A MEREV TEST FORGÓ MOZGÁSÁNAK KINEMATIKÁJA

„A dolgok” – így szólt – „számomra egyformák lesznek örökre:
Többnyire föl-le mozognak, vagy forognak körbe-körbe.”

P. R. Chalmers
(Ringlispilek és hinták)

11.1 Bevezetés

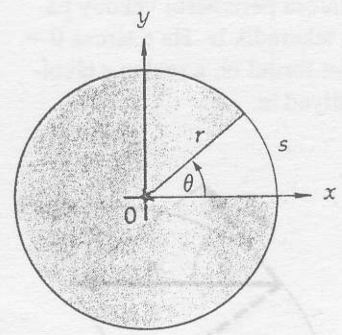
A továbbiakban olyan merev testek forgó mozgásával foglalkozunk, amelyek a tömegközéppontjukon átmenő szimmetriatengely körül forognak. Egyelőre csak azokat az eseteket vesszük tekintetbe, amelyeknél a tengely iránya a térben rögzített. Példaként szolgálhat az alaplapjára csavarozott elektromotor rotorjának forgása, vagy az egyenes úton haladó gépkocsi kerekének forgó mozgása. A forgástengely egy helyben maradhat, vagy haladó (transzlációs) mozgást végezhet, de a tengely mindig megtartja állandó irányát a térben. Az elemzés könnyen érthetővé válik, ha a mozgást a test középpontjának haladó mozgása, valamint a test tömegközéppont körüli forgó mozgása eredőjének tekintjük. Ugyanúgy, ahogyan egyenesvonalú mozgásoknál tettük, most is azzal kezdjük, hogy megfogalmazzuk a forgó mozgást leíró kinematikai egyenleteket. Majd a következő fejezetben Newton törvényeit alkalmazzuk, hogy megértsük, miért tesznek szert a testek forgási gyorsulásra.

11.2 A forgás kinematikai leírása

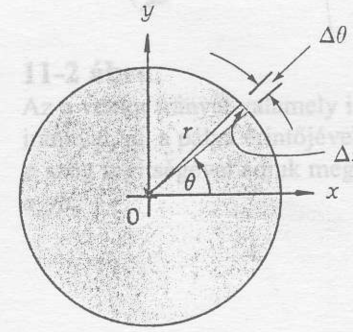
Tekintsünk egy tömör, homogén tárcsát, amely a középpontján átmenő rögzített ★ tengely körül szabadon foroghat. (11-1 ábra.) A tárcsa mozgását úgy figyelhetjük meg, ha a tárcsára sugárirányú egyenest rajzolunk és ennek a sugárnak a pozitív x tengelyen való áthaladásához rendeljük a „zérus” referenciahelyzetet. Amint a tárcsa az óramutató járásával ellentétes irányban forog, a sugárirányú egyenes olyan θ szöget súrol, amely az r sugárral és az s ívhosszal a következő kapcsolatban van:

A θ szögelfordulás $$\theta \equiv \frac{s}{r}. \qquad (11\text{-}1)$$

A szöget *radiánban* (rad) mérjük. Ez az egység két hosszúság hányadosa, így dimenzió nélküli mennyiség, puszta szám. Megállapodás szerint általában a



(a)



(b)

11-1 ábra.
A tárcsa a középpontján átmenő rögzített tengely körül forog az óramutató járásával ellentétes irányban. (A ★ csillag a papír síkjára merőleges tengelyt jelöli.)

pozitív x tengelytől mért, az óramutató járásával ellentétes forgást választjuk pozitívnak, az ellentétes irányú forgás negatív.

Ha Δt időtartam alatt a szög helyzete $\Delta\omega$ értékkel változik, akkor az $\omega_{átl}$ **átlagos szögsebességet** a következőképpen definiáljuk:

$$\omega_{átl} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{11-2}$$

A $\Delta t \to 0$ határátmenettel az ω **pillanatnyi szögsebességet** definiáljuk:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Ez azt jelenti, hogy a pillanatnyi szögsebesség a szögelfordulás idő szerinti deriváltja:

Pillanatnyi szögsebesség
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{11-3}$$

A szögsebesség egysége 1 radián per másodperc (rad/s). Tekintetve, hogy a radián dimenzió nélküli mennyiség, a szögsebesség dimenziója $[T^{-1}]$.

Ha a szögsebesség Δt időtartam alatt $\Delta\omega$ értékkel növekszik, akkor az $\alpha_{átl}$ **átlagos szöggyorsulás** definíció szerint[1]:

$$\alpha_{átl} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{11-4}$$

A $\Delta t \to 0$ határátmenettel az α **pillanatnyi szöggyorsulást** definiáljuk:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Ez azt jelenti, hogy a pillanatnyi szöggyorsulás a szögsebesség idő szerinti deriváltja:

Pillanatnyi szöggyorsulás
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \tag{11-5}$$

A szöggyorsulás egysége 1 radián per másodperc a négyzeten (rad/s^2), dimenziója $[T^{-2}]$.

A szögelfordulással kapcsolatos mennyiségek és a tárcsa kerületén lévő részecske érintő irányú mozgása között szoros kapcsolat van. Amint a részecske s ívhossznyit halad, a tárcsa θ szöggel elfordul. A (11-1) összefüggés szerint:

$$s = r\theta.$$

Mindkét oldalt a t idő szerint differenciálva (konstans r mellett), a részecske érintő irányú v kerületi sebessége és az ω szögsebesség között fennálló:

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

vagy

$$v = r\omega \tag{11-6}$$

összefüggést kapjuk. Hasonló kapcsolat van az érintő irányú a_t gyorsulás és az α szöggyorsulás között. Ha a (11–6) összefüggést ismét az idő szerint deriváljuk, akkor

---

[1] A görög ω és α betűk írásánál figyeljünk, nehogy összekeverjük ezeket a latin w és a betűkkel. Néha ugyanabban az egyenletben egyidejűleg fordulnak elő, és zavar származhat abból, ha nincsenek egyértelműen megkülönböztetve egymástól.

$$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$$

adódik, vagyis az érintő irányú gyorsulás kifejezhető a szöggyorsulás segítségével:

Érintő irányú gyorsulás $\qquad a_t = r\alpha \qquad$ **(11-7)**

A kerületen lévő részecskének csak akkor van *tangenciális* (érintő irányú) gyorsulása, ha az ω szögsebesség változik. Ha ω növekedik a forgás irányában, akkor az a_t érintő irányú gyorsulás pozitív, ha ω csökken, akkor a_t negatív. Azonban, emlékeztetve a 4. fejezetre, még abban az esetben is, ha a tangenciális gyorsulás zérus, a körmozgást végző részecskének akkor is van a kör középpontja felé mutató *centripetális* gyorsulása: $a_{cp} = v^2/r$. Ha a $v = r\omega$ helyettesítést elvégezzük, akkor a centripetális gyorsulást $a_{cp} = (r\omega)^2/r$, azaz

Centripetális gyorsulás (ω függvényben kifejezve) $\qquad a_{cp} = r\omega^2. \qquad$ **(11-8)**

alakban is kifejezhetjük

A kerületi mozgással és a szögelfordulással kapcsolatos mennyiségek közötti összefüggéseket az alábbiakban összegezzük. Minthogy a θ szögelfordulást radiánban mérjük, ezért az alábbi egyenletekben szereplő, szöggel kapcsolatos mennyiségeket is radiánban kell kifejezni.

$$s = r\theta$$
$$v = r\omega$$
$$a_t = r\alpha$$

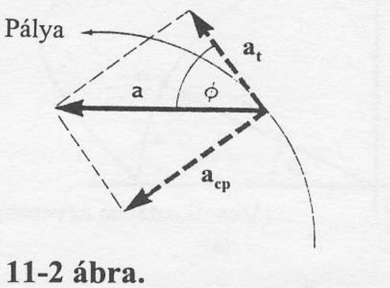
A szögeket radiánban kell kifejezni **(11-9)**

Fontos megjegyezni, hogy a kerületi mozgással kapcsolatos *tangenciális* mennyiségek (s, v, a_t) jelölésére latin betűket használunk, míg a görög betűkkel mindig a szögelfordulással kapcsolatos *forgási* mennyiségeket (θ, ω, α) jelöljük.

A gyorsulásvektor komponensei	**r és v segítségével kifejezve**	**szögek segítségével kifejezve**
Tangenciális (érintő irányú) gyorsulás Csak akkor lép fel, ha a v sebesség nagysága változik	$a_t = \frac{dv}{dt}$	$a_t = r\alpha$
Centripetális irányú gyorsulás Mindig, fellép még állandó sebesség esetén is.	$a_{cp} = \frac{v^2}{r}$	$a_{cp} = r\omega^2$

(11-10)

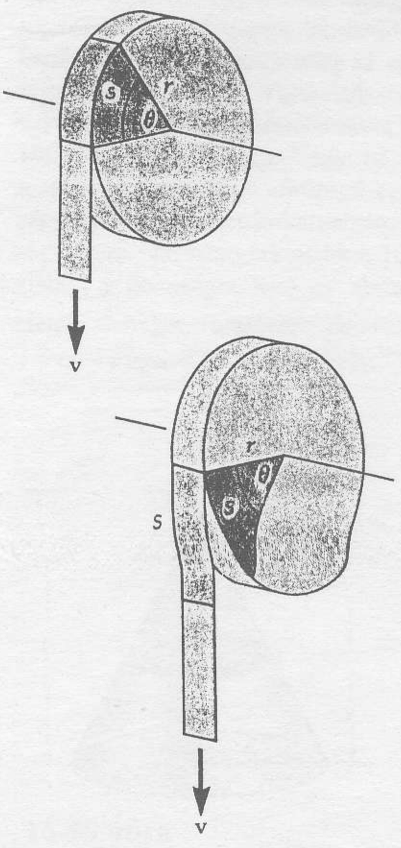
A teljes a gyorsulásvektort a két merőleges komponens geometriai összegezésével kapjuk; nagysága tehát a Pitagorász tétel szerint $a = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2}$, irányát pedig valamely ismert iránnyal pl. a görbe érintőjével, vagy a befelé mutató sugárral bezárt szög segítségével adjuk meg (11-2 ábra).



11-2 ábra.
Az **a** vektor irányát valamely ismert iránnyal, pl. a pálya érintőjével bezárt ϕ szög segítségével adjuk meg: $\mathrm{tg}\phi = a_{cp}/a_t$.

11.3 A forgó mozgásra vonatkozó kinematikai összefüggések

A szögelfordulással kapcsolatos mennyiségek (θ, ω és α) a tárcsa forgását írják le, míg az s, v és a_t mennyiségek a tárcsa kerületén lévő részecske érintő irányú mozgásáról adnak számot. Most a két mozgástípus között lévő szoros kapcsolat alapján a forgó mozgásra vonatkozó kinematikai egyenleteket fogjuk meghatározni.



11-3 ábra.
A forgó tárcsa pereméről vékony papírszalag tekeredik le. Ha a tárcsa $\theta = s/r$ szöggel fordul el, a szalag s távolsággal süllyed le.

Tegyük fel, hogy a tárcsa peremére vékony papírszalag van tekerve, ahogyan a 11-3 ábra mutatja. Amikor a tárcsa forog és a szalag letekeredik, a szalag egyenes vonalú mozgásának kinematikai jellemzőit (s, v és a_t) a tárcsa forgó mozgásával a (11-9) egyenleteknek megfelelően az $s = r\theta$, $v = r\omega$ és $a = r\alpha$ összefüggések kapcsolják össze. Felírjuk a szalag haladó mozgásának kinematikai egyenleteit, aztán behelyettesítjük a (11-9) egyenleteket, hogy megkapjuk a forgó mozgás kinematikai egyenleteit. Ahhoz hasonlóan, ahogyan a haladó mozgásra vonatkozó egyenletek levezetésénél állandó gyorsulás esetére szorítkoztunk, itt azt tesszük fel, hogy a szöggyorsulás értéke állandó.

$$v = v_0 + at \qquad s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \qquad v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$$

$$r\omega = r\omega_0 + r\alpha t \qquad r\theta = r\theta_0 + r\omega_0 t + \tfrac{1}{2}r\alpha t^2 \qquad r^2\omega^2 = r^2\omega_0^2 + 2r\alpha r(\theta - \theta_0)$$

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \alpha t} \qquad \boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2} \qquad \boxed{\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)}$$

Az $\omega_{\acute{a}tl}$ (átlagos szögsebesség) definíciójából két további egyenlet következik:

$$\boxed{\omega_{\acute{a}tl} = \frac{\omega_0 + \omega}{2}} \quad \text{és} \quad \boxed{\theta = \theta_0 + \omega_{\acute{a}tl}\, t}\,.$$

A 11-1 táblázat összefoglalja ezeket az egyenleteket, amelyeket könnyen megjegyezhetünk, ha a haladó és a forgó mozgásra vonatkozó egyenletek szoros analógiájára figyelünk. A körív mentén történő érintő irányú mozgás egyenletei hasonlóak azokhoz az egyenletekhez, amelyek a tárcsáról letekeredő szalag haladó mozgására vonatkoznak.

11-1 TÁBLÁZAT A forgó mozgás kinematikai egyenletei

Tangenciális (érintő irányú) mozgás a kerület mentén		Forgó mozgás		
s	Elmozdulás	θ		
v	Sebesség	ω		
a_t	Gyorsulás	α		
$v = v_0 + a_t t$	(ha a_t állandó)	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	(ha α állandó)	(11-11)
$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}a_t t^2$		$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$		(11-12)
$v^2 = v_0^2 + 2a_t(s - s_0)$		$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$		(11-13)
***Az átlagsebességet tartalmazó további egyenletek* (állandó *a* és *α* esetén)**				
$v_{\acute{a}tl} = \dfrac{v_0 + v}{2}$		$\omega_{\acute{a}tl} = \dfrac{\omega_0 + \omega}{2}$		(11-14)
$s = s_0 + v_{\acute{a}tl} t$		$\theta = \theta_0 + \omega_{\acute{a}tl} t$		(11-15)

A forgás kinematikai egyenleteinek levezetése differenciálszámítás segítségével.

A szöggyorsulást definiáló $\alpha = d\omega / dt$ egyenlet alapján

$$\alpha \cdot dt = d\omega$$

írható.
Állandó α esetén mindkét oldalt integrálva:

$$\alpha \int_0^t dt = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega$$

azaz

$$\alpha \cdot t = \omega - \omega_0$$

adódik; innen

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

Az $\omega = d\theta / dt$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \alpha \cdot t.$$

Integrálva ezt az összefüggést:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t (\omega_0 + \alpha \cdot t)\, dt$$

azaz

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2$$

ahonnan adódik

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 .$$

A (10-11) és (10-12) egyenletekből t kiküszöbölésével kapjuk a harmadik kinematikai egyenletet:

$$\omega^2 = \omega_0{}^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0).$$

A másik két kinematikai egyenlet az átlagos szögsebesség definíciójából közvetlenül következik.

11-1 PÉLDA

Köszörűkő nyugalmi helyzetből konstans $\alpha = 0{,}3\ \mathrm{rad/s^2}$ szöggyorsulással indul. (a) Határozzuk meg, mekkora lesz a radián per másodpercben mért szögsebessége 20 körülfordulás (40π radián) után! (b) Mekkora a szögsebesség fordulat per másodpercben?

MEGOLDÁS

Felsoroljuk az ismert értékeket:

$$\theta_0 = 0 \qquad \theta = 40\pi\ \mathrm{rad}$$
$$\omega_0 = 0 \qquad \omega = ?$$
$$\alpha = 0{,}3\ \mathrm{rad/s^2}$$

(a) Ezeket az ismereteket a kinematikai egyenletekkel összevetve, a (11-13) egyenletet választjuk ki:

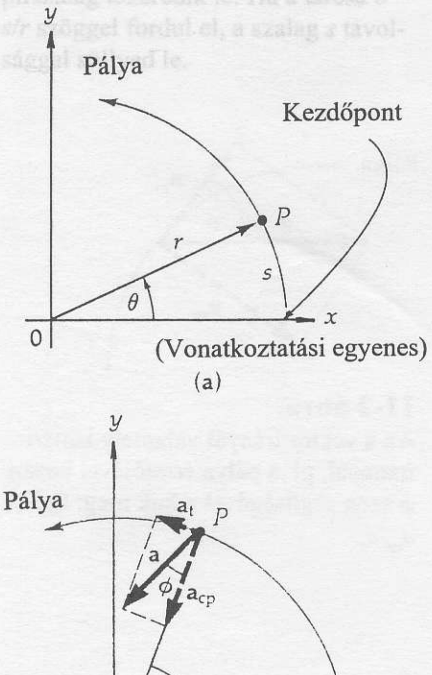
$$\omega^2 = \omega_0{}^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$\omega^2 = 0 + 2\left(0{,}3\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}\right)(40\pi\ \mathrm{rad} - 0) = 75{,}4\frac{\mathrm{rad}^2}{\mathrm{s}^2}$$

$$\omega = \sqrt{75{,}4\frac{\mathrm{rad}^2}{\mathrm{s}^2}} = 8{,}68\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

(b) Az eredményt fordulat per másodpercre a következőképpen számítjuk át:

$$\omega = 8{,}68\frac{\cancel{\mathrm{rad}}}{\mathrm{s}}\underbrace{\left[\frac{1\,\mathrm{ford}}{2\pi\ \cancel{\mathrm{rad}}}\right]}_{\text{átszámítási tényező}} = 1{,}38\frac{\mathrm{ford}}{\mathrm{s}}$$



11-4 ábra.
A 11-2 példához.

11-2 PÉLDA

Egy 1,2 m átmérőjű, kezdetben nyugalomban lévő kerék 0,6 rad/s^2 állandó szöggyorsulással forogni kezd. Tekintsük azt a peremen lévő P pontot, amelynek a $t_0 = 0$ időpontban $\theta_0 = 0$ a szögelfordulása. (a) Határozzuk meg a kerék szögsebességét az indulástól számított 2 másodperc múlva! (b) Számítsuk ki azt a teljes utat, amit a P pont az indulástól számított 2 másodperc időtartam alatt befut! (c) Állapítsuk meg a vizsgált pont helyét a t = 2s időpontban! (d) Határozzuk meg a pont t = 2s időponthoz tartozó gyorsulását!

MEGOLDÁS

Táblázatosan felsoroljuk az adott értékeket:

$$r = 0{,}6\text{ m} \qquad \omega_0 = 0$$
$$\alpha = 0{,}6\text{ rad/s}^2 \qquad \omega = ?$$
$$t = 2\text{ s.}$$

(a) Megvizsgálva a kinematikai egyenleteket, a kérdés megválaszolásához a (11-11) egyenlet a megfelelő;

$$\omega = \omega_0 + \alpha\, t$$
$$\omega = 0 + (0{,}6\text{ rad/s}^2)(2\text{ s}) = 1{,}20\text{ rad/s.}$$

(b) Ha ismernénk az első 2 másodperc alatt megtett θ szögelfordulást, akkor az $s = r\theta$ összefüggésből megkaphatnánk a kerület menti s tangenciális elmozdulást. (11-4a ábra.) Ezért a (11-12) egyenletből indulunk ki.[2] Tehát

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha\, t^2$$
$$\theta = 0 + 0 + \tfrac{1}{2}(0{,}6\text{ rad/s}^2)(2\text{ s})^2 = 1{,}2\text{ rad.}$$

Így:

$$s = r\theta = (0{,}6\text{ m})(1{,}2\text{ rad}) = 0{,}72\text{ m.}$$

Megjegyezés: A radiánt – minthogy a dimenziója az egység – végeredményben nem tüntetjük fel.

(c) A (b) részfeladatra adott válaszban azt találtuk, hogy a P pont szögelfordulása a t= 2 s időpontban θ = 1,2 rad. Kényelmi okból ezt a szöget fokokra váltjuk át:

$$\theta = 1{,}2\text{ rad}\underbrace{\left[\frac{360°}{2\pi\text{ rad}}\right]}_{\text{átszámítási tényező}} = 68{,}8°.$$

(d) A gyorsulás két komponensét a következőképpen határozzuk meg.

Az időben állandó tangenciális komponens nagysága:

$$a_t = r\alpha = (0{,}6\text{ m})(0{,}6\text{ rad/s}^2) = 0{,}36\text{ m/s}^2.$$

A centripetális komponens nagysága:

$$a_{cp} = r\omega^2 = (0{,}6\text{ m})(1{,}2\text{ rad/s})^2 = 0{,}864\text{ m/s}^2.$$

A gyorsulásvektor a nagyságát a t = 2 s időpontban a Pitagorász tétellel kaphatjuk meg:

[2] A szögelfordulásra vonatkozó összefüggés helyett választhattuk volna a (11-12) egyenlet érintő irányú mozgásra vonatkozó: $s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}a_t t^2$ alakját is.

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} = \sqrt{\left(0{,}864\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2 + \left(0{,}36\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2} = 0{,}8761\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Az a gyorsulásvektor irányát a 11-4b ábra mutatja. Azt a ϕ szöget, amelyet a gyorsulásvektor a befelé mutató radiális iránnyal bezár, a következőképpen számíthatjuk ki:

$$tg\phi = \frac{a_t}{a_{cp}} = \frac{0{,}36\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0{,}864\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}417$$

$$\phi = arc\ tg\ 0{,}417 = 22{,}6°$$

(Teljesen elfogadható lett volna annak a (90°–22,6°) = 67,4° szögnek a megadása is, amelyet a gyorsulásvektor az érintő irányával zár be.)

11-3 PÉLDA

Ez a példa időben változó szöggyorsulású mozgással kapcsolatos, *ezért a 11-1 táblázatban szereplő kinematikai egyenleteket itt nem szabad alkalmaznunk.* Egy rögzített tengelyre szerelt kerék nyugalmi helyzetéből az alábbi függvénnyel megadott szöggyorsulással kezd forogni:

$$\alpha = 9 - 12\,t, \qquad \text{(SI egységekben)}$$

ahol t a kerék forgásának kezdetétől mért idő. Határozzuk meg, hány fordulatot tesz meg a kerék a megállásig (ami után majd az ellenkező irányba kezd forogni)!

MEGOLDÁS

A 11-1 táblázat egyenleteit nem szabad használni, mert az α szöggyorsulás nem állandó. Az $\alpha = d\omega/dt$ alapegyenletből indulunk ki. Integrálással:

$$\omega - \omega_0 = \int_0^t \alpha \cdot dt = \int_0^t (9 - 12t)dt = 9t - 6t^2 \qquad \text{(SI egységekben)}$$

adódik. Azt a t időt, ami az $\omega_0 = 0$ és az $\omega = 0$ állapot között eltelt, ezek behelyettesítésével kapjuk meg:

$$0 - 0 = 9t - 6t^2.$$

ahonnan $t = 9/6 = 1{,}50$ s.

Az $\omega = d\theta/dt$ felhasználásával

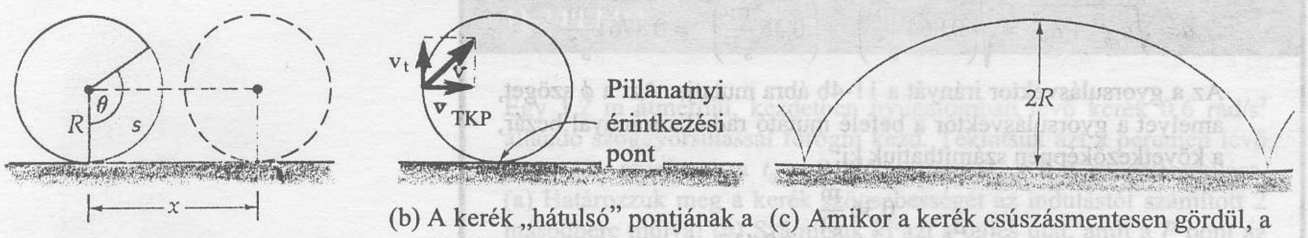
$$\theta - \theta_0 = \int_0^t \omega \cdot dt = \int_0^t \left(9t - 6t^2\right)dt = 4{,}5t^2 - 2t^3$$

$\theta_0 = 0$ és $t = 1{,}5$ s behelyettesítésével

$$\theta - 0 = 4{,}5(1{,}5)^2 - 2(1{,}5)^3 = 3{,}375 \text{ rad}$$

adódik. A keresett fordulatszámot a következőképpen számítjuk ki:

$$\theta = 3{,}375 \text{ rad} \underbrace{\left(\frac{1 \text{ ford}}{2\pi \text{ rad}}\right)}_{\text{Átszámítási tényező}} = 0{,}537 \text{ ford}$$



(a) Ha a kerék csúszásmentesen gördül, az s ívhosszúság megegyezik azzal az x távolsággal, amelyet a tömegközéppont megtesz. Bizonyos értelemben az s ívhossz „ráfekszik" a vízszintes x távolságra.

(b) A kerék „hátulsó" pontjának a Földhöz viszonyított **v** sebessége a $\mathbf{v}_t+\mathbf{v}_{TKP}$ vektorösszeggel egyenlő.

(c) Amikor a kerék csúszásmentesen gördül, a kerület egy-egy pontja ezt a *cikloisnak* nevezett görbét írja le.

11-5 ábra.
Sik felületen történő csúszásmentes gördülés.

11.4 Gördülés (csúszás nélkül)

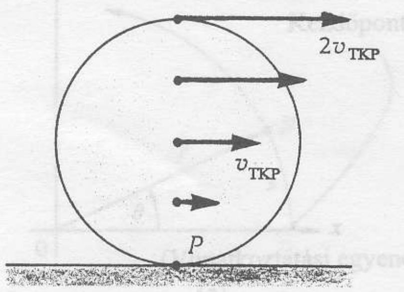
Érdekes és gyakran előforduló mozgás, amelyben a haladó és forgó mozgás összekapcsolódik, a kerék vagy a gömb gördülése csúszás nélkül. (A következő fejezetekben gyakran fogunk ilyen esetekkel foglalkozni.) A 11-5a ábrán a kerék *csúszás nélkül* gördül vízszintes felületen. Amikor a kerék $\theta = s/r$ szöggel elfordul, az s ívhossz nyilvánvalóan megegyezik azzal a vízszintes x távolsággal, amellyel a kerék tömegközéppontja elmozdul. A kerék mozgását úgy tekintjük, mintha két különálló mozgásból tevődne össze: a tömegközéppont *egyenesvonalú haladó mozgásából* és a tömegközéppont körüli forgó mozgásból. Abból a fontos tényből, hogy csúszás nem lép fel, az következik, hogy a haladó és a forgó mozgás kapcsolatos egymással. Azaz, az x, v és a mennyiségekre vonatkozó haladási kinematikai egyenletek kapcsolatban vannak a θ, ω és α forgási kinematikai egyenletekkel:

$$\begin{matrix}\text{Gördülés} & \text{a tömegközép-} \\ \text{csúszás} & \text{pont} \\ \text{nélkül} & \text{haladása}\end{matrix} \quad \left\{ \begin{aligned} s &= r\theta \\ v &= r\omega \\ a &= r\alpha\,. \end{aligned} \right. \quad \left[\begin{matrix}\text{A szöget} \\ \text{radiánban} \\ \text{kell mérni.}\end{matrix}\right] \qquad (11\text{-}16)$$

A csúszás nélküli gördülés másik jellegzetessége, hogy a kerék talajjal érintkező pontjának (a Földhöz viszonyított) pillanatnyi sebessége zérus. A kerék többi pontjának a Földhöz viszonyítottan változó pillanatnyi **v** sebessége van, ami két sebességnek, a tömegközéppont Földhöz viszonyított $\mathbf{v}_{TKP}$ sebességének és a pont tömegközéppontra vonatkoztatott – a tömegközéppontból a ponthoz húzott **r** rádiusz-vektorra mindig merőleges – $\mathbf{v}_t$ tangenciális sebességének vektori összege.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{TKP} + \mathbf{v}_t \qquad (11\text{-}17)$$

A 11-5b ábra ezt a vektorösszeget a gördülő kerék kerületének egy kiválasztott pontjára vonatkozóan szemlélteti. Hasonló meggondolásból következik, hogy a kerék legfelső pontjának Földhöz viszonyított pillanatnyi sebessége a tömegközéppont sebességének kétszerese. (11-6 ábra.) Általában, a kerék *bármely* pontjának (a Földhöz viszonyított) pillanatnyi sebessége merőleges a kerék és a talaj pillanatnyi érintkezési pontjából a szóbanforgó pontba mutató helyzetvektorra. Ez azért van így, mert a kerék minden pillanatban a pillanatnyi érintkezési pont körül forog.



11-6 ábra.
A kerék csúszásmentesen gördül. A talajjal érintkező P pont sebessége minden pillanatban zérus, míg a legfelső pont kétszerakkora sebességgel mozog, mint a kerék középpontja.

11-4 PÉLDA

Egy autó nyugalmi helyzetéből egyenletesen gyorsul és 9 másodperc alatt 22 m/s sebességet ér el. Kerekének átmérője 58 cm. (a) Határozzuk meg, hány fordulatot tett meg a kerék ezalatt, feltéve, hogy csúszás nélkül gördült. (b) Mekkora a kerék végső forgási sebessége fordulat per másodpercben kifejezve?

MEGOLDÁS

(a) Először a tömegközéppont egyenesvonalú gyorsulását határozzuk meg, majd azt az x távolságot, amely a kerék elmozdulása, (ez a tengely körüli szögelforduláshoz tartozó s ívhosszal egyezik meg). A mozgás kezdetének az x = 0 értéket választva, a következőket állapíthatjuk meg:

Adott:	$x_0 = 0$	$t = 9$ s
	$v_0 = 0$	$x = ?$
	$v = 22$ m/s	$a = ?$

$$v = v_0 + at$$

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{22\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 0}{9\,\mathrm{s}} = 2{,}24\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Továbbá $x = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2$

$$x = 0 + 0 + \frac{1}{2}\left(2{,}44\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(9\,\mathrm{s})^2 = 99{,}0\,\mathrm{m}$$

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{99{,}0\,\mathrm{m}}{0{,}29\,\mathrm{m}} = 341\,\cancel{\mathrm{rad}}\underbrace{\left[\frac{1\,\mathrm{ford}}{2\pi\,\cancel{\mathrm{rad}}}\right]}_{\text{átszámítási tényező}} = 54{,}3\,\mathrm{ford}$$

(b) A végsebesség v =22 m/s. Ennek alapján felírható:

$$v = r\omega$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{22\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0{,}29\,\mathrm{m}} = 75{,}8\,\frac{\cancel{\mathrm{rad}}}{\mathrm{s}}\underbrace{\left[\frac{1\,\mathrm{ford}}{2\pi\,\cancel{\mathrm{rad}}}\right]}_{\text{Átszámítási tényező}} = 12{,}1\,\frac{\mathrm{ford}}{\mathrm{s}}$$

11-5 PÉLDA

Tegyük fel, hogy az előző példában szereplő kocsi 15 m/s sebességgel halad. Határozzuk meg a kerék azon pontjának a Földhöz viszonyított pillanatnyi sebességvektorát, amely a kerék elülső részén, a talaj fölött 40 cm-re van!

MEGOLDÁS

A szóban forgó pont a 11-7 ábrán látható. A pont pillanatnyi sebessége a tömegközéppont $\mathbf{v}_{TKP}$ sebességének és a $\mathbf{v}_t$ tangenciális sebességnek vektori összege. Az ábrából következik, hogy $\mathbf{v}_t$ vízszintessel bezárt θ szöge:

$$\theta = \text{arc}\ \cos\left(\frac{11\,\text{cm}}{29\,\text{cm}}\right) = 67{,}7°$$

A 11-7b ábráról leolvasható, hogy ennek $\phi = 180° - \theta = 112{,}3°$-os kiegészítő szöge a vektorháromszög $\mathbf{v}_{TKP}$ és $\mathbf{v}_t$ oldalai által bezárt szög. A **v** vektor hosszának meghatározására a koszinusz tételt használjuk:

$$v^2 = v_{TKP}^{\ 2} + v_t^{\ 2} - 2v_{TKP}v_t\cos\phi.$$

Minthogy $|\mathbf{v}_{TKP}| = |\mathbf{v}_t|$, azért ez az összefüggés a következőképpen egyszerűsödik le:

$$v^2 = 2\,v^2_{TKP}\,(1 - \cos\phi),$$

$$v^2 = 2(15\ \text{m/s})^2\,(1 - \cos 112{,}3°) = 620{,}8\ (\text{m/s})^2,$$

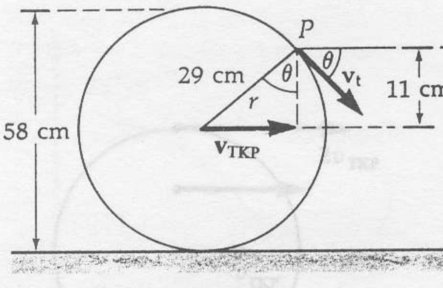
$$v = 24{,}9\ \text{m/s}.$$

A **v** vektor vízszintessel bezárt α szögére, mivel a 11-7b ábrán látható háromszög egyenlőszárú:

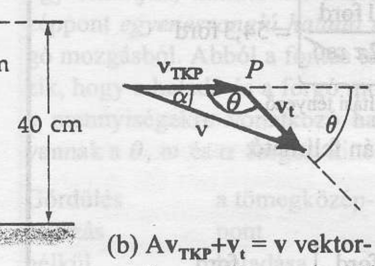
$$\alpha = \text{arc}\ \cos\frac{\left(\frac{v}{2}\right)}{v_{TKP}} = \text{arc}\ \cos\frac{24{,}9\dfrac{\text{m}}{\text{s}}}{2\left(15\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)} = 33{,}8°$$

adódik.

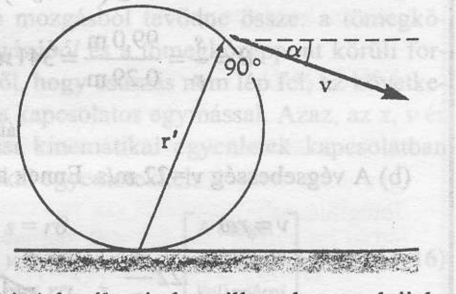
Megjegyezzük, hogy a **v** vektor merőleges a kerék és a talaj érintkezési pontjából a számításban szereplő pontba mutató **r'** vektorra.



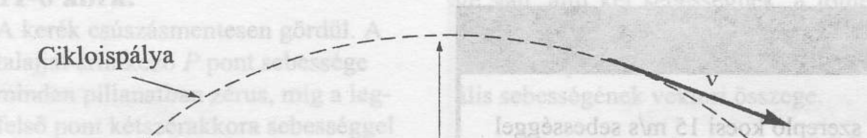
(a) A kerék *P* pontja 40 cm-re van a talaj felett.



(b) A $\mathbf{v}_{TKP} + \mathbf{v}_t = \mathbf{v}$ vektorösszeg diagramja. Mint-hogy $|\mathbf{v}_{TKP}| = |\mathbf{v}_t|$ így a háromszög egyenlőszárú.



(c) A kerék minden pillanatban a talajjal érintkező pontja körül fordul el. Ezért a kerék bármely *P* pontjának **v** sebességvektora merőleges a kerék és a talaj pillanatnyi érintkezési pontjából a *P* pontba mutató **r'** helyvektorra.



(d) A gördülő kereket figyelve megállapítható, hogy egy kerületi pontjának sebességvektora mindig az adott pont által befutott cikloispálya érintőjének irányába mutat.

11-7 ábra.
A 11-5 példához.

Összefoglalás

A merev test tömegközéppontján átmenő, rögzített szimmetriatengely körül végzett forgó mozgás a következő paraméterekkel jellemezhető:

Szögelfordulás θ

Szögsebesség $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

Szöggyorsulás $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$

Egy, a tömegközéppontján átmenő rögzített tengely körül forgó tárcsa kerületén lévő pont sebessége a kerület érintőjének irányába mutat. A pont gyorsulásának mindig van középpont felé mutató komponense: $a_{cp} = r\omega^2$, ezt *centripetális gyorsuláskomponensnek* nevezzük. Ha a tárcsa felgyorsul, vagy lelassul, akkor $a_t = d\omega/dt$ *tangenciális gyorsulás* is fellép.

A tangenciális mennyiségek és a szögekkel leírt mennyiségek között az alábbi összefüggések vannak:

A rögzített tengely körül forgó tárcsa kerületi pontjának érintő irányú mozgása		**Csúszásmentes gördülés esetén a tömegközéppont haladó mozgása**
$\left.\begin{array}{l} s = r\theta \\ v = r\omega \\ a_t = r\alpha \end{array}\right\}$	A szögekkel kifejezett mennyiségeket radiánban kell megadni.	$\left\{\begin{array}{l} x = r\theta \\ v = r\omega \\ a = r\alpha \end{array}\right.$

A forgó mozgásra és a haladó mozgásra vonatkozó kinematikai egyenletek közötti analógiát jól szemlélteti a következő táblázat.

A csúszásmentesen gördülő kerék bármely P pontjának pillanatnyi (a Földre vonatkoztatott) **v** sebességvektora merőleges a P pontnak a kerék és a talaj pillanatnyi érintkezési pontjából húzott **r'** helyvektorára. A P pont sebességének nagysága $v = r'\omega$.

A forgó mozgás kinematikai egyenletei

Tangenciális (érintő irányú) mozgás a kerület mentén	**Forgó mozgás**
Ahol s = ívhossz v = tangenciális sebesség a_t = tangenciális gyorsulás-komponens	ahol θ = szögelfordulás ω = szögsebesség α = szöggyorsulás
$\left.\begin{array}{l} v = v_0 + a_t t \\ s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a_t t^2 \\ v^2 = v_0^2 + 2a_t(s - s_0) \end{array}\right\}$ (ha a_t állandó)	$\left.\begin{array}{l} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{array}\right\}$ (ha α állandó)
Az átlagsebességet tartalmazó további egyenletek (állandó a és α esetén)	
$v_{átl} = \dfrac{v_0 + v}{2}$ $s = s_0 + v_{átl} t$	$\omega_{átl} = \dfrac{\omega_0 + \omega}{2}$ $\theta = \theta_0 + \omega_{átl} t$

Kérdések

1. Alkalmas-e a *radián* mint a szög mértékegysége a kinematikai problémák elemzésére, függetlenül attól, hogy a többi mennyiséget milyen mértékrendszerben mérjük?
2. Európában kilátásba helyezték a *grad* egység bevezetését a szög mérésére. Egy negyed körívben 100 grad van. Hasonlítsuk össze ennek előnyeit és hátrányait a *fok* használatával!
3. Egyik köszörűkő állandó szögsebességgel forog. Van-e a peremén lévő pontnak tangenciális gyorsuláskomponense? Sugárirányú gyorsuláskomponense? Állandó-e ezeknek a gyorsuláskomponenseknek a nagysága és az iránya?
4. Gondoljuk végig az előbbi kérdést állandó szöggyorsulás esetére!

Feladatok

11.2 A forgás kinematikai leírása

11A-1 (a) Határozzuk meg az óra 18 cm hosszú percmutatója hegyének sebességét! (b) Mennyi a mutató szögsebessége radián per másodpercben?

11A-2 Határozzuk meg az átszámítási tényezőt a fordulat per perc és a radián per másodperc között (és megfordítva).

11A-3 Soroljuk fel az alábbiakat növekvő szögsebesség szerint és fejezzük ki a szögsebességeket radián per másodpercben: az óra nagymutatója, az óra kismutatója, a 100 perc periódusidővel földkörüli körpályán keringő űrhajós; a 6000 fordulat per perc sebességgel forgó köszörűkő!

11A-4 Fejezzük ki radiánban a következő szögeket: (a) 98°, (b) 3,62 fordulat és (c) $2{,}78 \times 10^{-3}$ ívperc!

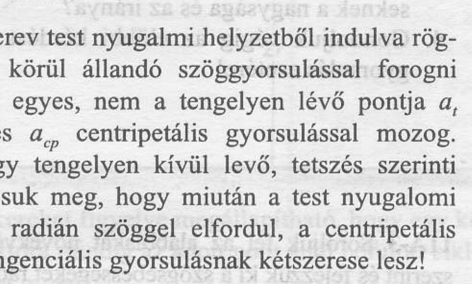
11. 3 A forgó mozgásra vonatkozó kinematikai összefüggések

11A-5 Egy lemezjátszó tányérja kezdetben $33^1/3$ fordulat per perc sebességgel forog. Ha a lemezjátszó áramát kikapcsoljuk, akkor a tányér állandó 0,20 rad/s² szöggyorsulással lassul le. (a) Hány másodperc telik el, amíg a lemezjátszó leáll? (b) Hány fordulatot tesz meg a lemezjátszó a megállásig?

11B-6 Egy kerék forgásának irányát egy olyan berendezés fordítja meg, amely 100 rad/s² állandó szögsebesség-változást hoz létre. A kerék kezdetben percenként 2000 fordulatot tesz meg. (a) Határozzuk meg, mennyi idő kell ahhoz, hogy a kerék szögsebessége *ellenkező irányú* 2000 fordulat/percre változzon. (b) Határozzuk meg, hányat fordul a kerék addig, amíg a teljes visszafordulási folyamat felénél egy pillanatra megáll! (Vegyük észre a hasonlóságot e feladat és a függőlegesen feldobott labda esete között!)

11B-7 Egy kerék 2 rad/s² állandó szöggyorsulással forog. Egy 3 másodperces időtartam alatt a kerék 90 radián szögelfordulást végez. Ha a kerék nyugvó helyzetből indult, mennyi ideig forgott a 3 másodperc időtartam előtt?

11B-8 Egy mozgó lövedék sebességét meg tudjuk határozni, ha a lövedéket két olyan forgó papírkorongon lőjük át, amelyek egymástól d távolságban közös tengelyre vannak szerelve. (11-8 ábra.) A korongokon lévő golyóütötte lyukak $\Delta\theta$ szögeltolódásából és a korong ω szögsebességéből a lövedék sebessége meghatározható. Állapítsuk meg a lövedék sebességét a következő adatok mellett: d = 80 cm, ω = 900 fordulat per perc, és $\Delta\theta = 31°$.



11-8 ábra.
A 11B-8 feladathoz.

11B-9 Egy merev test nyugalmi helyzetből indulva rögzített tengely körül állandó szöggyorsulással forogni kezd. Minden egyes, nem a tengelyen lévő pontja a_t tangenciális és a_{cp} centripetális gyorsulással mozog. Tekintsünk egy tengelyen kívül levő, tetszés szerinti pontot! Mutassuk meg, hogy miután a test nyugalomi helyzetéből 1 radián szöggel elfordul, a centripetális gyorsulás a tangenciális gyorsulásnak kétszerese lesz!

11.4 Csúszásmentes gördülés

11A-10 Egy szíjhajtású csiga átmérője 20 cm. A csiga 79 fordulat/perc sebességgel forog. Milyen hosszú a hajtószíjnak az a része, amely a csigára 7 másodperc alatt fut fel?

11A-11 Egy teherkocsi kerekeinek átmérője 64 cm. A kocsi 50 km/óra sebességgel halad. Határozzuk meg a kerekek szögsebességét!

11B-12 Egy gépkocsi 30 m/s sebességgel halad, kerekeinek átmérője 90 cm. (a) Határozzuk meg a kerekek tengely körüli forgásának szögsebességét! (b) Határozzuk meg a szöggyorsulást, ha egyenletes fékezés esetén a kerekek 40 fordulat után megállnak. (c) Mekkora utat tesz meg a kocsi a megállásig?

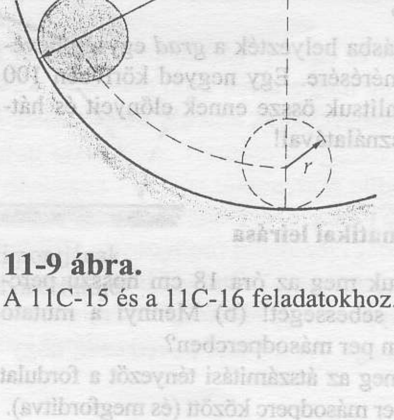
11B-13 Egy D átmérőjű labda vízszintes asztallapon csúszás nélkül v sebességgel gördül. A labda legördül az asztal széléről, és h magasságból a földre esik. Hányat fordul, mialatt a levegőben van?

További feladatok

11C-14 Egy kerék vízszintes talajon csúszás nélkül 6 m/s állandó sebességgel gördül. Határozzuk meg a kerületén lévő részecske talajhoz viszonyított pillanatnyi sebességét, midőn a részecske a kerék elülső pontjában van!

11C-15 Egy r sugarú henger csúszás nélkül gördül egy függőleges síkban lévő R sugarú körpályán a 11-9 ábra szerint. Mutassuk meg, hogy az a δ szög, amennyivel a henger a saját tengelye körül elfordul az alatt, amíg a henger tengelye θ szöggel elmozdul, a $\delta = (R - r)\theta/r$ *összefüggéssel adható meg.*

11C-16 Egy az ábrán nem szereplő mechanizmus segítségével a 11-9 ábra szerinti elrendezésben az r sugarú hengert csúszás nélkül, *állandó sebességgel* gördítik az R sugarú körpályán. (Megjegyzés: a sebesség állandó, úgyhogy ez nem a gravitáció hatására történő legördülés esete.) (a) Határozzuk meg a henger tömegközéppontjának v_{TKP} sebességét a tömegközéppont körüli forgás ω szögebességének függvényében! Hogyan fejezhető ki a v_{TKP} sebesség $d\theta/dt$ segítségével?



11-9 ábra.
A 11C-15 és a 11C-16 feladatokhoz.