

**31. Adja meg az eloszlásfüggvény definícióját!**

Az  $F_X(x) = Q_X((-\infty, x)) = \mathbf{P}(A = \{\omega: X(\omega) < x\})$ ,  $x \in \mathbb{R}$  függvényt az  $X$  valószínűségi változó eloszlásfüggvényének nevezzük.  $F_X$  értéke  $x$ -ben az  $x$ -hez tartozó nívóesemény valószínűsége.

**32. Mik az eloszlásfüggvény tulajdonságai?**

Az  $F_X$  eloszlásfüggvény tulajdonságai:

- 1)  $F_X$  monoton nő, azaz  $F_X(x) \leq F_X(y)$ , ha  $x < y$ .
- 2)  $F_X$  balról folytonos, azaz  $\lim_{x \rightarrow y^-} F_X(x) = F_X(y)$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}$ -re,
- 3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$  és  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$

**33. Mi a binomiális eloszlás képlete?**

$X \in B(n, p)$

$$p_k = \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

**34. Mi a kapcsolat a binomiális és a Poisson eloszlás között?**

Ha  $n \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 0$  és  $np$  állandó, akkor  $B(n, p) \rightarrow Po(np)$ , vagyis a binomiális eloszlás  $k$ -adik tagja tart a Poisson-eloszlás  $k$ -adik tagjához.

**35. Melyik az egyetlen diszkrét örökifjú eloszlás?**

A geometriai eloszlás ( $X \in G(p)$ ), mert  $\mathbf{P}(X = m+k | X > m) = \mathbf{P}(X = k) \forall k, m$ -re.

**36. Melyik az egyetlen folytonos örökifjú eloszlás?**

Az exponenciális eloszlás ( $X \in E(\lambda)$ ), mert  $\mathbf{P}(X < x+t | X \geq t) = \mathbf{P}(X < x) \forall 0 < x, t$ -re.

**37. Melyik eloszlással írjuk le a visszatevéses mintavételezést?**

A binomiális eloszlással ( $X \in B(n, p)$ ).

**38. Ha  $X \in N(m, D)$ , akkor milyen eloszlást követ  $\frac{X-m}{D}$  ?**

$\Phi_{m,D}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{D}\right)$ , azaz standard normális eloszlást követ.

**39. Ha  $Y \in U(0, 1)$ ,  $F$  invertálható eloszlásfüggvény, akkor mi lesz  $F^{-1}(Y)$  eloszlás-függvénye?**

$F(y)$ , hiszen:

$$\mathbf{P}(Y < y) = \mathbf{P}(F^{-1}(U) < y) = \mathbf{P}(F(F^{-1}(U)) < F(y)) = \mathbf{P}(U < F(y)) = F(y).$$

**40. Ha  $X$  folytonos valószínűségi változó invertálható eloszlásfüggvénnyel, akkor  $F_X(X)$  milyen eloszlású lesz?**

Egyenletes eloszlású ( $X \in U([a, b])$ ).

**41. Fejezze ki  $F_X$  eloszlásfüggvénnyel:  $\mathbf{P}(a < X \leq b) = ?$** 

$$\mathbf{P}(a < X \leq b) = F_X(b+0) - F_X(a+0)$$

**42. Milyen függvény a diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye?**

$$F_X(x) = \sum_{x_i < x} p_i, \text{ másrészt } p_i = F_X(x_i + 0) - F_X(x_i).$$

Azaz diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye olyan lépcsős függvény, melynek az ugróhelyei az  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  helyeken vannak és az ugrás nagysága rendre  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$

**43. Adja meg a normális eloszlás sűrűségfüggvényét!**

$X \in N(\mu, \sigma)$

$$f_X(x) = \varphi_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

**44. Adja meg a sűrűségfüggvény definícióját!**

Legyen  $X$  az  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ -n értelmezett valószínűségi változó. Az  $f_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt az  $X$  sűrűségfüggvényének nevezzük, ha  $X$ -nek az  $F_X$  eloszlásfüggvénye előállítható a következő alakban:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

**45. Mik a sűrűségfüggvény tulajdonságai?**

Legyen  $X$  az  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ -n értelmezett folytonos valószínűségi változó. Ekkor az  $f_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sűrűségfüggvényre teljesül, hogy:

- 1)  $f_X(x) \geq 0$ ,
- 2)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = 1$ .

**46. Adja meg az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvényét!**

$X \in U([a, b])$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$$

**47. Adja meg az egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényét!**

$$X \in U([a, b])$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

**48. Mi a binomiális eloszlás módusza?**

Eloszlás móduszának nevezzük azt a  $k$ . tagot, amire  $p_k$  a legnagyobb érték, amit az eloszlás felvehet. Binomiális eloszlás esetén a módusz  $[(n+1)p]$ . (Ha egész, akkor a módusz egyenlő  $k = (n+1)p - 1$  értékével, így két módusz van.)

**49. Fejezze ki  $F_X$  eloszlásfüggvénnyel:  $P(a < X < b) = ?$** 

$$P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a + 0)$$

**50. Mi a geometriai eloszlás képlete?**

$$X \in G(p)$$

$$p_k = P(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p = q^{k-1}p$$

**51. Mi a diszkrét valószínűségi változó definíciója?**

Az  $X$  valószínűségi változót diszkrétnek nevezzük, ha értékészlete megszámlálható (sorozatba rendezhető), vagyis  $\forall \omega \in \Omega$ -ra  $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ .

**52. Mi az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye?**

$$X \in E(\lambda)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

**53. Mi az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye?**

$$X \in E(\lambda)$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

**54. Folytonos esetben mit jelent az örökifjú tulajdonság?**

A tétel szerint  $P(X < x + t \mid X \geq x) = P(X < t) \forall 0 < x, t$ -re.

$X$  azért „örökifjú”, mert annak feltételes valószínűsége, hogy  $X$  legfeljebb  $x + t$ -ig él, (ha már  $x$ -et megélt), egyenlő annak valószínűségével, hogy  $X$  legfeljebb  $t$  ideig él, azaz a túlélési kondíciók az idő múlásával nem csökkennek, hiszen 0 és  $t$  között ugyanaz a túlélési esély, mint  $x$  és  $x + t$  között.

**55. Fejezze ki  $F_X$  eloszlásfüggvénnyel:  $P(a \leq X \leq b) = ?$** 

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b + 0) - F_X(a)$$

**56. Mi a Poisson eloszlás képlete?**

$$X \in Po(\lambda)$$

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \lambda > 0$$

**57.  $P(X = a) = ?$** 

Folytonos esetben  $\forall P(X = a) = 0$ .

**58. Ha  $X \in N(0, 1)$ , akkor milyen eloszlást követ  $aX + b$  ?**

Ha  $X$  folytonos valószínűségi változó, és  $t(x) = ax + b, a \neq 0$ , akkor az  $Y = t(X) = aX + b$  lineáris transzformált valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F_Y = \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & \text{ha } a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & \text{ha } a < 0 \end{cases}$$

**59. Fejezze ki az  $X \in N(m, D)$  eloszlásfüggvényét a standard normális eloszlásfüggvénnyel!**

$$F_X(x) = \Phi_{m,D}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{D}\right)$$

**60. Fejezze ki az  $X \in N(m, D)$  sűrűségfüggvényét a standard normális sűrűségfüggvénnyel!**

$$f_X(X) = \varphi_{m,D}(x) = \frac{1}{D} \varphi\left(\frac{x-m}{D}\right)$$