

1. feladat (15 pont)

a) Írja fel az

$$y' = -2x + x^2 + y^2$$

differenciálegyenlet izoklináinak egyenletét! Rajzolja fel azt az izoklináját, amelynek pontjaiban teljesül a lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele! Jelölje be az iránymezőt ezen izoklina néhány pontjában!

Jelölje be az iránymezőt az $x_0 = 0, y_0 = -1$ pontban is!

b) Az $y = y(x), x \in \mathbb{R}$ megoldása a fenti differenciálegyenletnek, akárhányszor differenciálható és átmegy a $(0, 0)$ ponton.

Van-e ennek a megoldásnak lokális minimuma az $x_0 = 0$ helyen?

c) Határozza meg ennek a megoldásnak az $x_0 = 0$ pontbeli harmadik deriváltját!
($y'''(0) = ?$)**2. feladat (15 pont)**

Határozza meg a következő differenciálegyenlet összes megoldását!

$$y' - \frac{5}{x}y = x^5 e^{-3x}, \quad x \neq 0$$

3. feladat (19 pont)

$$y' = \frac{y^2 - 4}{y} - \frac{4}{3x^2 + 6}$$

a) Oldja meg a differenciálegyenletet! (Nem kell y - ra kifejeznie!)b) Adja meg az $y(0) = 1$ és az $y(0) = -2$ kezdetiérték problémák megoldását!

c) Jelöljön ki olyan tartományt, amelybe eső kezdetiérték probléma egyértelműen megoldható a tartományban! Indokoljon!

4. feladat (13 pont) $u = x + 3y$ helyettesítéssel oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = \frac{1}{x + 3y}, \quad y \neq -\frac{x}{3}$$

A megoldást nem kell y - ra kifejeznie!

5. feladat (12+4+6=22 pont)

a) Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y''' - y'' - 2y' = 20 \sin x$$

b) Milyen alakban keresheti az alábbi differenciálegyenlet egyik megoldását?

$$y''' - y'' - 2y' = 4 \operatorname{ch} 3x + 8x$$

(Nem kell megkeresnie!)

c) Írjon fel egy olyan legalacsonyabb rendű, lineáris homogén valós konstans együtthatós differenciálegyenletet, amelynek megoldása: $y = -3 \cos 4x + 5x^2$

6. feladat (16 pont)

a) Írja le a numerikus sorokra vonatkozó hányados kritérium limeszes alakját!

b) Konvergens-e az alábbi sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{(2n)!}$$

c) Konvergens-e az alábbi sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^{n^2} \frac{1}{6^{n+1}}$$

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

7. feladat (11 pont)

$$f(n) = -\frac{2}{3} f(n-1) + \frac{1}{3} f(n-2)$$

a) Adja meg a lineáris rekurziót kielégítő összes számsorozatot!

b) Adja meg az $f(0) = 7$, $f(1) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldást?

c) Írja fel az összes olyan megoldást, amelyre $f(n) = o(1)$ (kisordo egy) teljesül!

8. feladat (9 pont)

Adja meg a differenciálegyenlet általános megoldását! (Fejezze ki y -ra!)

$$y' - (\cos 4x) y = 3 \cos 4x$$