvé alakíthatjuk. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $\dot{r}(t)$-vel, és vegyük észre, hogy $\ddot{r}(t)\dot{r}(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\dot{r}^2(t)\big)$, valamint $\frac{\dot{r}(t)}{r^2(t)} = -\frac{d}{dt}\big(\frac{1}{r(t)}\big)$. Tehát

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\dot{r}^2(t)\big) = \gamma M \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{r(t)}\Big),$$

ahonnan

$$\dot{r}^2(t) = \frac{2\gamma M}{r(t)} + C.$$

A kapott egyenlet a Holdra felírt mechanikai energiamegmaradás törvényének átrendezett alakja. Autonóm, szeparálható differenciálegyenlet...

Láncgörbe

Milyen alakú egy két végpontjában felfüggesztett lánc?

Írjuk le a lánc alakját az $y(x)$ függvénnyel, mely a lánc x vízszintes koordinátájú pontjának magasságát adja meg. A láncban ébredő erő vízszintes, ill. függőleges komponensét jelölje $K_x(x)$, ill. $K_y(x)$. Vizsgáljuk a láncnak az x helyen levő kis dl hosszúságú, $dm = \rho dl$ tömegű darabját! (ρ a lánc hosszegységre vonatkoztatott ,,sűrűsége".) Ez a kis láncdarab nyugalomban van, tehát a rá ható erők eredője (vízszintes és függőleges irányban egyaránt) zérus. Vízszintes irányban a láncra nem hat külső erő, tehát $K_x(x) = K_x(x+dx)$, így a láncot feszítő erő vízszintes komponense állandó, $K_x(x) \equiv K_x$. Függőleges irányban a láncdarabra hat a $(dm)g$ nehézségi erő, tehát $K_y(x+dx) - K_y(x) = g\rho dl$. Ezen kívül tudjuk még, hogy a lánc meredeksége az x pontban $y'(x)$, tehát $dl = \sqrt{1+y'^2(x)}dx$, valamint a láncban ébredő erő érintő irányú, azaz $K_y(x) = y'(x)K_x$. Ezeket felhasználva a

$$K_x y''(x) = \rho g \sqrt{1+y'^2(x)}.$$

differenciálegyenletet kapjuk a lánc alakjára, ami az $y'(x)$ függvényre nézve elsőrendű, autonóm, szeparálható egyenlet. A megoldása:

$$y'(x) = \operatorname{sh}\Big(\frac{\rho g x}{K_x} + C\Big), \qquad y(x) = \frac{K_x}{\rho g}\operatorname{ch}\Big(\frac{\rho g x}{K_x} + C\Big).$$

Ezért hívják sokszor a koszinusz-hiperbolikusz függvényt ,,láncgörbének".

Mozgás közegellenállással – nagy sebességnél

Légnemű vagy folyékony közegben nagy sebességgel mozgó testre a sebesség négyzetével arányos közegellenállási erő hat. Meg tudjuk mondani például, hogy leszállás után hogyan mozog a kifutópályán az a repülőgép, amelyet csak a fékező ernyője fékez. A gép mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x}(t) = -\kappa\dot{x}^2(t),$$

ami $\dot{x}(t)$-re elsőrendű, autonóm, szeparábilis differenciálegyenlet.

Például a Föld légkörében szabadon eső test mozgásegyenlete

$$m\ddot{h}(t) = \kappa\dot{h}^2(t) - mg.$$

Mozgás közegellenállással – kis sebességnél

Talán egyszerűbben megoldható a feladat akkor, ha a közegellenállási erő a sebességgel arányos. Egy sűrű, viszkózus folyadékban lassan süllyedő kis golyó mozgásegyenlete például

$$m\ddot{y}(t) = mg - \alpha\dot{y}(t),$$

ami $\dot{x}(t)$-re elsőrendű, lineáris, inhomogén, állandó együtthatós egyenlet.