INFOANALÍZIS2 1.SZIGORLAT

2016 október 12.

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
max. pontszám	10	10	10	10	10	50
elért pontszám						

NÉV
NEPTUN KÓD

1. Feladat. Határozzuk meg az adott függvény adott P pontbeli iránymenti deriváltját az adott $\mathbf{a}$ irányban. $f(x,y) = \sqrt{x+y}$, $P(1,3)$, $\mathbf{a} = (2,-1)$

2. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\, dx\, dy.$$

3. Feladat. Határozzuk meg a következő határértéket, ha létezik.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt[4]{x^4+y^4}}$$

4. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$y'' - 5y' + 6y = 2\sin(2x).$$

5. Feladat. Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}, \qquad \text{ahol} \quad k > 0 \quad \text{adott.}$$

1. Feladat. Határozzuk meg az adott függvény adott P pontbeli iránymenti deriváltját az adott $\mathbf{a}$ irányban. $f(x,y) = \sqrt{x+y}$, $\quad P(1,3)$, $\quad \mathbf{a} = (2,-1)$

Megoldás. $f'_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}$ $\boxed{\mathbf{1p}}$, $f'_y(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}$ $\boxed{\mathbf{1p}}$, és mivel ezek az adott pont környezetében léteznek és folytonosak, a függvény deriválható a P pontban $\boxed{\mathbf{2p}}$.
grad $f(P) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ $\boxed{\mathbf{2p}}$, az $\mathbf{a}$ irányú egységvektor $\widehat{\mathbf{a}} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$ $\boxed{\mathbf{1p}}$, skaláris szorzatuk $\boxed{\mathbf{2p}}$ $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \cdot (\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{1}{4\sqrt{5}}$ $\boxed{\mathbf{1p}}$.

---

2. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\, dx\, dy.$$

Megoldás. Az integrandus az adott tartományon folytonos, tehát az integrál létezik $\boxed{\mathbf{1p}}$. Az e^{x^2} függvénynek nincs elemi függvényekkel kifejezhető primitív függvénye. Ha a tartományon fordított sorrendben integrálunk $\boxed{\mathbf{1p}}$,

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\, dx\, dy \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\, dy\, dx \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \int_0^1 \left[y e^{x^2} \right]_0^x dy \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \int_0^1 x e^{x^2} dx \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1).$$

---

3. Feladat. Határozzuk meg a következő határértéket, ha létezik.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt[4]{x^4+y^4}}$$

Megoldás. Ha polár koordinátákkal vizsgálódunk az $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$ helyettesítéssel $\boxed{\mathbf{2p}}$, akkor azt kell nézni, mi történik, ha r tart nullához $\boxed{\mathbf{2p}}$.

$$\frac{xy}{\sqrt[4]{x^4+y^4}} = \frac{r^2 \cos\alpha \sin\alpha}{r\sqrt[4]{\cos^4\alpha + \sin^4\alpha}} = r\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sqrt[4]{\cos^4\alpha+\sin^4\alpha}} \quad \boxed{\mathbf{2p}}.$$

A tört minden α-ra korlátos $\boxed{\mathbf{2p}}$. r pedig tart nullához, tehát a függvény nullához tart $\boxed{\mathbf{2p}}$.

---

4. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$y'' - 5y' + 6y = 2\sin(2x).$$

Megoldás. A karakterisztikus egyenlet $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Gyökei $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3.$$

A homogén egyenlet általános megoldása $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$y_p(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x)$$

alakban keressük.

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x), \\ y_p''(x) &= -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x). \end{aligned}$$

Behelyettesítve az inhomogén egyenletbe $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$(\underbrace{-4A + 10B + 6A}_{=2})\sin(2x) + (\underbrace{-4B - 10A + 6B}_{=0})\cos(2x) = 2\sin(2x).$$

Az egyenletrendszert megoldva $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$A = \frac{1}{26}, \quad B = \frac{5}{26}.$$

Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$\begin{aligned} y_{iá} &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{26}\sin(2x) + \frac{5}{26}\cos(2x), \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

---

5. Feladat. Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}, \qquad \text{ahol} \quad k > 0 \quad \text{adott.}$$

Megoldás. A faktoriális miatt a hányados kritériummal érdemes próbálkozni $\boxed{\textbf{2p}}$. A sor pozitív tagú, ha konvergens, akkor abszolút konvergens $\boxed{\textbf{1p}}$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \frac{\frac{(n+1)^k}{(n+1)!}}{\frac{n^k}{n!}} \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \cdot 0 = 0 < 1, \quad \boxed{\textbf{2p}}$$

így a sor abszolút konvergens $\boxed{\textbf{1p}}$.
