Valószínűségszámítás vizsga megoldása
Műszaki informatika szak
2011. január 6.

1. A $(0,2)$ és $(0,3)$ szakaszokon választunk találomra egy-egy pontot, legyenek ezek x és y. Mennyi a valószínűsége, hogy az x, y és 2 hosszúságú szakaszokból szerkeszthető háromszög?
Mo.: A háromszög szerkesztésének feltétele, hogy bármely két oldal összege nagyobb a harmadiknál: $x+y>2, x+2>y$ és $y+2>x$.
A feltételek a $[0,2]\times[0,3]$ téglalapban egy négyszöget határoznak meg, aminek területe: $6-\frac{1}{2}-2=\frac{7}{2}$. Így a keresett valószínűség: $\frac{7}{12}$.

2. Az X, Y valószínűségi változó pár együttes sűrűségfüggvénye
$f_{X,Y}(u,v)=2\left(u^3+v^3\right)$, ha $0\le u,v\le 1$. $\mathbf{P}(X<2Y)=?$
Mo.: A keresett valószínűség:
$\int\limits_0^1\int\limits_{\frac{u}{2}}^1 2\left(u^3+v^3\right)dvdu=\int\limits_0^1\left[2u^3+\frac{1}{2}-\frac{33}{32}u^4\right]du=$
$=\left[\frac{u^4}{2}+\frac{u}{2}-\frac{33u^5}{5120}\right]_0^1=\frac{127}{160}\approx 0,8$

3. Legyenek $X,Y\in N(0,1)$ függetlenek és $Z=2X-Y+\pi$.
a.) Számolja ki az $\mathbf{E}(Z\mid X)$ regressziót!
b.) Számolja ki Z-nek az Y-ra vett lineáris regresszióját!
Mo.: a.) $\mathbf{E}(Z\mid X)=\mathbf{E}(2X-Y+\pi\mid X)=\mathbf{E}(2X+\pi\mid X)-\mathbf{E}(Y\mid X)=$
$=2X+\pi-0$
Vagy, mivel normális esetben a regresszió lineáris:
$Z\in N\left(\pi,\sqrt{5}\right), \operatorname{cov}(Z,X)=2\boldsymbol{\sigma}^2X=2,$
$\mathbf{E}(Z\mid X)=l(Z\mid X)=\frac{cov(Z,X)}{\boldsymbol{\sigma}^2X}(X-\mathbf{E}X)+\mathbf{E}Z=2X+\pi$
b.) $a=\frac{cov(Z,Y)}{\boldsymbol{\sigma}^2Y}=-1, b=\mathbf{E}Z-a\mathbf{E}Y=\pi$, azaz a lineáris regresszió: $-Y+\pi$

4. $2\mathbf{P}(A)=2\mathbf{P}(A\mid B)=\mathbf{P}(B\mid A)=\frac{1}{2}$.
a.) Számítsa ki $\mathbf{P}(A+B)$-t!
b.) Függetlenek-e A és B?
Mo.: a.) A feltételekből:
$\mathbf{P}(AB)=\frac{\mathbf{P}(B)}{4}=\frac{\mathbf{P}(A)}{2}$, azaz $\mathbf{P}(B)=\frac{1}{2}, \mathbf{P}(A)=\frac{1}{4}, \mathbf{P}(AB)=\frac{1}{8}$
$\mathbf{P}(A+B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$
b.) Mivel $\mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B)$, ezért A,B függetlenek!

5. Legyen $X_1, X_2, ..., X_n$ az $f(x)=\vartheta\cdot x^{-(\vartheta+1)}, x>1, \vartheta>1$ sűrűségfüggvényhez (Pareto-eloszlás) tartozó minta.Adjuk meg a ϑ paraméter maximum likelihood becslését!

Mo.: $L\left(x_1, x_2, ..., x_n, \vartheta\right) = \vartheta^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{-(\vartheta+1)}$

$\mathrm{l}(x_1, x_2, ..., x_n, \vartheta) = n \ln \vartheta - (\vartheta + 1) \left(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)$

$\frac{\partial l}{\partial \vartheta} = \frac{n}{\vartheta} - \left(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right) = 0 \Longrightarrow \vartheta = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$

Ez valóban maximum hely, mivel $\frac{\partial^2 l}{\partial \vartheta^2} = -\frac{n}{\vartheta^2} < 0$

6. Mondja ki a nagy számok Csebisev-féle törvényét!
Mo.: Legyenek $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ azonos eloszlású, véges szórású, páronként korrelálatlan (páronként független) valószínűségi változók. $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ az átlagok sorozata. Akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén $\mathbf{P}\left(|Z_n - \mathbf{E}X_1| \geq \varepsilon\right) \to 0$, ha $n \to \infty$.