Matematika A3

2. vizsga, 2023. január 12.

Munkaidő: 45 perc

1. feladat (16 pont)

Írja fel az alábbi görbe ívhossz szerinti paraméterezését:

$$\underline{r}(t) = (\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t, t^2), \qquad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Mo. $\underline{r}'(t) = (t\cos t, t\sin t, 2t)$, tehát $s(t) = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \sqrt{5\tau^2}d\tau = \sqrt{5}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{\pi^2}{8}\right)$, aminek inverze $t(s) = \sqrt{\frac{2s}{\sqrt{5}} + \frac{\pi^2}{4}}$, tehát az ívhossz-szerinti paraméterezés:

$$\underline{r}(s)=\left(\cos\sqrt{\tfrac{2s}{\sqrt5}+\tfrac{\pi^2}{4}}+\sqrt{\tfrac{2s}{\sqrt5}+\tfrac{\pi^2}{4}}\sin\sqrt{\tfrac{2s}{\sqrt5}+\tfrac{\pi^2}{4}},\sin\sqrt{\tfrac{2s}{\sqrt5}+\tfrac{\pi^2}{4}}-\sqrt{\tfrac{2s}{\sqrt5}+\tfrac{\pi^2}{4}}\cos\sqrt{\tfrac{2s}{\sqrt5}+\tfrac{\pi^2}{4}},\tfrac{4s}{\sqrt5}+\tfrac{\pi^2}{2}\right),\ s \in \left[0, \frac{3\sqrt{5}\pi^2}{8}\right]$$

---

2. feladat (17 pont)

Számítsa ki az $\underline{v} = (3yz^2 + x^3, y^2, \sqrt{z^2+1} + y)$ vektormező munkáját az $ABCA$ töröttvonalon, ahol $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.

Mo. $\operatorname{rot} v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ 3yz^2 + x^3 & y^2 & \sqrt{z^2+1} + y \end{vmatrix} = (1, 6yz, -3z^2)$. A zárt görbe által határolt felület paraméterezése $r(u,v) = (1,0,0) + u(-1,1,0) + v(-1,0,1) = (1-u-v, u, v)$, $u \in [0,1]$, $v \in [0, 1-u]$, a normálvektor

$$r'_u \times r'_v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,1,1),$$

tehát a Stokes-tétel alapján a felületi integrál

$$\int_0^1 \int_0^{1-u} 1 + 6uv - 3v^2 dvdu = \int_0^1 1 - u + 3u(1-u)^2 - (1-u)^3 du = \frac{1}{2}$$

---

3. feladat (17 pont)

Legyen $\underline{v}(x,y,z) = (3xy, y^2, -4xz)$ és F az $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 4 = 0$. Határozza meg az $\int_F \underline{v}d\underline{f}$ felületi integrál értékét befelé mutató irányítás mellett.

Mo. $\operatorname{div} \underline{v} = 5y - 4x$, az $\mathcal{F}$ által határolt tartományon $x = r\cos\varphi\sin\vartheta$, $y = r\sin\varphi\sin\vartheta + 2$, $z = r\cos\vartheta + 1$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\vartheta \in [0, \pi]$, $r \in [0, 1]$,

$$\int \underline{v} d\underline{f} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} (-5r\sin\varphi\sin\vartheta + 10 + 4r\cos\varphi\sin\vartheta) r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi = 2\pi[\cos\vartheta]_0^{\pi} \left[\frac{10}{3} r^3\right]_0^1$$

IMSC feladat Számítsa ki az $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ egyenletű felület $x^2 + y^2 = 2x$ hengeren belüli darabjának felszínét.

Mo. A felület paraméterezése: $\underline{r}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, u)$, $v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $u \in [0, 2\cos v]$.

$$r'_u \times r'_v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = (-u\cos v, -u\sin v, u),$$

tehát a felszín:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos v} \sqrt{2} u du dv = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 v dv = 2\sqrt{2}\pi.$$
