A Számítástudomány alapjai

ELSŐ ZH pótlása 2011. XII. 14. 10^{00}

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.
Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel, mert ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük.
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

Feladatok

1. A 174 fős villamosmérnök-évfolyam hallgatói 4-féle tárgyat hallgatnak, mindegyiket ugyanannyian vették fel, minden hallgató felvett legalább egy tárgyat. Senki sincs, aki mind a négy tárgyat felvette, de bármely három tárgyhoz pontosan egy olyan hallgató van, aki azok mindegyikére jár. Ezen kívül bárhogyan is választunk két tárgyat a négyből, pontosan 5 olyan hallgató van, aki mindkettőt felvette. Hány villamosmérnök-hallgató jár az egyes kurzusokra?

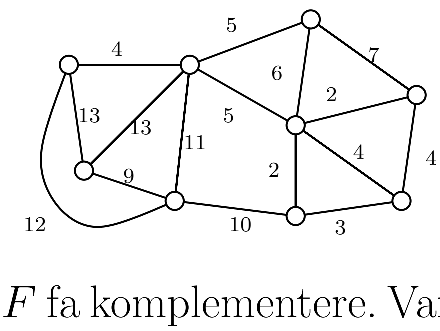
2. Hét villamosmérnök-hallgatóról tudjuk, hogy közülük bármely kettőnek van közös beszédtémája, mégpedig 3 lehetséges téma (táplálkozás, hardware, ellentétes nem) valamelyike. (Lehetséges pl, hogy a és b ill. a és c témája megegyezik, de különbözik b és c közös témájától.) Igazoljuk, hogy kiválasztható a 7 hallgató közül néhány (de legalább 3) olyan, akik körbeülhetnek úgy egy kerek asztalt, hogy az egymás mellett ülőknek ugyanaz legyen a közös témájuk.

3. Összefüggő-e az a G gráf, aminek a szomszédossági mátrixa az alábbi?

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Legyen F az ábrán látható G gráf egy minimális súlyú feszítőfájának élhalmaza. Van-e a $G - F$ gráfnak Euler-köre?

5. Legyen G olyan véges gráf, aminek C egy Hamilton köre. Tegyük fel, hogy a $G - C$ gráfnak van Euler-köre. Mutassuk meg, hogy ekkor a G gráfnak is van Euler-köre.



6. Legyen G a $(2, 3, 7, 2, 4, 3, 3, 2)$ Prüfer-kódú F fa komplementere. Van-e G-nek Hamilton-köre?

Jó munkát!

A Számítástudomány alapjai

1. ppZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. A 174 fős villamosmérnök-évfolyam hallgatói 4-féle tárgyat hallgatnak, mindegyiket ugyanannyian vették fel, minden hallgató felvett legalább egy tárgyat. Senki sincs, aki mind a négy tárgyat felvette, de bármely három tárgyhoz pontosan egy olyan hallgató van, aki azok mindegyikére jár. Ezen kívül bárhogyan is választunk két tárgyat a négyből, pontosan 5 olyan hallgató van, aki mindkettőt felvette. Hány villamosmérnök-hallgató jár az egyes kurzusokra?

   Tegyük fel, hogy a négy kurzus mindegyikét k hallgató vette fel, ezek alkotják az A_1, A_2, A_3 és A_4 halmazokat. A feladat szerint $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 174$. (2 pont)
   Az órán tanult szita-formula szerint a halmazok uniójának méretét úgy is megkaphatjuk, hogy a halmazok méretének összegéből levonjuk a páronkénti metszetek méretének összegét, hozzáadjuk az összes hármas metszet méretének összegét, majd levonjuk a 4 halmaz metszetének méretét. (4 pont)
   Páronkénti metszetből összesen $\binom{4}{2} = 6$, míg hármas metszetből $\binom{4}{3} = 4$ van, az összes halmaz metszetét pedig egyféleképp lehet képezni, ráadasul az üres. (2 pont)
   Ezek alapján $174 = 4k - 6 \cdot 5 + 4 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 4k - 26$, (1 pont)
   anonnan $200 = 4k$ ill. $k = 50$ adódik. Ennyien járnak tehát az egyes kurzusokra. (1 pont)

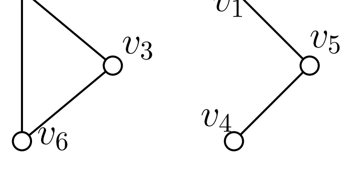
2. Hét villamosmérnök-hallgatóról tudjuk, hogy közülük bármely kettőnek van közös beszédtémája, mégpedig 3 lehetséges téma (táplálkozás, hardware, ellentétes nem) valamelyike. (Lehetséges pl, hogy a és b ill. a és c témája megegyezik, de különbözik b és c közös témájától.) Igazoljuk, hogy kiválasztható a 7 hallgató közül néhány (de legalább 3) olyan, akik körbeülhetnek úgy egy kerek asztalt, hogy az egymás mellett ülőknek ugyanaz legyen a közös témájuk.

   Alkossa a 7 szóban forgó hallgató a G gráf csúcsait, és jelölje E_i $i = 1, 2, 3$ esetén azokat az éleket amit azok közé a hallgatók közé húzunk, akiknek a közös témájuk éppen az i-dik. (2 pont)
   Mivel bármely két hallgató közti él az E_1, E_2 ill. E_3 valamelyikébe beletartozik, ezért ezen élek összesen annyian vannak, mint ahány él behúzható 7 csúcs közé, (2 pont)
   szám szerint $\binom{7}{2} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 6 = 21$-en. (1 pont)
   Kell lennie tehát olyan i témának, hogy $|E_i|$ legalább $\frac{21}{3} = 7$ élt tartalmaz. (1 pont)
   Tanultuk, hogy egy n pontú körmentes gráfnak legfeljebb $n - 1$ éle lehet, (2 pont)
   ezért ez az E_i élhalmaz biztosan tartalmaz kört. (1 pont)
   Az e kör csúcsainak megfelelő hallgatókat a körnek megfelelően leültetve pedig éppen a feladat állítását igazoljuk. (1 pont)

3. Összefüggő-e az a G gráf, aminek a szomszédossági mátrixa az alábbi?

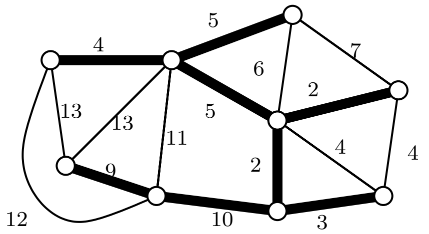
$$A(G) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 1&0&0&1&0&0 \\ 0&1&1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

   A jobb oldali ábrán látható a kérdéses gráf egy diagramja. (5 pont)
   Szemlátomást nem vezet él a v_2, v_3, v_6 csúcsokból a v_1, v_4 ill. v_5 csúcsok egyikébe sem, ezért G nem összefüggő. (5 pont)



4. Legyen F az ábrán látható G gráf egy minimális súlyú feszítőfájának élhalmaza. Van-e a $G-F$ gráfnak Euler-köre?

Az órán tanult Kruskal algoritmus segítségével meghatározzunk egy minimális súlyú feszítőfát. Ennek során minden élről (növekvő súlysorrendben) eldöntjük, hogy bevesszük-e, mégpedig annak alapján, hogy kört hoz-e létre az eddig bevett élekkel. Az algoritmus bármely lefutása ugyanazt az F feszítőfát találja meg, amit az ábrán vastag élekkel jelöltünk. (6 pont)



A $G-F$ gráfnak két komponensében is fut él, ezért nem lehet Euler-köre. (4 pont)

Ha vki nem (vagy nem jól) találja meg F-t, de helyesen idézi fel az összefüggő gráfok Euler-köréről szóló szükséges és elégséges feltételt (az összefüggőséget is helyesen beleszőve az idézetbe), az kapjon ezért a részért 3 pontot.

5. Legyen G olyan véges gráf, aminek C egy Hamilton köre. Tegyük fel, hogy a $G-C$ gráfnak van Euler-köre. Mutassuk meg, hogy ekkor a G gráfnak is van Euler-köre.

Mivel a $G-C$ gráfnak van Euler-köre, ezért $(G-C)$-ben minden fokszám páros. (3 pont)
A G gráfban minden fokszám 2-vel nagyobb, mint a $G-C$-beli megfelelő fokszám, hiszen C-ből minden csúcsra pontosan két él illeszkedik. (2 pont)
Ez azt jelenti, hogy G-ben is igaz, hogy minden csúcs foka páros. (1 pont)
A G gráf összefüggő, hiszen C egy Hamilton köre. (1 pont)
A véges összefüggő gráfokról pedig azt tanították, hogy ha minden fokszámuk páros, akkor van Euler-körük. (2 pont)
Ezek szerint G-nek valóban van Euler-köre, ahogyan azt a feladat állítja. (1 pont)

(Ha vki azzal indokolja G összefüggőségét, hogy $(G-C)$-nek van Euler köre, az nem kapja meg az összefüggőségért járó 1 pontot, és aki egyáltalán nem gondol az összefüggőségre, az a tételkimondásért járó 2 pontból is egyet elveszít.)

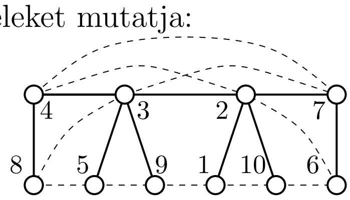
6. Legyen G a $(2,3,7,2,4,3,3,2)$ Prüfer-kódú F fa komplementere. Van-e G-nek Hamilton-köre?

Mivel a Prüfer-kód hossza 8, ezért F-nek 10 csúcsa van. (1 pont)
Tanultuk, hogy a Prüfer-kódban minden csúcs eggyel kevesebbszer szerepel, a fokszámánál, (2 pont)
Ezek szerint F-ben a maximális fokszám a 4. (1 pont)
Mivel G az F komplementere, G-ben a minimális fokszám $9-4=5$ lesz, vagyis G bármely csúcsának fokszáma legalább 5. (2 pont)
Dirac tétele szerint ha egy n csúcsú gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor G-ben van Hamilton kör. (3 pont)
Ez a tulajdonság fennáll a feladatbeli G gráfra $n=10$-re, tehát a Dirac tétel szerint annak van Hamilton köre, és nekünk pontosan ezt kellett bizonyítanunk. (1 pont)

Lehet persze favágással is.

Az órán tanultak szerint megkonstruáljuk a kérdéses F fát a Prüfer-kódjából. F-nek 10 pontja van, hisz a kód hossza 8. A táblázat alsó sora a letörölt leveleket mutatja:

2	3	7	2	4	3	3	2	$\boxed{10}$
$\boxed{1}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$	$\boxed{9}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$



(5 pont)

Az a kérdés, hogy van-e az F fa összes csúcsát tartalmazó olyan kör, aminek egyik éle sem esik egybe F valamelyik élével. (2 pont)
Ha ügyesek vagyunk, könnyen találunk ilyen kört. Egyet pl szaggatott vonalakkal rajzoltunk az ábrába. (2 pont)
Az tehát a válasz, hogy a G gráfnak van Hamilton köre. (1 pont)