Elektromágneses terek (VIHVA204) **2010.05.28.**

Név: **Javítási példány**	Pontszám:	Javító:
NEPTUN:	**10**	**EVT**
Aláírás:		

Feladatonként 1 pont szerezhető. Csak a végeredményt írja rá a feladatlapra!

1. Egy levegőben álló, töltött fémgömb felszínén a felületi töltéssűrűség $10\,\mu\mathrm{C/m^2}$. A gömb potenciálja a végtelen távoli ponthoz képest 3 kV. Mekkora a gömb sugara?

$$r = 2{,}66\,\mathrm{mm}$$

2. Egy 200 m hosszú koaxiális kábelt 500 V feszültségre kapcsolunk. A kábel $\varepsilon_r = 2{,}5$ relatív dielektromos állandójú dielektrikumában a maximális és minimális elektromos térerősség aránya 5. Mekkora a kábelben tárolt elektromos energia?

$$W = 2{,}16\,\mathrm{mJ}$$

3. Egy $l = 10\,\mathrm{m}$ hosszú, $2\,\mathrm{mm^2}$ keresztmetszetű vezeték fajlagos vezetőképessége $\sigma(x) = \dfrac{10^7 l}{x+l}\,\mathrm{S/m}$, ahol x a vezeték végétől mért távolság. Adja meg a vezeték ellenállását!

$$R = 0{,}75\,\Omega$$

4. Homogén, $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z 90\,\mathrm{mT}$ mágneses indukciójú térben helyezkedik el egy 6 A áramot vivő, $8\,\mathrm{cm^2}$ felületű sík vezetőhurok, amelynek felületi normálisa $(\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y)/10$. Adja meg a vezetőhurokra ható forgatónyomaték vektorát!

$$\mathbf{T} = (12{,}96\mathbf{e}_x - 4{,}32\mathbf{e}_y)10^{-5}\,\mathrm{Nm}$$

5. Egy $50\,\Omega$ hullámimpedanciájú ideális távvezeték lezárása egy R ellenállás. A vezetéken az állóhullámarány 3. Számítsa ki R lehetséges értékeit!

$$R_1 = 150\,\Omega \qquad R_2 = 16{,}7\,\Omega$$

6. Az xy síkban a $0 < x < a$ és $0 < y < b$ egyenletek által meghatározott felületen a mágneses indukció felületre normális rendezője $B(x,y,t) = B_0 \cos(\omega t - \pi x/a)$. Határozza meg az adott felületetet körülvevő zárt hurokban indukálódó feszültség időfüggvényét!

$$u(t) = \pm \frac{2\omega a b B_0}{\pi} \cos(\omega t)$$

7. Kör keresztmetszetű, 2 mm sugarú, 35 MS/m fajlagos vezetőképességű alumínium vezetékben szinuszos áram folyik, a behatolási mélység $\delta = 80\,\mu\mathrm{m}$. A vezető felszínén az elektromos térerősség időfüggvénye $\mathbf{n}_0 10\cos(\omega t)\,\mathrm{mV/m}$, ahol $\mathbf{n}_0$ a vezető hossztengelyével párhuzamos egységvektor. Adja meg az áramsűrűség időfüggvényét a vezetőben a felszíntől 2δ távolságban!

$$\mathbf{J}(t) = \mathbf{n}_0 4{,}74 \cdot 10^4 \cos(\omega t - 2)\,\mathrm{A/m^2}$$

8. Egy sík két végtelen féltérre osztja a teret, az egyik féltér $300\,\Omega$ hullámimpedanciájú, míg a másik féltér $200\,\Omega$ hullámimpedanciájú ideális szigetelő közeggel van kitöltve. A $300\,\Omega$ hullámimpedanciájú féltérből érkező síkhullám merőlegesen esik a határfelületre. A közegeket elválasztó síkban az elektromos térerősség amplitúdója 1 kV/m. Adja meg a határfelület $3\,\mathrm{m^2}$-es keresztmetszetén átáramló hatásos teljesítményt!

$$P = 7{,}5\,\mathrm{kW}$$

9. Levegőben álló Hertz-dipólus távolterében egy adott pontban a Poynting-vektor radiális irányú rendezőjének időfüggvénye $(50 + 50\cos(2\omega t))\,\mathrm{mVA/m^2}$. Adja meg az elektromos térerősség amplitúdóját ebben a pontban!

$$E = 6{,}14\,\mathrm{V/m}$$

10. Négyzet keresztmetszetű, 6 cm oldalszélességű csőtápvonalban a TE_{10} módus terjed. A tápvonal bármely keresztmetszetében az elektromos térerősség maximális amplitúdója 200 V/m, a mágneses térerősség transzverzális irányú rendezőjének maximális amplitúdója 0,5 A/m. Határozza meg a tápvonalban szállított hatásos teljesítményt!

$$P = 90\,\mathrm{mW}$$

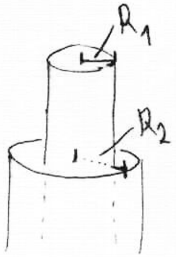
EMT 2010.05.28. vizsga (beugró)

1.) $\sigma = 10\,\mu\frac{C}{m^2} = 10^{-5}\,\frac{C}{m^2}$ $\qquad Q = \sigma \cdot 4\pi R^2$ $\qquad \rightarrow R = \varphi(R)\cdot\frac{\varepsilon_0}{\sigma} = 3\cdot 10^3 \cdot \frac{8{,}85\cdot 10^{-12}}{10^{-5}}\,m \approx$

$\varphi(R) = 3\,kV = 3\cdot 10^3\,V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R} = \frac{\sigma\cdot 4\pi R^{\cancel{2}}}{4\pi\varepsilon_0 \cancel{R}} = \frac{\sigma\cdot R}{\varepsilon_0}$ $\qquad \approx \underline{\underline{2{,}66\cdot 10^{-3}\,m}}$

(gömb, $r \geq R$)

2.) Koax



$\ell = 200\,m$

$U = 500\,V$

$\varepsilon_r = 2{,}5$

$\varepsilon\cdot E\cdot 2\pi r\cdot \cancel{\ell} = q\cdot\cancel{\ell} \rightarrow E(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r}$ $\qquad E_{max} = E(R_1) = E_1$, $\quad E_{min} = E(R_2) = E_2$

$U = \int_{R_1}^{R_2} E(r)\,dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{R_2}{R_1} = \frac{C'\cdot U}{2\pi\varepsilon}\cdot\ln\frac{R_2}{R_1} \rightarrow C' = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \rightarrow C = C'\cdot\ell$

$E_{max}/E_{min} = 5 = \frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1}$

$W_{el} = \frac{1}{2}C\cdot U^2 = \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}\pi\varepsilon\cdot\ell}{\ln\frac{E_1}{E_2}}\cdot U^2 = \frac{\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 2{,}5\cdot 200}{\ln 5}\cdot 500^2 \approx \underline{\underline{2{,}16\cdot 10^{-3}\,J}}$

3.) $\ell = 10\,m$

$A = 2\,mm^2 = 2\cdot 10^{-6}\,m^2$

$\sigma(x) = \frac{10^7\cdot\ell}{x+\ell}\,\frac{S}{m}$

$dR = \frac{1}{\sigma(x)}\cdot\frac{dx}{A}$ $\qquad \int_0^\ell dR = \int_0^\ell \frac{dx}{\frac{10^7\cdot\ell}{x+\ell}\cdot A} = \frac{1}{10^7\cdot\ell\cdot A}\int_0^\ell (x+\ell)\,dx =$

$= \frac{1}{10^7\cdot\ell\cdot A}\left[\frac{x^2}{2}+\ell x\right]_0^\ell = \frac{\ell^2/2+\ell^2}{10^7\,\ell\cdot A} = \frac{3\ell^2}{2\cdot 10^7\cdot\ell\cdot A} = \frac{3\cdot 10^2}{2\cdot 10^7\cdot 10\cdot 2\cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{0{,}75\,\Omega}}$

4.) $B_z = 90\,mT = 9\cdot 10^{-2}\,T$

$I = 6\,A$; $\quad A = 8\,cm^2 = 8\cdot 10^{-4}\,m^2$

$\underline{n} = \frac{1}{10}\cdot(\underline{e}_x + 3\underline{e}_y)$, $\quad |\underline{n}| \neq 1 \left(\frac{\sqrt{1^2+3^2}}{10}\right)$

$\underline{n}_0 = \frac{\underline{n}}{|\underline{n}|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\cdot(\underline{e}_x + 3\underline{e}_y)$ már egységhosszú

$\underline{T} = \underbrace{I\cdot A\cdot\underline{n}_0}_{\underline{A}} \times \underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{I\cdot A}{\sqrt{10}} & \frac{3\cdot I\cdot A}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} = B_z\left(\frac{3\cdot I\cdot A}{\sqrt{10}}\underline{i} - \frac{I\cdot A}{\sqrt{10}}\underline{j}\right) \approx \underline{\underline{(4{,}098\,\underline{e}_x - 1{,}366\,\underline{e}_y)\,10^{-4}\,Nm}}$

5.

$Z_0 = 50\,\Omega$

$\overline{Z}_2 = R$

$$\sigma = 3 = \frac{1+|r|}{1-|r|}$$

$$\sigma - \sigma|r| = 1 + |r|$$

$$\sigma - 1 = |r|(\sigma + 1)$$

$$|r| = \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}$$

$$r_1 = \frac{\sigma-1}{\sigma+1} = \frac{2}{4} = 0{,}5 \; ; \quad r_2 = -r_1 = -0{,}5$$

$$\frac{R - Z_0}{R + Z_0} = 0{,}5$$

$$R - 50\,\Omega = 0{,}5R + 25\,\Omega$$

$$0{,}5R = 75\,\Omega$$

$$\underline{\underline{R_1 = 150\,\Omega}}$$

$$\frac{R - Z_0}{R + Z_0} = -0{,}5$$

$$R - Z_0 = -0{,}5R - 0{,}5Z_0$$

$$1{,}5R = 0{,}5Z_0 = 25\,\Omega$$

$$R_2 = \frac{25}{1{,}5}\,\Omega \approx \underline{\underline{16{,}667\,\Omega}}$$

6.

$$u(t) = -\frac{\partial}{\partial t}\int \underline{B}\, d\underline{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\int B_n\, dA =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\int_0^a\int_0^b B_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi x}{a}\right) dy\, dx = -b\cdot B_0 \frac{\partial}{\partial t}\int_0^a \cos\left(\omega t - \frac{\pi x}{a}\right) dx = -bB_0\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\sin\left(\omega t - \frac{\pi x}{a}\right)}{-\frac{\pi}{a}}\right]_{x=0}^{a} =$$

$$= \frac{abB_0}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\underbrace{\sin(\omega t - \pi)}_{-\sin(\omega t)} - \sin(\omega t)\Big) = \frac{abB_0}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\big(-2\sin(\omega t)\big) = \frac{-2abB_0}{\pi}\,\omega\cdot\cos(\omega t)$$

$$u(t) = \pm\frac{2abB_0\omega}{\pi}\cos(\omega t)$$

$\pm$ mer nem tudunk referenciairányokat

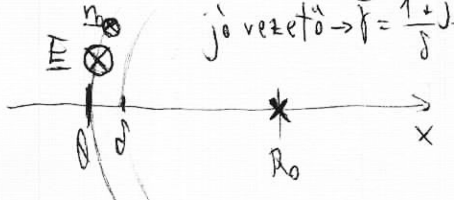
7.

$R_0 = 2\text{ mm} = 2\cdot 10^{-3}\text{ m}$

$\sigma = 35\text{ MS/m} = 3{,}5\cdot 10^{7}\ \frac{S}{m}$

$\delta = 80\ \mu m = 8\cdot 10^{-5}\text{ m} \ll R_0$

jó vezető $\to \gamma = \frac{1+j}{\delta} = \alpha + j$



$$E(0,t) = \underline{n}_0\cdot 10\cdot\cos(\omega t)\ \frac{mV}{m} = \underline{n}_0\cdot\overbrace{10^{-2}}^{E_0}\cos(\omega t - \beta\cdot 0)\ \frac{V}{m}$$

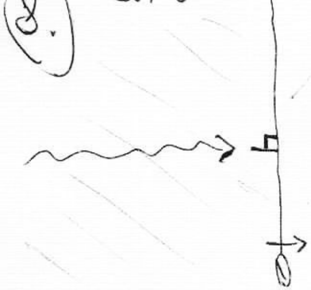
$$\overline{E}(x) = E_0 e^{-\gamma x} = E_0 e^{-\alpha x}\cdot e^{-j\beta x} = E_0 e^{-\frac{x}{\delta}}\cdot e^{-j\frac{x}{\delta}}$$

$$\overline{E}(2\delta) \approx 1{,}3534\cdot 10^{-3}\cdot e^{-j2}\ \frac{V}{m} \longrightarrow \text{Re}$$

$$\underline{J}(2\delta, t) = \sigma\cdot\text{Re}\{\overline{E}(2\delta)\,e^{j\omega t}\}\underline{n}_0 \approx \underline{\underline{4{,}737\cdot 10^{4}\cos(\omega t - 2)\,\underline{n}_0\ \frac{A}{m^2}}}$$

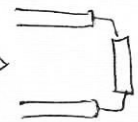
8.

$Z_{01} = 300\,\Omega \quad | \quad Z_{02} = 200\,\Omega$



$E_0 = 1\,\frac{kV}{m} = 10^3\,\frac{V}{m} \qquad A = 3\,m^2 \qquad$ síkhullám

távvezeték analógia, $Z_2 = Z_{02}$ (∞ féltér)

$\Rightarrow$ 

$$P = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{Z_{02}} \cdot A = \frac{10^6}{2 \cdot 200} \cdot 3\,W = 7500\,W = \underline{\underline{7{,}5\,kW}}$$

9.

$$S(t) = (50 + 50\cos(2\omega t))\,\frac{mVA}{m^2} \qquad \underline{S}(t) = \underline{E}(t) \times \underline{H}(t)$$ két sin szorzata (v. cos)

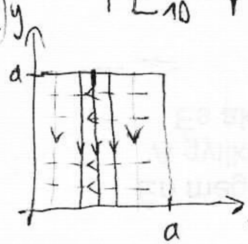
$$\cos^2(\omega t) = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2}$$ pont így néz ki

$$S(t) = \frac{1}{2}\left(100 + 100\cos(2\omega t)\right) = 100 \cdot \cos^2(\omega t) \rightarrow S_0 = 100\,\frac{mVA}{m^2} = \frac{E_0^2}{Z_\infty}$$ ← levegőben vagyunk

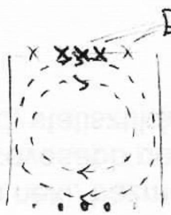
$0{,}1\,\frac{VA}{m^2}$

$$\rightarrow E_0 = \sqrt{S_0 Z_\infty} = \sqrt{0{,}1 \cdot 120\pi} \approx \underline{\underline{6{,}14\,\frac{V}{m}}}$$

10. TE_{10} $\downarrow E$, $\downarrow H$



felülről:



E ← ide vett vetület: $\overline{H}(x) = H_{tr0} \cdot \sin\frac{\pi x}{a} \quad (-\underline{e}_x)$

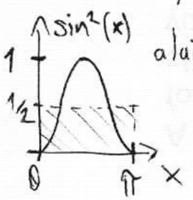
$\overline{E}(x) = E_0 \cdot \sin\frac{\pi x}{a} \quad (-\underline{e}_y)$ y mentén egyenletesek

$a = 6\,cm = 0{,}06\,m$

$E_0 = 200\,\frac{V}{m};\ H_{tr0} = 0{,}5\,\frac{A}{m}$

$$P + jQ = \int \frac{1}{2}\underline{E} \times \underline{H}^* \, dA = \int_0^a \int_0^a \frac{1}{2} E_0 H_{tr0} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dy\,dx = \frac{a E_0 H_{tr0}}{2} \underbrace{\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx}_{a/2} =$$

$E \perp H$



alatti terület $= \frac{\text{periódushossz}}{2}$ (a vonalközött téglalap)

$$= \frac{a^2 E_0 H_{tr0}}{4} = \frac{6^2 \cdot 10^{-4} \cdot 200 \cdot 0{,}5}{4} = 0{,}09\,W = \underline{\underline{P = 90\,mW}}$$