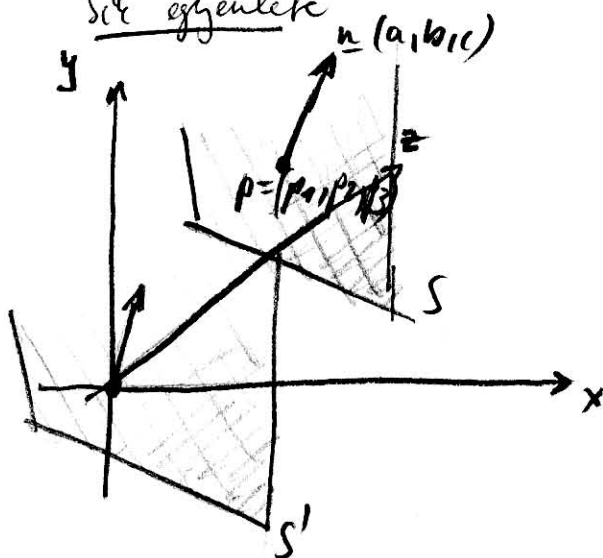


① Tekvélő koordinátageometria

Sík egyenlete



S' pontjai $(x-p_1, y-p_2, z-p_3)$ alakúak

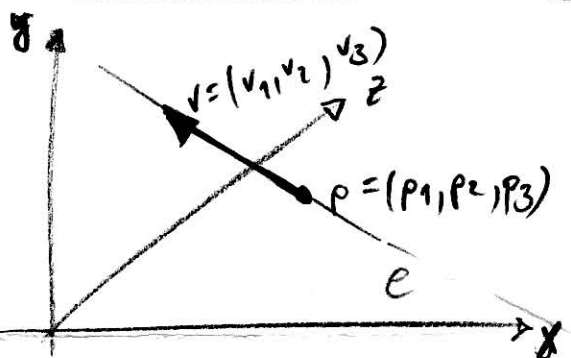
S' sík pontjainak kiejelése:

$$a(x-p_1) + b(y-p_2) + c(z-p_3) = 0$$

Átrendezve:

$$ax + by + cz = ap_1 + bp_2 + cp_3$$

Egyenes egyenletrendszere



$$e: (x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda(v_1, v_2, v_3)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{aligned} x - v_1 \lambda &= p_1 \\ y - v_2 \lambda &= p_2 \\ z - v_3 \lambda &= p_3 \end{aligned} \right\} \frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2} = \frac{z-p_3}{v_3}$$

Metriáspontok, metriásvonalak számlálása

- Körös egyenletrendszere, Gauss-elimináció...

↳ metrikus / pont / egyenes / sík

Vektortér def., def. főv., példák [vekt. $(V, T, +, \cdot)$ struktúra]

Def.: egy V nemüres halmazt vektortérnek nevezünk a T test felett, ha az alábbi axiómák (az ún. vektortéraxiómák) teljesülnek:

$$(\vec{0}) \quad +: (V, V) \rightarrow V$$

$$(\vec{01}) \text{ asszociatív} \quad \forall x, y, z \in V \quad (x+y)+z = x+(y+z)$$

$$(\vec{02}) \text{ kommutatív} \quad \forall x, y \in V \quad x+y = y+x$$

$$(\vec{03}) \quad \exists \vec{0} \in V: \quad \forall x \in V \text{ -re} \quad x+\vec{0} = x$$

$$(\vec{04}) \quad \exists \text{ ellentett: } \forall x \in V \text{ -re} \quad \exists (-x) \in V; \quad x+(-x) = \vec{0}$$

(kommutativitás)

(felművelhetőség)

(null/neutralis elem)

$$(S) \circ : (V, T) \rightarrow V$$

$$(S1) \text{ distributív: } (\lambda + \mu) \cdot \underline{v} = \lambda \underline{v} + \mu \underline{v}$$

$$(S2) \text{ distributív: } \lambda (\underline{u} + \underline{v}) = \lambda \underline{u} + \lambda \underline{v}$$

$$(S3) \mu(\lambda \underline{x}) = (\mu \cdot \lambda) \cdot \underline{x}$$

$$(S4) \exists 1 \in T; \forall x \in V - \underline{0} \quad 1 \cdot \underline{x} = \underline{x}$$

$$\star \text{ Tétel: (i) } \forall \lambda \in T - \underline{0} \quad \lambda \underline{0} = \underline{0}$$

$$(ii) \forall \underline{v} \in V - \underline{0} \quad 0 \cdot \underline{v} = \underline{0}, \text{ ahol a } 0 \text{ a } T \text{ test nullaeleme}$$

$$(iii) \forall \underline{v} \in V - \underline{0} \quad (-1) \cdot \underline{v} = -\underline{v}, \text{ ahol } -1 \text{ a } T \text{ test egyenlőseleme}$$

az ellentettje (a testben)

$$(iv) \text{ Ha } \lambda \underline{v} = \underline{0}, \text{ akkor } \lambda = 0 \text{ vagy } \underline{v} = \underline{0}$$

Biz: (i) Legyen $\underline{v} \in V$ tetszőleges

$$(S3) \quad \underline{v} + \underline{0} = \underline{v} \quad / \cdot \lambda$$

$$\lambda(\underline{v} + \underline{0}) = \lambda \underline{v}$$

$$(S2) \quad \lambda \underline{v} + \lambda \underline{0} = \lambda \underline{v} \quad / + \lambda \underline{v} \text{ ellentettje} \Rightarrow \text{jött elől } \underline{0}, \text{ bal:}$$

$$-\lambda \underline{v} + (\lambda \underline{v} + \lambda \underline{0}) = (-\lambda \underline{v} + \lambda \underline{v}) + \lambda \underline{0} = \underline{0} + \lambda \underline{0} = \lambda \underline{0}$$

...

Példák

1. Az origóval kezdődő sík-, ill. térbeli vektorok a valós test felett
2. T_n a T test felett felett (min. komponensekkel) = k dimenziós vektor / nalm. k-asok halmaza
3. T_n × n, azaz a n × n-es mátrixok a T test felett (szorzás m. összeadás, skalárral szorzás)
4. T feletti polinomiális
5. R ell. R ell. ^{függvény} vektorok felett: $f+g: x \mapsto f(x)+g(x)$
 $\text{és } \lambda f: x \mapsto \lambda f(x)$
6. Valós nelműszárok a valós test felett
7. Komplex számok a valós test felett a komplex számok vektoraiként értelmezve

Stb.

② Def.: $X \subseteq V$ altér a (V, T) vektortelen, ha (X, T) is vektortelen ugyanazzal a T -t művelettel (jelölés: $X \leq V$)

Triv. altér:
 $V \leq V$
 $\{0\} \leq V$

Tétel:

$$X \subseteq V \text{ vektortelen altér} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x, y \in X \text{-re } x+y \in X \\ \forall x \in X; \forall \lambda \in T \text{-re } \lambda x \in X \end{cases}$$

Biz.: $\Rightarrow$ Ha X altér...

$\Leftarrow$ Megford.: (ö1) (ö2) (s1) - (s4) mindenképp teljesülnek V vektortelenjeire, így X elemeire is igazak.

$\hookrightarrow$ kell: $\exists 0 \in X$, és $\forall$ elemre $\exists$ ellentettje

Legyen $x \in X$ tetsz.:

$$(-1)x \in X$$

$$x + (-1)x \in X$$

$$0 \in X$$

Def.: Legyen V vektortelen

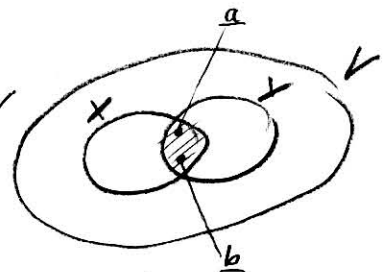
a T test felett; $a_1, \dots, a_n \in V$; $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in T$. A $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$ vektor az a_i vektorok (λ_i skalárokkal kifejezett) lineáris kombinációjának nevezzük.

Megj.: előző kék!

Tétel: Tetsz. vektortelen, ha $X, Y \leq V \Rightarrow X \cap Y \leq V$

Biz.: $a, b \in X \cap Y \Rightarrow \begin{cases} a, b \in X \Rightarrow a+b \in X \\ a, b \in Y \Rightarrow a+b \in Y \end{cases} \Rightarrow a+b \in X \cap Y$

ugyanígy skalárszorzatra; vagy lin. komb. képzés...



Def.: $a_1, \dots, a_n \in V$ vektorokat a V vektortelen generátormendeként nevezzük, ha V minden eleme előáll az a_i vektorok lineáris kombinációjaként.

Def.: Az $a_1, \dots, a_n \in V$ vektorok által generált altér az a_i vektorok összes lineáris kombinációjának a halmazát értjük, és ezt $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ -nel jelöljük. Azaz:

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \mid \forall \lambda_i \in T \right\}$$

Tétel: $U = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ az a_i vektorokat tartalmazó legminimális altér, azaz

- (i) U altér;
- (ii) $a_i \in U$, $i = 1, \dots, n$;
- (iii) ha W altér és $a_i \in W$, $i = 1, \dots, n$, akkor $U \subseteq W$

Előző 110.o.

Def.: $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$ lineárisan függetlenek, ha semelyik nem áll elő a többi lin. kombinációjaként.

lin. összefüggők, ha $\exists i \in \{1, 2, \dots, k\}$, hogy

$$x_i \in \langle x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k \rangle$$

Képf.: $0 \in \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$ biztosan igaz, tetszőleges $x_1, x_2, \dots, x_k$ vektorendszerre.

Def.: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ lin. komb. triviális, ha $\forall i$ -re $\lambda_i = 0$.
nem triv. lin. komb., ha $\exists i: \lambda_i \neq 0$.

[ld. pl.: $x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots$

$$0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + (-1)x_i]$$

Tétel.: $x_1, x_2, \dots, x_k$ lin. ffek $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$

Tétel.: Ha $x_1, x_2, \dots, x_k$ lin. ff $\Leftrightarrow \exists$ nem triv. lin. komb.-juk, ami a 0-t állítja elő ($\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = 0$, de nem $\forall i$ -re lesz $\lambda_i = 0$) ; bizt.: ($\Rightarrow$)

Bizt.: ($\Leftarrow$)

$$\sum_{i=1}^k \mu_i x_i = 0 \text{ és pl. } \mu_t \neq 0 \Rightarrow -\mu_t x_t = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq t}}^k \mu_i x_i \Rightarrow x_t = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq t}}^k \left(-\frac{\mu_i}{\mu_t} \right) x_i$$

Tétel.: $x_1, x_2, \dots, x_k$ lin. ffek $\Leftrightarrow$ Válgyn y -a, melyre $y \in \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$ teljesül az is, hogy y csak egyféleképp fejezhető ki az x_i -k lin. kombinációjaként.

Bizt.: $\Rightarrow$ indirekt stb:

Indirekt tgh. $\exists y$, melyre $y = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^k \mu_i x_i$ ahol $\exists i_0$ index, melyre $\lambda_{i_0} \neq \mu_{i_0}$

$$0 = \left(\sum_{i=1}^k \mu_i x_i \right) - \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \right) = \sum_{i=1}^k (\mu_i - \lambda_i) x_i$$

és ez a lin. komb. nem a triv., mert $\mu_{i_0} - \lambda_{i_0} \neq 0$ ✓

$\Leftarrow$ indirekt...

• lin. ffek rendszerét minimális is lin. ffek. generálmendnek...

• végtelen bármely lineárisan független generálmendnek

$\rightarrow$ V -t ki lehet fejezni és egyértelműen

②

(1) $f_1, f_2, \dots, f_n$ lin. ffek, de $f_1, f_2, \dots, f_n, g$ lin. cf.
 $\Rightarrow g \in \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$

Biz: $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n + \mu g = 0$ nemtriv. megold.

$\mu \neq 0$ (máskülönben $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$)

$$g = -\frac{\lambda_1}{\mu} f_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\mu} f_n$$

(2) Kiegészítő tétel

$f_1, \dots, f_n$ lin. ffek, és $g_1, g_2, \dots, g_k$ generátorok

all: $\forall i$ -re $\exists j$, hogy $f_1, f_2, \dots, f_{i-1}, g_j, f_{i+1}, \dots, f_n$ lin. ffek.

biz: indirekt, t.é. f_1 -re nem teljesül, vagyis $\forall j$ -re

$g_j, f_2, f_3, \dots, f_n$ lin. cf.

$\forall j$ -re (1) miatt $g_j \in \langle f_2, f_3, \dots, f_n \rangle$

$\{g_1, \dots, g_k\}$ gen. rendszer

$\left. \begin{array}{l} \{g_1, \dots, g_k\} \text{ gen. rendszer} \\ g_j \in \langle f_2, f_3, \dots, f_n \rangle \end{array} \right\} \Rightarrow f_2, f_3, \dots, f_n \text{ gen. rendszer}$

(3) $f_1, f_2, \dots, f_n$ lin. ffek $\left. \begin{array}{l} f_1, f_2, \dots, f_n \text{ lin. ffek} \\ g_1, g_2, \dots, g_k \text{ gen. rendszer} \end{array} \right\} n \leq k$

Biz: f_1 helyére g_{j_1} -et

f_2 helyére g_{j_2} -t

$\vdots$

(4) $\left. \begin{array}{l} \text{Ha } B_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \text{ bázis} \\ B_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \text{ bázis} \end{array} \right\} \Rightarrow k = n \text{ (vegyes dimenziós vektortér!!!)}$

Biz: a) B_1 ffek, B_2 gen. $\Rightarrow k \leq n$

b) B_2 ffek, B_1 gen. $\Rightarrow n \leq k$

Egy V vektortér dimenziója egy bázzisként elemzhető.

③ lineáris egyenletrendszerek n db

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned} \right\} k \text{ db}$$

δ egyenlet, n ismeretlen;
 a_{ij} és $b_i \in T$.
 $\nwarrow$ együtthatók; konstansok

a_{ij}

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array} \right)$$

az egyenletrendszert együtthatómátrixa
 az egyr. kibővített mátrixa

Elemi átalakítások:

- 1) egy sor végére nem egy $\neq 0$ konstans
- 2) Egy sorhoz hozzáadjuk egy másik sor skalárszorát
- 3) két sor felcserélünk
- 4) Egy $00 \dots 0 | 0$ sort elhagyhatunk.

Gauss-elimin.

- 1 Gauss-eliminációval $\forall$ lin. egyenletrendszer RKA-ra hozható
- 2 $\exists$ mo $\Rightarrow$ ha nem lehetetlen, akkor
- 3 $\exists$ egyért mo. $\Leftrightarrow$ van
 és $\forall$ megoldás $\exists$ egyetlen

o Ha egyért.: $n \leq k$ (versenyességi...)

4.62.

o homogén lin. rendszer: $b_i = 0$.

Gauss-elimináció

I. fázis "lefelé lépés"

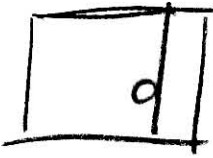
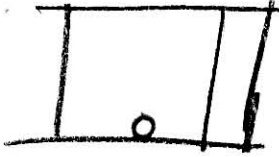
0. lépés) a_{11}

1. lépés) Ha $a_{ij} \neq 0$

1A) Levegő az i -ik egyenletet a_{ij} -vel $\Rightarrow$ ① (vezetős)

1B) $\forall k > i$ -re (k.sor) - (i.sor) $\cdot a_{kj}$

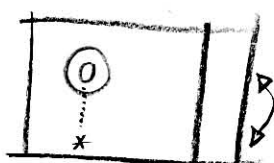
1C)

Ha  vagy  $\Rightarrow$ 2. lépés

1D) 

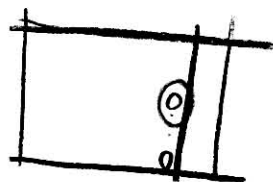
$a_{i+1,j+1} \Rightarrow$ 1. lépés

• Ha $a_{ij} = 0$

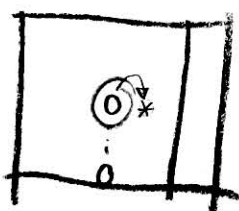


Ha $\exists k > i$, hogy $a_{kj} \neq 0 \Rightarrow$ felcseréljük az i -ik és a k -ik sort $\Rightarrow$ 1. lépés

Ha $\nexists k \rightarrow$

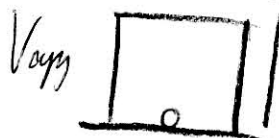


$\Rightarrow$ 2. lépés

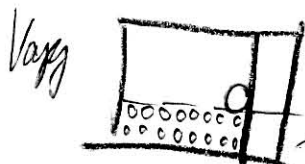


$a_{i,j+1} \Rightarrow$ 1. lépés

2. lépés)



$\Rightarrow$ STOP



Ha eset a sorok mind

$\begin{array}{c} 100 \dots 0 \ 0 \\ \text{(főleges sor)} \end{array} \Rightarrow$ elhagyjuk

Ha $\nexists \begin{array}{c} 100 \dots 0 \ 0 \\ \text{(főleges sor)} \end{array} \neq$ megoldás $\Rightarrow$ STOP

$\rightarrow$ lépés aláh

II. fázis "felé lépés" (vezetős felől mindent 0-val töltesz)

$\rightarrow$ Redukált lépés aláh

Ha lehet egyértelmű/nem egyértelmű; szabad paraméter

4)

baszja - elrendelés: $n \times n$ -es szimmetrikus táblázat, hogy ne isseki egymást
 a db baszja elhelyezése: $n(n-1) = 2 \cdot 1 = n! - 1$ - képlet

Minden baszjakegyesthet az $1, 2, \dots, n$ natumok egy
 permutációja tartozik. A $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ permutációk
 inverzióinak definíció szerint asorok az $1, 2, \dots, n$ natumok
 körül valószínűségi natumokhoz a natum, amelyre $\pi(i) = j$
 szerint valószínűségi sorrendben megjelölve a permutációban (vagy
 feltérletén) (gyakorlat után), vagyis amelyek inverzióban állnak
 egymáshoz. I jelöli a megfelelő permutációk inverzióinak.

Determinátus def:

$$\det A = \sum_{\pi \in \text{perm}} (-1)^{I(\pi)} \prod_{i=1}^n a_{i, \pi(i)}$$

↑
a adott permutációhoz
tartozó inverzió száma

Pl.: $\pi(1)=2$
 $\pi(2)=4$
 $\pi(3)=1$
 $\pi(4)=5$
 $\pi(5)=3$

24153
 ↳ inverzió száma: 4
 (12 14 34 35)

Alapul:

1)

Alsó háromszög
 mátrix (pálya
 fölött 0)

$$i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

Felső háromszög
 mátrix (pálya
 alatt 0)

$$i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

$$\Rightarrow \det = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

Biz: inverzió natum 0, a többi tag pedig mind 0.

2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \rightarrow A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow \det A' = \det A$$

3) Ha $\exists i$, hogy $a_{i1} = a_{i2} = \dots = a_{in} = 0 \Rightarrow \det A = 0$

4)

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

Biz: $\sum_{\pi} (-1)^{I(\pi)} (a_{1, \pi(1)} + b_{1, \pi(1)}) \prod_{i=2}^n a_{i, \pi(i)} = \sum_{\pi} (-1)^{I(\pi)} [a_{1, \pi(1)} \prod_{i=2}^n a_{i, \pi(i)} + b_{1, \pi(1)} \prod_{i=2}^n a_{i, \pi(i)}]$

(Bal oldalból indulunk ki...)

Megkapjuk a jobb oldalt: $\det(A+B) = \det A + \det B$ ✓

5) Ka let ser arous $\Rightarrow \det = 0$ Biz: ~~fullat~~ * (ev. lap)

~~delekt. lapjait~~ ~~felváltva let~~ ~~szállt~~ $\Rightarrow$ ~~számszor~~ ~~a~~ ~~számszor~~

~~lapjait, det sem változik, másfelől a det (váltás) megváltozik~~

~~Tekint a det arous a saját ellentettével, azaz csak nulla.~~

6.) $(i.\text{sor}) + \lambda (j.\text{sor}) \rightarrow i.\text{sor}$

$$i \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + \lambda a_{j1} & a_{i2} + \lambda a_{j2} & \dots & a_{in} + \lambda a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A$$

$\text{let} = \text{új matrix}$
 $\det = \text{regi det.}$

biz:

$$\det \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{j1} & \lambda a_{j2} & \dots & \lambda a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} =$$

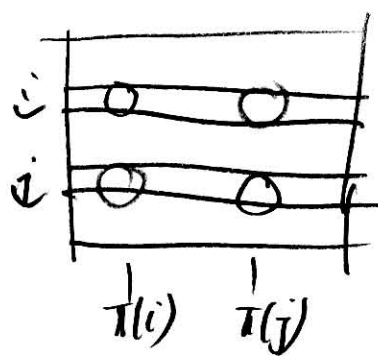
$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \lambda \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{j1} & \lambda a_{j2} & \dots & \lambda a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

7) $\det \begin{vmatrix} i-ic & \\ j-ic & \end{vmatrix} = -\det \begin{vmatrix} j-ic & \\ i-ic & \end{vmatrix}$ 0 (let sor arous)

biz: $\det \begin{vmatrix} (i-ic) + (j-ic) & \\ j-ic & \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} (i-ic) + (j-ic) & \\ -(i-ic) & \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} j-ic & \\ -i-ic & \end{vmatrix} =$

$$= -\det \begin{vmatrix} j-ic & \\ i-ic & \end{vmatrix}$$

4) Ha két sor azonos $\Rightarrow \det = 0$



Palha tudom alligani a ket:

$$(-1)^{I(\pi)} a_{1, \pi(1)} \cdot a_{2, \pi(2)} \cdots \underbrace{a_{i, \pi(i)}}_{\times} \cdots \underbrace{a_{j, \pi(j)}}_{\times} \cdots a_{n, \pi(n)}$$

$$(-1)^{I(\pi')} a_{1, \pi(1)} \cdot a_{2, \pi(2)} \cdots \underbrace{a_{i, \pi(j)}}_{\times} \cdots \underbrace{a_{j, \pi(i)}}_{\times} \cdots a_{n, \pi(n)}$$

$$\begin{matrix} \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \underbrace{\pi(i)} & \cdots & \underbrace{\pi(j)} & \cdots & \pi(n) \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \underbrace{\pi(j)} & \cdots & \underbrace{\pi(i)} & \cdots & \pi(n) \end{matrix}$$

Ha két permutáció egyetlen pár cserejével átvihető egymásba, akkor inverziószámuk páros különbsége.

Gauss-algoritmus

Det-érték

- 1) 1 $\rightarrow$ 2) 1
- 2) $i+j$ $\rightarrow$ 6) =
- 3) sorok $\rightarrow$ 7) (-1)
- 4) (0-0) $\rightarrow$ 3) = 0

Eigenértéknek egyenletének megoldható $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Ha egyenlet:

$$\left. \begin{matrix} 0 \cdots 0 \mid 0 \\ 0 \cdots 0 \mid \neq 0 \end{matrix} \right\} \det = 0$$

all: $\det A^T = \det A$

BLA: $BLA \dots$

⑧ Kijegyzeti kettő. Első lap. (Köv.)

Matrixok

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qn} \end{pmatrix} \quad A \in \mathbb{R}^{(l \times n)}$$

Def: Legyen T egy kommutatív K -st és a, n adott pozitív egészek. Ekkor a T K -st feleltti $l \times n$ -es matrixon egy olyan táblázat alakú táblázatot értünk, amelynek l sora és n oszlopa van és amelynek elemei T -ből valók.

$$A_{l \times n} = B_{l \times m} \quad \text{ha} \quad l = l \quad \text{és} \quad \forall i, j \text{-re} \quad a_{ij} = b_{ij}$$

$$A, B \in \mathbb{R}^{l \times n} \Rightarrow A + B \in \mathbb{R}^{l \times n}$$

$$A + B = C; \text{ ahol } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\lambda A = D \quad d_{ij} = \lambda a_{ij} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

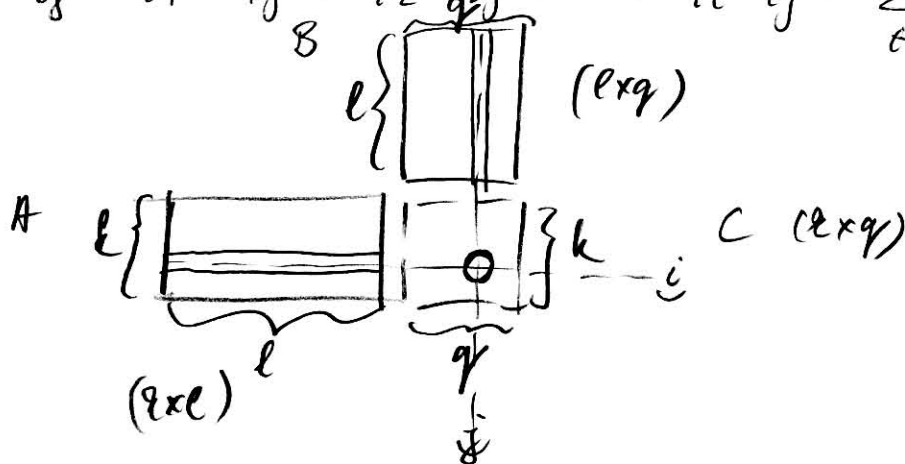
} Az összes $\mathbb{R}^{l \times n}$ matrixok lin. vektorteret alkotnak a 0 -t tartalmazó vektortel.

Matrixok szorzása:

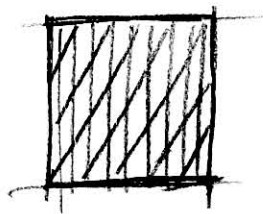
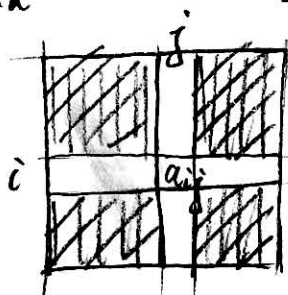
$$A_{(l \times l)} \cdot B_{(p \times q)} \quad \text{csak akkor lehetséges, ha} \quad l = p;$$

$$\text{a végeredmény } A \cdot B = C_{(l \times q)}$$

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{il} \cdot b_{lj} = \sum_{t=1}^l a_{it} \cdot b_{tj}$$

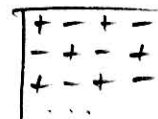


$A^{n \times n} \longrightarrow A'^{(n-1) \times (n-1)}$



(A -ból elhagyottuk az i -edik sort és a j -edik oszlopot...)

előjeles aldeteminálás: $A_{ij} = \underbrace{(-1)^{i+j}}_{\text{altáblanabály}} \cdot \det A'$



all.: $\det A = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$

bit:

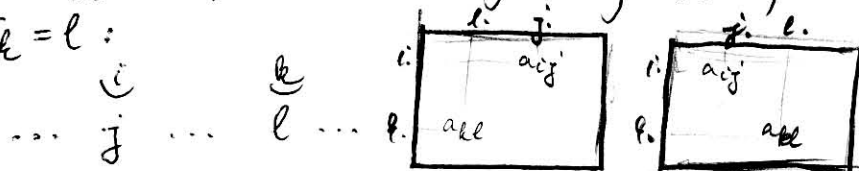
$\det A = \sum_{\pi \in \Pi} \pm \prod_{k=1}^n a_{k, \pi(k)} = a_{i1}(\dots) + a_{i2}(\dots) + \dots + a_{in}(\dots)$

($n-1$)-típusú sorokat előjeles összege: az i -edik sor és a j -edik oszlop kivételével az A minden további sorából és oszlopából pontosan egy elemet tartalmazunk, vagyis:

$(\dots) = A_{ij}^{(n-1) \times (n-1)}$, de lesz kell még látni, hogy minden n -típusú sorok ugyanazt az előjelet kapják a megfelelő átirakítás során.

Jelölés: $(-1)^I$; egy adott bástyaelhelyezésben szereplő elemek sorokához tartozó előjel, ahol I jelöli a megfelelő permutáció inverziószámát.

Hogyan kapjuk meg a permutáció felírása nélkül egy sorat előjelet? Pl. a_{ij} és a_{kl} szerepelnek a bástyaelhelyezésben, akkor $\pi_i = j$ és $\pi_k = l$:



Ha j és l inverzióban állnak, akkor $j > l$ (vagyis a_{ij} és a_{kl} EK-DNY pozícióban vannak egymáshoz képest.)

Ha nem állnak inverzióban, akkor $j < l$ (vagyis ENT-DK...)

Ezt felhasználva: $\det$ def. előjel. szabály (gy is fogalmazható: egy n -típusú sorokhoz tartozó előjel $(-1)^I$, ahol I jelöli a megfelelő bástyaelhelyezésben az elemek körül kiválasztását)

egymással EK-DNY posztionon álló párok nálnak.

Teljesen vissza a kifejt. t. bit-ra. Vallamunk egy

$a_1\pi_1 \cdot a_2\pi_2 \cdot \dots \cdot a_n\pi_n$ (*) sorokat:
 ugyanazt az előjelet kapja-e a def. ill. a kifejtés kiel nem?

EK-DNY, nálna egyen I.

T.f.h. (*) sorok az $a_{ij}A_{ij}$ tagok sorozat (ugyis $\pi_i = j$ és a kifejtés kélt vagy az i -edik sor, vagy a j -edik oszlop általmarok). Ekkor az előjelet befolyatolja:

• szaktáblanabály, ill.:

• A_{ij} -ben $(a_1\pi_1 \cdot \dots \cdot a_{i-1}\pi_{i-1} \cdot a_{i+1}\pi_{i+1} \cdot \dots \cdot a_n\pi_n)$ (**) soroktól tartozó előjel. Utóbbi legyen $(-1)^F$, ahol F most a (**) soroknál megfelelő bástyaelhelyezések jelöl. az EK-DNY pr.-ban álló párok nálnak.

	$\pi_i = j$					
	<table><tr><td>p darab</td><td>q darab</td></tr><tr><td>r darab</td><td>a_{ij}</td></tr></table>	p darab	q darab	r darab	a_{ij}	
p darab	q darab					
r darab	a_{ij}					

(**) bást a_{ij} elemek körülkerítve (*)-köl.
 ezért F mindig párosnak I-nél, amennyi EK-DNY pr.-ban álló elemeknél a_{ij} sorozat.
 Ábra: p, q, r a megfelelő részek előjele (*) bástyaelhelyezések tartozó elemek nálna. Ekkor a_{ij} éppen $q+r$ darab elemmel áll körülkerítve.

$$F = I - (q+r).$$

Vé.h.: az első $i-1$ sor mindegyikében pontosan egy elem szerepel a bástyaelhelyezések, ezért $p+q = i-1$. Hasonlóan:

$$p+r = j-1.$$

$$\hookrightarrow q+r = i+j - (2p+2)$$

Behely: $F = I - (i+j) + 2(p+1)$

$\hookrightarrow$ a kifejt. kélt szerinti nálnaknál a (*) sorok előjele:

$$(-1)^{i+j} \cdot (-1)^F = (-1)^{i+j} \cdot (-1)^{I - (i+j) + 2(p+1)} = (-1)^I \cdot (-1)^{2(p+1)} = (-1)^I.$$

Es valóban megegyezik a (*) def. szerinti előjelekkel, amivel a kélt beláttuk. ✓

⑤ Tétel.

(i) $\forall A, B, C \in T^{k \times n} \text{ -re } (A+B)+C = A+(B+C), A+B = B+A,$

(ii) $\exists \underline{0}, \text{ hogy } \forall A: A+\underline{0} = \underline{0}+A = A$

(iii) $\forall A \text{ -kor } \exists -A: A+(-A) = (-A)+A = \underline{0}.$

$A, B \in T^{k \times n}, \lambda, \mu \in T$ esetén:

$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A; \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B; (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A); 1A = A$

ahol $1 \in T$ test egyezelme (azaz $\forall \lambda \in T \text{ -re } 1\lambda = \lambda 1 = \lambda$)

Állítások:

$\lambda \in T$ és A, B, C ketn. mátrixok, melyekre ért. van:

I.) $A(BC) = (AB)C$ (asszociativitás)

II.) $A(B+C) = AB+AC$

$(A+B)C = AC+BC$

(distributivitások)

(mátrix),
vagyis nem
kommutativ
volta miatt.

III.) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

Biz. I., legyen $A \in T^{k \times n}, B \in T^{n \times r}, C \in T^{r \times t}$, ekkor

$M = A(BC)$ és $N = (AB)C$ is $k \times t$ -es

könnyű látni M , illetve N i -edik sorának j -edik elemét,
 μ_{ij} -t, illetve ν_{ij} -t, legyen $D = BC$. Ekkor:

$\mu_{ij} = \alpha_{i1} \delta_{1j} + \dots + \alpha_{in} \delta_{nj} = \alpha_{i1} (\beta_{11} \gamma_{1j} + \dots + \beta_{1r} \gamma_{rj}) +$
 $\dots + \alpha_{in} (\beta_{n1} \gamma_{1j} + \dots + \beta_{nr} \gamma_{rj})$

vagyis

$\mu_{ij} = \sum_{1 \leq u \leq n, 1 \leq v \leq r} \alpha_{iu} (\beta_{uv} \gamma_{vj})$

Hasonlóan $\nu_{ij} = \sum_{1 \leq u \leq n, 1 \leq v \leq r} (\alpha_{iu} \beta_{uv}) \gamma_{vj}$ ~~.....~~

Mivel T -ben a szorzás asszociativ, így $\mu_{ij} = \nu_{ij}$ ✓

IV.) $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$
 $B, C \in \mathbb{R}^{k \times l}$

$x_{ij} = \sum_{t=1}^k a_{it} (b_{tj} + c_{tj}) =$

$= \left[\sum_{t=1}^k a_{it} b_{tj} + \sum_{t=1}^k a_{it} c_{tj} \right]$

III, - - ✓

$$\hookrightarrow AB \neq BA$$

$$AB=0 \not\Rightarrow A=0 \vee B=0$$

$$\text{Für } A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ ist, also } AE = EA = A$$

E : $n \times n$ -s egyes mátrix.

Determinánsok szorzata

$$\text{Ha } A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}: \det(A \cdot B) = (\det A)(\det B)$$

⑥

$$E_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad \forall A_{n \times n} - \text{re} \quad AE = EA = A \quad \text{mátrixszorzás egységelem}$$

Ha $A_{(n \times n)}$ és $\exists$ olyan $X_{(n \times n)}$, hogy $AX = XA = E$, akkor X -et az A inverzének nevezzük. (A és X egymás inverzei)
Jel: $X = A^{-1}$

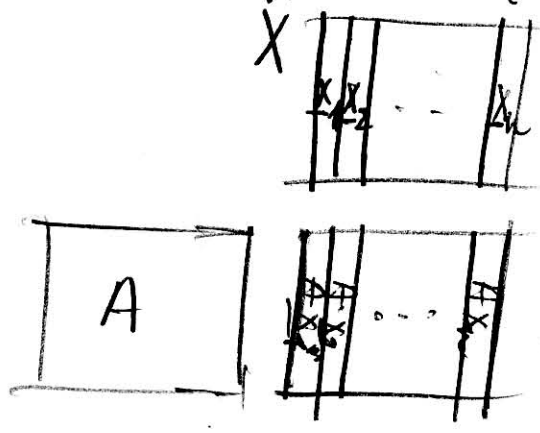
Lehet $A_{n \times n}$: $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$

Biz. $\Rightarrow AX = E$

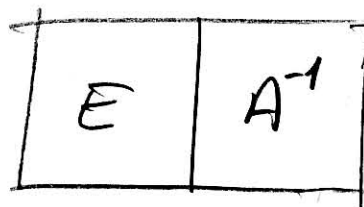
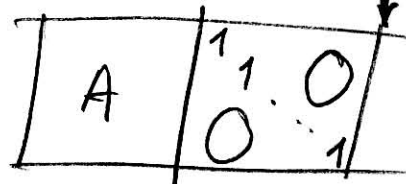
$$\det A \cdot \det X = \det E = 1 \neq 0$$

$\Leftarrow A^{-1} \exists \Leftrightarrow \forall i$ -re megoldható:

Legyen $Ax_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = e_i$



$$\rightarrow Ax_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad Ax_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \dots \quad Ax_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$



Körüljárás lehetősége, hogy $\det \neq 0$
Ha $\det A \neq 0$, akkor megoldható, tehát $\exists A^{-1}$

$\Leftarrow$ meg: Ha $\det A \neq 0 \Rightarrow$

$\exists Y_{n \times n}$ is, melyre $YA = E$ és $X = X$.

biz. $X = EX = (YA)X = Y(AX) = YE = Y \quad \checkmark$

A, B mindkettő invertálható $\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$(AB)X = E$

$BX = A^{-1}$

$X = B^{-1}A^{-1}$

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$

A onleprangs $r_o(A)$ az A oszlopreklorai kónt a lin. fflenez max. ndm, vagyis az A oszlopreklorai által generált altér dimenziója.

A sorangs $r_s(A)$ - - sorpreklorai - -
vagyis - -

A determinatursangs $r_d(A)$ az a legnagyobb k stakn, melyre létesek A -ban $k \times k$ -as nemnulla determinatúr-szűzetes nezmatrix.

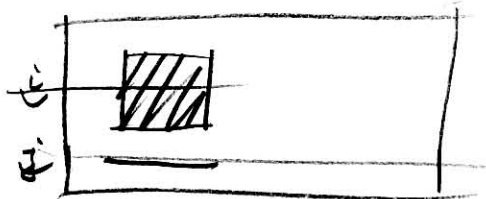
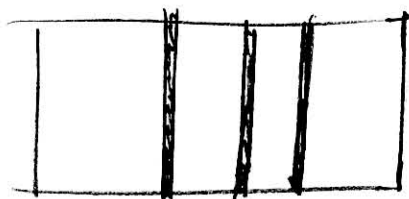
Alt: $\forall A$ -ra $r_o(A) = r_s(A) = r_d(A) [= r(A) = \text{a matrix rangja}]$

Biz: $\exists$ kell látni, hogy $r_o(A) = r_d(A)$, ekkor már követelű, hogy $r_s(A) = r_d(A)$, hiszen $r_s(A) = r_o(A^T) = r_d(A^T) = r_d(A)$.

$r_o(A) = r_d(A)$ -kor kell:

Gauss-clim. során a 4-féle sor - divalens lépésnél:

- | | |
|---|--|
| (1) $\lambda \cdot \underline{\quad}$ $\lambda \neq 0$ | } sem $r_o(A)$, sem $r_d(A)$ nem változik, és az RLA-ban mindkettőt a vezéregyel náma alja. |
| (2) $\begin{matrix} \lambda & \xrightarrow{\quad} & \lambda \cdot \underline{\quad} \end{matrix}$ | |
| (3) sorcsere | |
| (4) $(0 \dots 0)$ elhagyása | |



Oszlopang nem vált: onlepr lin ffleneget kell vizsgálai; haugget lin. egy-rendű, együttthatómatrika, az er. mx.-nak a rendezes onlepreklorai dld rezmatrixa. $\exists$ -e nemtriv mo./nem nem vált. a lépésel során $\checkmark$

Determinatursangs nem vált. : (1), (3), (4) $\checkmark$

(2)-nél: elég belátni, hogy $r_d(A)$ nem nő: hiszen skalársorzást szimultánul (visszaemelésig): az eredeti matrixot kapjuk vissza $\rightarrow$ mindkét lépéslen csak egyenlőség állhat fenn.

$\otimes$

⑥ $\lambda \cdot \vec{e}_j$ sorok a det. rang nem nő. Legyen A' aldet. a hsf. előt, után: A'' . • Ha A' -ben nincs a j -edik sor, akkor $\det A' = \det A''$, vagyis akkor 0 az aldet, ha előzőleg is nulla volt. • Ha A' tartalmazza a j -edik sort, akkor a j -edik sor szerint kifejtve A'' -t azt kapjuk, hogy $\det A'' = \det A' + \lambda \cdot \det A^*$, ahol A^* -ot úgy kapjuk A' -ből, hogy a j -edik sort helyettesítjük az i -edikkel. A^* vagy A' -ben tartalmazza az i -edik sort $\Rightarrow \det = 0$, vagyis determinátusa (előjel^ű eltérítve) megegyezik az A' aldet. determinátussal, amiből akkor kapunk, ha a j -edik sor helyett az i -ediket választjuk. Azt kapjuk tehát, h. a transz. előt $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ -as aldet 0 volt, akkor ez így lesz a sorokzáradás után is. Ha levezett egy nemnulla $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ méretű aldet. determinátus, akkor eredetileg is volt ilyen. ✓

⑥ * Tj-l. A 3. sorakor az 1. sor λ -szorzattal adtuk hozzá, a kapott mátrix egyen B. Kell $\text{rd}(B) \leq \text{rd}(A)$, ehhez: ha A-ban $\neq$ $h \times h$ -as aldetermináns 0 $\Rightarrow$ B-be is képzünk. Vagyis B-be egy h -adrendű D aldetermináns.

1) D-ben nincs B 3. sora $\Rightarrow D$ A-nál is addet $\Rightarrow 0$

2.) D-ben B A. és 3. sora is $\Rightarrow (\text{utolsó} - \lambda \cdot \text{első})$: D nem vált, mivel A-beli aldetekes juttunk $\Rightarrow D = 0$

3.) D-ben B 3. sora, de 1. sor nem:

Allyuk D pl. B első h oszlopából és 2., 3., ..., $h+1$ -edik sorából;

Ezért:

$$D = \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2h} \\ x_{31} + \lambda x_{11} & x_{32} + \lambda x_{12} & \dots & x_{3h} + \lambda x_{1h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{h+1,1} & x_{h+1,2} & \dots & x_{h+1,h} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_{21} & \dots & x_{2h} \\ x_{31} & \dots & x_{3h} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{h+1,1} & \dots & x_{h+1,h} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} x_{21} & \dots & x_{2h} \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{h+1,1} & \dots & x_{h+1,h} \end{vmatrix} = D_1 + \lambda D_2.$$

D_1 A-nál egy h -adrendű aldet -a $\Rightarrow 0$

D_2 (értékes) sorozatból általában kaptunk egy ilyen aldeterminánst, $\Rightarrow 0$

$$D = 0 \checkmark$$

RLA-ban legyen a vesztégyezési mátrix r . Amennyiben 0 sorok vannak: feltételezhetjük RLA-ban sorok vannak és r . ~~Előfeltétel~~ (egyik rang sem lehet r -nél nagyobb). A vesztégyezési tartalmú sorokból r_1 és r_2 -es egyezményt állapítunk $\Rightarrow$ lin. független, első képzett aldet nem nulla (ha nem 1) $\Rightarrow$ mindkét rang $= r$.

7.

$$A^{n \times n}, \underline{x}^{(n \times 1)} = \underline{b}^{(n \times 1)}$$

$$\begin{array}{c|c} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qn} \end{matrix} & \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + \dots + a_{qn}x_n = b_q \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ b \in \mathbb{R}^{n \times 1} \end{array} \right\}$$

$(A|b)$ lin. egyenletrendszer megoldható

$\Updownarrow$
 $A\underline{x} = \underline{b}$ „matrixegyenlet” megoldható

$$\underline{b} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{q1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{q2} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{qn} \end{pmatrix}$$

Spec, ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$(A|0)$ lin. egyenletrendszer egyszerűen megoldható

$\Updownarrow$
 $A\underline{x} = \underline{0}$ matrixegyenlet egyszerűen megoldható

$\Updownarrow$
 A nullovektort lin. f. ként

$$\Updownarrow$$

 $\det A \neq 0$

$\Updownarrow$
 A szinguláris
lin. f. ként.

⑦ Determinálás: ld. korábbi tétel.

all: az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektorek által generált $\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle$ altér dimenziója az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektorendnek rangja.

bit: Legyen pl. $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r$ egy max. elemzimeni gyfken rendnek. Ekkor ez biztosan alt $W = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r \rangle$ -ben. A gyfkeneg jelzint, Ekkor: $W \nsubseteq$ eleme jelzható $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r$ lin. kombinációjaként. Ezt eleg W generátorelemek megnntatani. Itt-e az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r$ vektorekben $\underline{a}_i$ -t kivalvele ez az $r+1$ vektor már benne van if. $\Rightarrow \underline{a}_i \in \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r \rangle$

all: egy lin. egyenletrendnek az oldható meg, ha az együtthatómatrix rangja megegyezik a kibővített matrix rangjával.

bit: $x_1 \underline{a}_1 + \dots + x_n \underline{a}_n = \underline{b}$, ahol $\underline{a}_i$ az együtthatómatrix i -edik oszlop;

megoldható

$$\Downarrow$$

$$\underline{b} \in \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle$$



$$\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b} \rangle$$

(Ekkor altér pontosan akkor egyenlő, ha kiegészíten tartalmasságk egyenlő generátorait)
Itt a bal oldali altér része a jobb oldalinak, és mindkettőnek véges dimenziósak, ezért (teljes) pontosan akkor egyenlő, ha a dimenziójuk megegyezik, azaz.

$$\dim \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle = \dim \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b} \rangle$$

Ebből teljes alapján: a két vektorendnek rangja egyenlő. Ez a két rang éppen az együtthatómatrix, ill. a kibővített matrix (oszlop) rangja. ✓

Előlekedés a lineáris algebrahoz.

all.: $r_0(A) = \dim \langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k \rangle$

biz.: $r := r_0(A) \rightarrow r$ db. lin. f. llen. oszlopvektor

$\exists$ A-ban. pl. eset: $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_r$ (a minimális számú vektor). Tekintve $i > r - r$ $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_r, \underline{a}_i$ lin.

if. less $\Leftrightarrow \underline{a}_i \in \langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_r \rangle = W$, és a W pedig

egyenlő $\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k \rangle$ -vel, ugyanis:

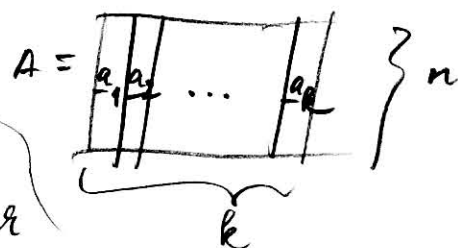
- $W \subseteq \langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k \rangle$, ez triviális
- Ha nem lenne egyenlő, akkor

$$\exists \underline{x} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \underline{a}_i = \underbrace{\lambda_1 \underline{a}_1 + \dots + \lambda_r \underline{a}_r}_{\in W} + \sum_{i=r+1}^k \lambda_i \underline{a}_i \in W \quad \text{!}$$

(W -t tekintve $\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r \rangle$ és $\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \rangle$ is, tehát ha a két dimenzió nem egyenlő, akkor lenne olyan $\underline{x}$ vektor, amely nem áll elő $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r$ lin.

comb-ból, bár ha figyelembe vesszük $\sum_{i=r+1}^k \lambda_i \underline{a}_i$ -vel; de

~~ez egyenlő W -vel, mert $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r$ min. számú vektor~~ ugyanis ezek W -nek, ami elemtér, hiszen $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r$ annál sokabb.



$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n;$

$A\underline{x} = \underline{b}$ megoldható $\Leftrightarrow \underline{b} \in \langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \rangle$

$\underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \dots + \underline{a}_n x_n = \underline{b}$

$\Leftrightarrow r(A) = r(A|\underline{b})$

(r nem 0-elemű és r nem less megoldás...)

(8.)

Def: Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon T kommutatív test feletti vektorterek. A V_1 -ről V_2 -be ható $\mathcal{A}$ függvény (homomorfizmus) lineáris leképezésnek nevezzük, ha művelettartó, azaz

$$(i) \quad \forall u, v \in V_1 \text{-re } \mathcal{A}(u+v) = \mathcal{A}u + \mathcal{A}v;$$

$$(ii) \quad \forall u \in V_1, \lambda \in T \text{-re } \mathcal{A}(\lambda u) = \lambda(\mathcal{A}u).$$

Spec. eset: $V_1 = V_2$: lineáris transzformáció

Fon. es. példák: Legyen $A_{k \times n}$; $\mathcal{A}(x) = A \cdot x$ lin. lek.

$$\bigcirc_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \bigcirc_{\mathbb{R}^k}$$

$$\begin{aligned} \text{Biz: } \mathcal{A}(x+y) &= A(x+y) = Ax + Ay = \\ &= \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y) \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda \cdot \mathcal{A}(x)$$

Tulajdonságok: Tetsz. $\mathcal{A}$ lin. lek.-re:

$$(1) \quad \mathcal{A}(\underline{0}) = \underline{0}$$

$$(2) \quad \mathcal{A}(-x) = -\mathcal{A}(x)$$

$$\text{Biz: } (2) \quad \mathcal{A}(-x) = \mathcal{A}((-1)x) = (-1)\mathcal{A}(x) = -\mathcal{A}(x)$$

$$(1) \quad \underline{0} = -\underline{0} \Rightarrow \mathcal{A}(\underline{0}) = -\mathcal{A}(\underline{0}) \Rightarrow \mathcal{A}(\underline{0}) = \underline{0}$$

Ha $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ bázis V -ben és ismerem $\mathcal{A}: V \rightarrow W$ lin. lek. hatását ezekre a vektorokra $\Rightarrow$ mindenképp ismerem

$$\text{Biz: } \underline{w}_1 = \mathcal{A}(\underline{b}_1); \underline{w}_2 = \mathcal{A}(\underline{b}_2), \dots, \underline{w}_n = \mathcal{A}(\underline{b}_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tetsz. } x \in V \text{-re ha } x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{b}_i \Rightarrow \mathcal{A}(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{A}(\underline{b}_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{w}_i$$

$B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$ bázis V -ben. Ekkor $\forall x \in V$

egyértelműen plírható: $x = \lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 + \dots + \lambda_n \underline{b}_n$ alakban.

Az λ_i skalárok az x -nek B ^{bázis} szerinti koordinátáinak nevezzük.

$\mathbb{R}$ szerinti koordinátavektora x -nek:

$$[x]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Összefoglalás:

V -ben $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$ bázis

W -ben $C = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_k\}$ bázis

$\underline{x} \in V$ -re $[\underline{x}]_B$ az $\underline{x}$ koordinátavektora B szerint.

$A: V \rightarrow W$; $[A(\underline{b}_i)]_C$ egy $k \times n$ -es mátrix

$$\begin{pmatrix} [A(\underline{b}_1)]_C & [A(\underline{b}_2)]_C & \dots & [A(\underline{b}_n)]_C \end{pmatrix} = [A]_{B,C}$$

az A lin.-tér. B és C szerint mátrixa

$$[A(\underline{x})]_C = [A]_{B,C} \cdot [\underline{x}]_B$$

$$[\underline{x}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{b}_i$$

$$\begin{array}{c} \underline{c}_1 \\ \underline{c}_2 \\ \vdots \\ \underline{c}_k \end{array} \begin{array}{c} A(\underline{b}_1) \quad A(\underline{b}_2) \quad \dots \quad A(\underline{b}_n) \\ \hline \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i A(\underline{b}_i) = \lambda_1 (a_{11}\underline{c}_1 + a_{21}\underline{c}_2 + \dots + a_{k1}\underline{c}_k) +$$

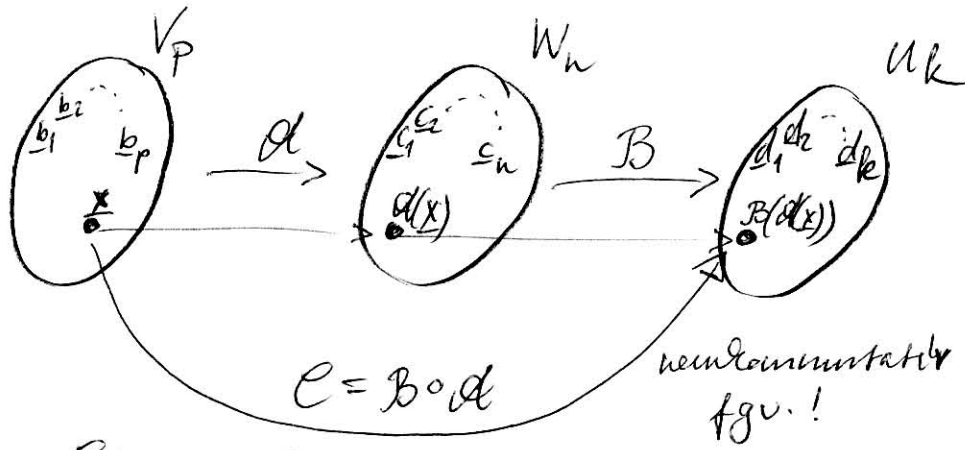
$$+ \lambda_2 (a_{12}\underline{c}_1 + a_{22}\underline{c}_2 + \dots + a_{k2}\underline{c}_k) + \dots + \lambda_n (a_{1n}\underline{c}_1 + a_{2n}\underline{c}_2 + \dots + a_{kn}\underline{c}_k) =$$

$$= (\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \dots + \lambda_n a_{1n}) \underline{c}_1 + (\lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_n a_{2n}) \underline{c}_2 +$$

$$\dots + (\lambda_1 a_{k1} + \lambda_2 a_{k2} + \dots + \lambda_n a_{kn}) \underline{c}_k$$

$$[A(\underline{x})]_C = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} + \dots \\ \lambda_1 a_{21} + \dots \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{k1} + \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \lambda_i a_{1i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_{ki} \end{pmatrix}$$

8.



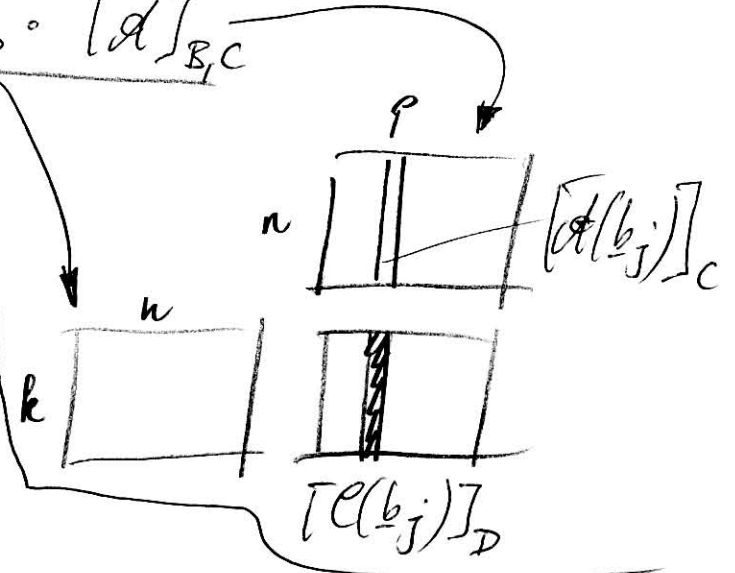
all. $C(x) = B(A(x))$ is lin. lek.

biz: $C(x+y) = B(A(x+y)) = B(A(x) + A(y)) = B(A(x)) + B(A(y)) = C(x) + C(y)$

$\lambda x \dots$ is ✓

all: $[C]_{B,D} = [B \circ A]_{B,D} = [B]_{C,D} \cdot [A]_{B,C}$

biz: $B([A(b_j)]_C) = [(B \circ A)(b_j)]_D$



164. biz: Legyen:

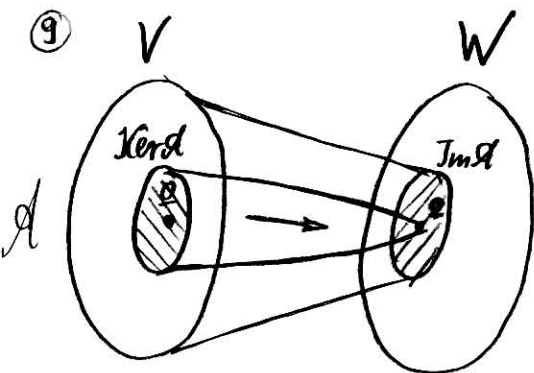
$[B]_{C,D} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{k1} & \dots & \beta_{kn} \end{pmatrix}; [A]_{B,C} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{np} \end{pmatrix}$

all: $[C(b_j)]_D = [(B \circ A)(b_j)]_D$ i-edik coord-ja egyenlo $[B]_{C,D}$ i-edik sorának es $[A]_{B,C}$ j-edik oslopának szorzataval:

$[(B \circ A)(b_j)]_D = B([A(b_j)]_C)_D = B[\alpha_{1j}c_1 + \dots + \alpha_{nj}c_n]_D = \alpha_{1j} \cdot [B(c_1)]_D + \dots + \alpha_{nj} \cdot [B(c_n)]_D = \alpha_{1j}(\beta_{11}d_1 + \dots + \beta_{k1}d_k) + \dots + \alpha_{nj}(\beta_{1n}d_1 + \dots + \beta_{kn}d_k) = (\alpha_{1j}\beta_{11} + \dots + \alpha_{nj}\beta_{1n}) \cdot d_1 + \dots + (\alpha_{1j}\beta_{k1} + \dots + \alpha_{nj}\beta_{kn}) \cdot d_k$

Itt d_i egyittkatoja $(\alpha_{1j}\beta_{11} + \dots + \alpha_{nj}\beta_{1n})$, ami teluleg a megfelelo sor-onlop szorzat.

9



$\text{Im } A = \{x \mid x \in W; \exists y \in V, \text{ melyre } A(y) = x\}$
 az A képeinek halmaz ($\subseteq W$)
 $\text{Ker } A = \{z \mid z \in V; A(z) = 0\}$ az A magja ($\subseteq V$)

Tétel: ezek altérak $\neq \emptyset$
 univerzálisan $(\cdot, +)$

- biz:
- $\text{Im } A \neq \emptyset$, hisz $A(0) \in \text{Im } A$
 $\text{Ker } A \neq \emptyset$, hisz $A(0) = 0 \Rightarrow 0 \in \text{Ker } A$
 - $\forall z_1, z_2 \in \text{Ker } A \Rightarrow A(z_1 + z_2) = A(z_1) + A(z_2) = 0 + 0 = 0$
 λ -val...
 - $\forall x_1, x_2 \in \text{Im } A \Rightarrow \exists y_1, y_2 \in V$, hogy $A(y_1) = x_1$ és $A(y_2) = x_2$
 ekkor $A(y_1 + y_2) = A(y_1) + A(y_2) = x_1 + x_2 \in \text{Im } A$
 skalármultiplika...

Példák

A	$\text{Ker } A$	$\text{Im } A$	
$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (r. 2x-re csúszás)	$\{0\}$	$\mathbb{R}^3$	$0+3$
$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$	$\{0, 0, z\}$	$\{(x, y, 0)\}$	$1+2$
$\mathbb{R}^{100} \rightarrow 0$	$\mathbb{R}^{100}$	$\{0\}$	$100+0$

Értekezési tétel

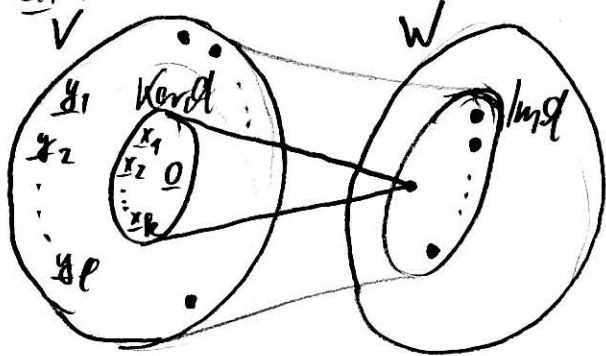
$\forall x_1, x_2, \dots, x_k$ lin. f. t. V -ben $\Rightarrow$ ezek kiegészíthetők
 $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_l$ bázissá ($l \geq 0$)

$\rightarrow$ dim. tétel: báz. lap.

9) Dimenzióképlet:

$$\forall A: V \rightarrow W \text{ lin. lekép. esetén } \underbrace{\dim \operatorname{Im} A}_{\ell - \text{est}} + \underbrace{\dim \operatorname{Ker} A}_{k - \text{est}} = \underbrace{\dim V}_{(k+\ell) - \text{est}}$$

Biz:



$x_1, x_2, \dots, x_k$ bázis $\operatorname{Ker} A$ -ban.

$x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_e$ bázis V -ben

$A(y_1), A(y_2), \dots, A(y_e)$ bázis

$\operatorname{Im} A$ -nak, ugyanis:

1) Gen. rendszert:

Legyen $u \in \operatorname{Im} A$ tetsz. $\Rightarrow \exists w \in V$, melyre $A(w) = u$

$$w = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^e \beta_j y_j; \quad A(w) = \underbrace{\alpha_1 A(x_1)}_{=0} + \dots + \underbrace{\alpha_k A(x_k)}_{=0} + \beta_1 A(y_1) + \dots + \beta_e A(y_e) \quad \checkmark$$

2) Lin. főkén:

T.f.k. $\sum_{i=1}^e \delta_i A(y_i) = 0$

$$A\left(\underbrace{\sum_{i=1}^e \delta_i y_i}_{\in \operatorname{Ker} A}\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^e \delta_i y_i = \delta_1 x_1 + \dots + \delta_k x_k$$

$$\delta_1 x_1 + \dots + \delta_k x_k - \delta_1 y_1 - \dots - \delta_e y_e = 0$$

$$\forall \delta_i = 0$$

$$\forall \delta_i = 0 \quad \checkmark$$

10. Def: lineáris transzformáció... ($A: V \rightarrow V$)

Def: egy $\lambda \in T$ skálárt az A lineáris transzformáció sajátértékének nevezzük, ha létezik olyan $v \in V$ nem nulla vektor, amelyre $A(v) = \lambda v$.

Def: egy $v \in V$ nem nulla vektort az A lineáris transzformáció sajátvektornak nevezzük, ha létezik olyan $\lambda \in T$ skálárt, amelyre $A(v) = \lambda v$.

(de $\lambda = 0$ elhanyagolható)

Def: legyen $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ekkor a sajátvektora egy $x \in \mathbb{R}^n$, ha $x \neq 0$ és $Mx = \lambda x$; és λ a konstans sajátérték

Tétel: Minden sajátvektorhoz csak egy sajátérték tartozik.

Biz.: Ha valamely $v \neq 0$ vektorra λ -val és μ -vel is teljesül $A(v) = \lambda v = \mu v$, akkor ebből $v \neq 0$ miatt $\lambda = \mu$ következik.

Tétel: Ha A lin. tr.-nak λ sajátértéke $\Rightarrow \{x \mid A(x) = \lambda x\} \cup \{0\}$
(λ -hoz tartozó sajátvektorok) V -nek.

Biz: (1) $\neq 0$ ✓

(2) Tfh. x_1 és x_2 ilyen ($A(x_1) = \lambda x_1$ és $A(x_2) = \lambda x_2$)

$$\begin{aligned} A(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \alpha A(x_1) + \beta A(x_2) = \alpha \lambda x_1 + \beta \lambda x_2 = \\ &= \lambda(\alpha x_1 + \beta x_2) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Tétel: ($A: V \rightarrow V$ lin. tr.; $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$)

A -nak λ sajátértéke és v sajátvektora $\Leftrightarrow [A]_B$ mátrixnak λ sajátértéke és $[v]_B$ sajátvektora

Biz.: Baloldal $\Leftrightarrow A(v) = \lambda v \Leftrightarrow [A]_B [v]_B = \lambda [v]_B$ $\Rightarrow$

$$[A(v)]_B = [\lambda v]_B = \lambda [v]_B$$

10. Tétel: egy kvadratikus mátrix aca, diagonális, ha a mátrixot sajátvektorokból álló bázis szerint írtuk fel. Ekkor a főátlóban álló elemek éppen a megfelelő bázisvektorokhoz tartozó sajátértékek.

Biz.:

$$[A]_a = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

partosan akkor
keletkezik, ha

$$A \underline{a}_1 = \lambda_1 \underline{a}_1, \dots$$

$$\dots, A \underline{a}_n = \lambda_n \underline{a}_n.$$

$$M \rightarrow \begin{pmatrix} m_{11} - \lambda & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} - \lambda & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & \dots & m_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = M - \lambda \cdot E$$

Tétel: λ sajátérték M -nek $\Leftrightarrow \det(M - \lambda E) = 0$

Biz.: λ sajátérték M -nek $\Leftrightarrow \exists \underline{x} \neq \underline{0}$, hogy $M \underline{x} = \lambda \underline{x}$
 $M \underline{x} = \lambda E \underline{x}$

$$M \underline{x} - \lambda E \underline{x} = \underline{0}$$

$$(M - \lambda E) \underline{x} = \underline{0} \quad (\underline{x} \neq \underline{0} !)$$

Ez csak akkor teljesülhet
nem triv. m.-a, ha $\det(M - \lambda E) = 0$. ✓

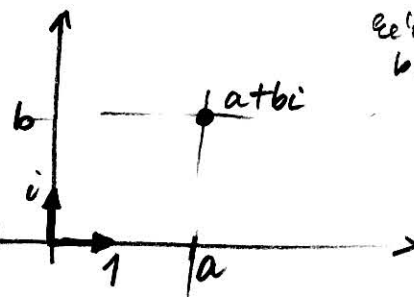
$\det(M - \lambda E)$ az M mátrix karakterisztikus polinomja.

11) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} [\subseteq \mathbb{K}]$

$\swarrow$ komplexek $\swarrow$ számok
 komplexek számok

Sikban ábrázolható; a komplex számok halmara nem rendezhető (relációk $\emptyset$)
 képzetes (imaginárius, imaginary) rész.

$\sqrt{-1} = i$ (negatív négyzetgyök: neg. négyzetes is gyökös van: ...)



vektorok: 1 és i

Def.: $\mathbb{C} = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

$z = a+bi$; $a = \operatorname{Re} z$ (valós rész); $b = \operatorname{Im} z$ (imaginárius/képzetes rész)

Tétel: $z = a+bi$
 $w = c+di$ $\left\{ \begin{array}{l} z = w \Leftrightarrow \{ a=c \text{ és } b=d \} \end{array} \right.$

Biz.: $\Leftarrow$ hiv.

$\Rightarrow$: $(a+bi) = (c+di)$
 $a-c = di-bi = (d-b)i$
 $(a-c)^2 = (d-b)^2 \cdot i^2 = -(d-b)^2$
 $\underbrace{\geq 0} \quad \underbrace{\leq 0}$
 $(a-c)^2 = 0$ és $(b-d)^2 = 0$
 $a=c$ és $b=d$.

$z \pm w = (a \pm c) + (b \pm d)i$

$z \cdot w = ac + di + cbi + bdi^2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$

Ha $c \neq 0, d \neq 0$

$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{\text{skalár} \cdot b'}{\underbrace{c^2+d^2}} \in \mathbb{R}$

$z = a+bi$ konjugáltja: $a-bi = \bar{z}$

Megj.: $z \bar{z} = a^2 + b^2$ (ez mindig ≥ 0 ; $\in \mathbb{R}$)

$\sqrt{z \cdot \bar{z}} = |z|$ a komplex szám abszolútértéke

11) Teljesek:

(1) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(2) ha $w \neq 0$; $\frac{\overline{z}}{\overline{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$

(3) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(4) ha $w \neq 0$; $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$

Biz. (1) Salldal.

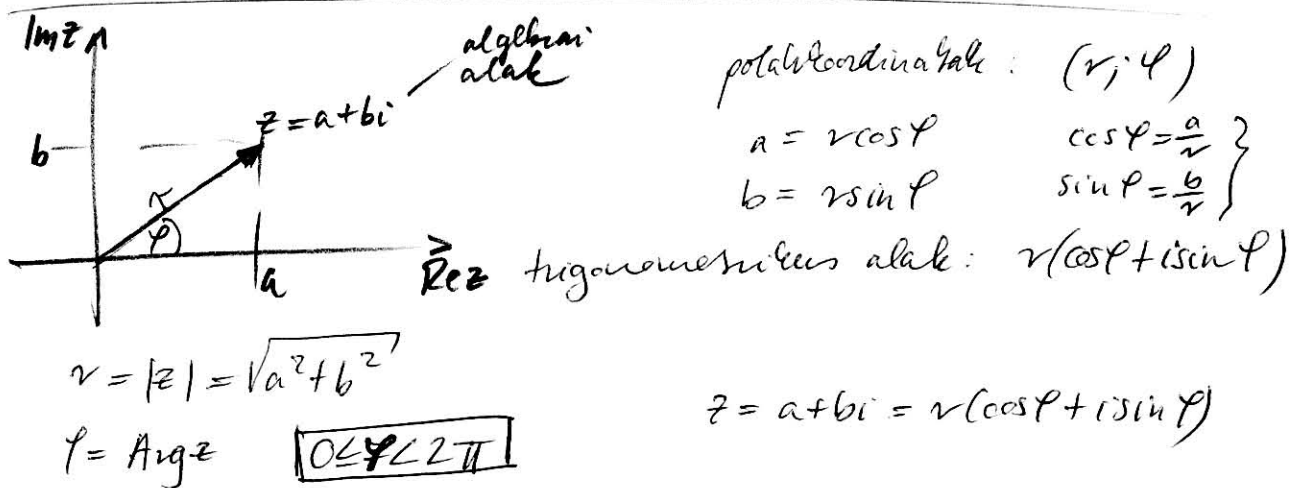
$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i = (ac-bd) - (ad+bc)i$$

J. lldal: $(a-bi)(c-di) = \dots$

(2)(4) hasonl

(3) $\underbrace{(zw)(\overline{z \cdot w})}_{|z \cdot w|^2} = (zw)(\overline{z} \cdot \overline{w}) = z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w} = |z|^2 \cdot |w|^2$

Elb. l. kivekerek, hogy $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, mert ≥ 0 valsak.



Teljes: $z \cdot w = r \cdot s (\cos(\varphi + \mu) + i \sin(\varphi + \mu))$

$\text{Arg } zw \stackrel{?}{=} \text{Arg } z + \text{Arg } w$

VIKARZAT: $[0; 2\pi)$

Biz.: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$w = s(\cos \mu + i \sin \mu)$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= r \cdot s [\cos \varphi + i \sin \varphi] [\cos \mu + i \sin \mu] = r \cdot s \left[\underbrace{\cos \varphi \cos \mu - \sin \varphi \sin \mu}_{\cos(\varphi + \mu)} + \right. \\ &\quad \left. + (\cos \varphi \sin \mu + \sin \varphi \cos \mu) i \right] \\ &\quad \underbrace{\sin(\varphi + \mu)} \end{aligned}$$

I.: $w \neq 0$; $\frac{z}{w} = \frac{r}{s} (\cos(\varphi - \mu) + i \sin(\varphi - \mu))$

I.: $z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$ Moivre-formula

I.: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$ $k=0, 1, \dots, n-1$

Keressük: $n \cdot \alpha = \varphi + 2k\pi$

$\alpha = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$ vigyázat!!! $[0; 2\pi)$

$x^n = z$

ennek n db megoldása van, egyenrangúak a gyökök.

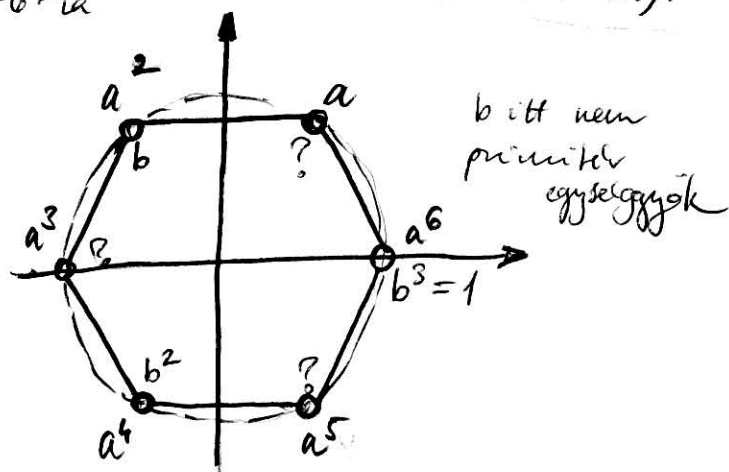
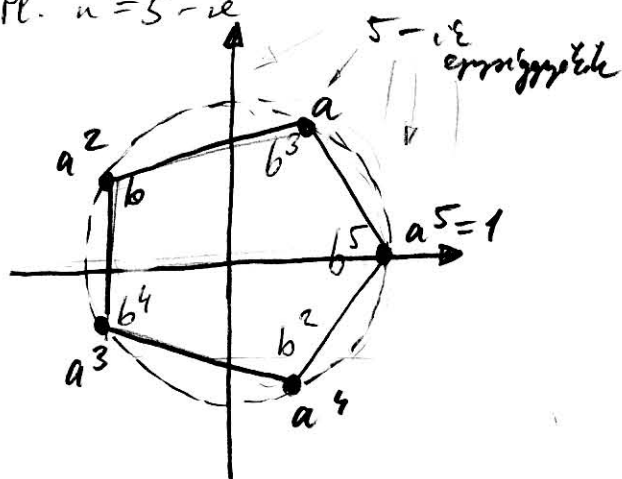
$z^n = 1$

megoldásai: n -ik egységgyökök

Primitív n -ik egységgyök egy olyan $z \in \mathbb{C}$, melyre $z^n = 1$, de $z, z^2, z^3, \dots, z^{n-1}$ mind különböznek (egymástól és n -től).

pl. $n=5$ -re

$n=6$ -ra



Legyen $z = \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$

z primitív $\iff (k; n) = 1$ [Legyen. köztös osztó 1]

Eltérő sorrendje számítás	Sorrend nem számít	Sorrend nem számít
<u>Permutáció</u> (n-ből minden) n elem összes lehetséges sorrendje: (ismételhető nélküli) <u>permutáció</u>: $n(n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$	<u>Variáció</u> (n-ből k-t) n elemből az összes lehetséges sorrendben k darab kiválasztás k- váltata: az n elem k-adomány (ism. nélküli) <u>variáció</u>. Ezek száma: $n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$	<u>Kombináció</u> (n-ből k-t) n elemű halmaz k elemű részhalmazai: n elem k-adomány (ismételhető nélküli) <u>kombináció</u>. Jel: $\binom{n}{k}$. Azaz: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ "n" alatt a "k" egyszerűsítendő Ismétlődő nélküli
k_1 darab első típusú elem, k_2 darab második típusú elem, ..., k_n darab n-dik típusú elem lehetséges sorrendjei a $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ elem <u>ismételhető permutáció</u>: $\frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$	n elemből k-vel lehet k tagú sorokat (egy-egy elem többször is szerepelhet): az n elem k-adomány <u>ismételhető variáció</u>: n^k	n elemből k kiválasztása, ha a sorrend nem számít, de az elemek többször is szerepelhetnek: n elem k-adomány <u>ismételhető kombináció</u>. Számítás: $\binom{n+k-1}{k}$ Ismétlődő

Példák! - Lásd is!

Ismétlődő kombinációra példák

- Érdekben: sikertényez (n-féleből k-t választani ...) - 0 és 1 számjegyekből álló rendezett sorozat. - sorozat k -ből választás

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ -ből:
 $n=3, k=3$
ismételhető megengedett

111 123
112 124
113 125
122 134
123 135
133 145
222 234
223 235
233 245
333 345

minden ismétlődő k-adomány k-adomány

egyszerűsítés

→ ezek $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ -ből vannak
Eddig bebizt. $\leq (n+k-1)$. De: jellemlépték
vissza minden minéliszer a balt: egyszerűen ill
fenn. a fuggvény nemcsak egyszerűen,
hanem egy-egy elemű (bijekció).

Binomiális tétel (Newton-tétel; binom: felbontás' összeg)

Tetszőleges valós a, b -ra és nemnegatív egész n -re:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n}b^n = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\end{aligned}$$

Biz: Bontásuk fel sorban a zárójeleket, mikorban ügyeljünk arra, hogy az összes szorzatban abban a sorrendben írjuk fel, amelyben adódott. A zárójelek felbontása után az a és b elemekből képzhető összes n -edrendű "szorzatos variáció" halmaza, mégpedig pontosan egyet. Minden tagból, amelyikben pontosan k darab a van az n darab szorzatban k darab $\binom{n}{k}$ darab van. Ha tehát összevesszük az ugyanannyi a -t tartalmazó tagokat, akkor megkapjuk az áll-t.

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b) \dots (a+b)}_{n \text{ db. zárójel}}$$

pl. $n=3$ esetén:

$$(a+b)^3 = aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb$$

Pascal-háromszög

Áll.

Szimmetria:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Biz. formula

✓

Biz. kombinatorikusan

egyik fele - másik fele:
csak egy kettőskereszt van szd!

Kelapadási szabály:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

✓

egy elemet kiemelve:
kiválasztom vagy nem
választom ki. (14. 15.)

(12) Gráfelméleti alapfogalmak

Def.: Egy gráf egy rendezett pár, $G = (V, E)$, ahol V egy nem-üres halmaz, E pedig elől a halmazból képezhető párok egy halmaza.

V elemei: pontok, E elemei: élek. Jel.: G gráf; $V(G), E(G)$: G pontjainak/eleinek halmaza; számunk: $v(G), e(G)$

Def.: • $e \in E$ megfelel $\{v_1, v_2\}$ párnak: e végpontjai

• $v_1 = v_2$: körkell

• párhuzamos / többnévű él

• egyszerű gráf

• szimmetrikus élek, pontok

• izolált pont

• pont fokszáma; jel.: $d(v)$; max.: Δ , min.: δ

• 2 -reguláris

• n -pontos teljes gráf; jel.: K_n

Tétel.: $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e(G)$; biz.: $\forall$ élnek 2 végpontja van, $\forall$ élet 2 -szer számoltuk meg.

Def.: $G_1 = (V_1, E_1)$ és $G_2 = (V_2, E_2)$ izomorfak, ha $\exists f: V_1 \xrightarrow{1:1} V_2$ illeszkedéstartó ($\forall x, y \in V_1$ -re vagy $\{x, y\} \in E_1$ és $\{f(x), f(y)\} \in E_2$ vagy $\{x, y\} \notin E_1$ és $\{f(x), f(y)\} \notin E_2$)

lekepezés. Jelölés: $G_1 \cong G_2$.

Def.: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$ sorozat elősorozat, ha $\forall i = 1, 2, \dots, k$ -ra $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$

nyílt, ha $v_1 \neq v_{k+1}$

zárt, ha $v_1 = v_{k+1}$

spec.: út, ha $\forall v_i$ max. egyszer fordul elő

kör.: zárt út ($\forall$ csak egyszer és $v_1 = v_{k+1}$)

Def.: G gráf összefüggő, ha $\forall x, y \in V(G)$ -re $\exists$ elősorozat, melynek x és y az első, ill. utolsó pontja [bárhonnan bárhova el tudok jutni] (nem öf. gráfok komponensei - max. öf. részgráfjai)

Def.: reszgráf: $G'(V', E') \subseteq G(V, E)$ ha $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ és G' is gráf.
 (gyk.: elhagyunk pontokat és a hozzájuk tartozó éleket, vagy éleket is)

semmiért részgráf: $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ úgy, hogy az E' nem tartalmazza G gráf minden, V' belüli pontokat összekötő éle maradjon meg.
 (gyk.: val pontokat és a hozzájuk tartozó éleket hagyunk el.)

Def.: Egy $X \subseteq E$ elhalmast elválasztó elhalmaznak nevezzük, ha az X -beli élek elhagyásával n^o a gráf komponenseinek száma, azaz a gráf több komponense lesz, mint ahányból eredetileg állt.

X vágás, ha elválasztó, de semelyik valódi részhalmaza nem az.
 Az éppen n vágást elválasztó éleknek nevezzük.

~~triviális~~

13. Def: fa: összefüggő körmentes gráf.
erdő: körmentes gráf.

fenyő fa: ~~erő~~ összefüggő gráf részgráfja, fa, és az eredeti gráf minden pontjába el lehet rajta jutni.

Tétel: $\forall$ aj. gráfnak van fenyő faja

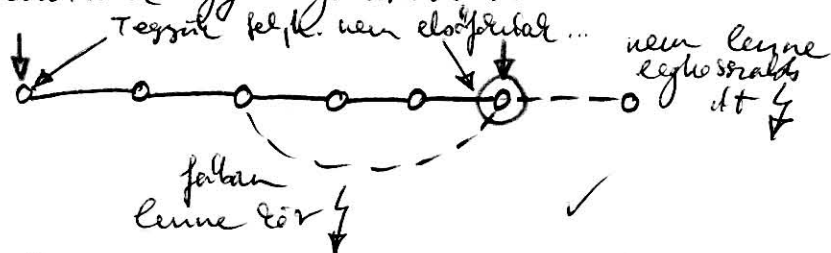
Biz.: Ha az eredeti összefüggő gráf:

(i) fa: keskeny vágás

(ii) ha nem fa: $\exists$ benne kör, egy ilyen körnek egy tetszőleges élét hagyjuk el. Ezt az eljárást folytatjuk egészen addig, amíg nem találunk több kört.

Tétel: $\forall$ falkán lesznek előzőleg pontok (legalábbis két db)

Biz.: Teljtsünk egy leghosszabb utat:



Tétel: $\forall$ falkán $|E| = |V| - 1$

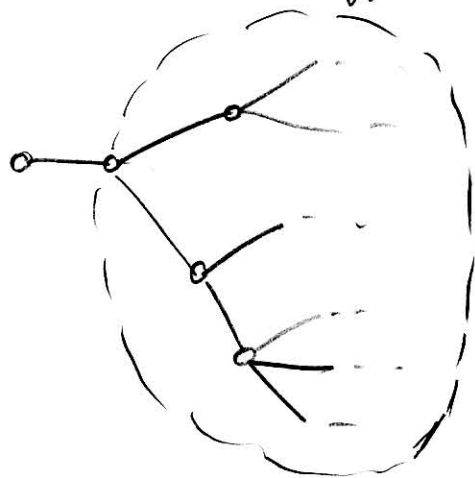
Biz.: Vesszünk egy tetszőleges előzőleg pontot, elhagyjuk a hozzá illeszkedő egyetlen éllel együtt; ezután is fát kapunk...

Ezt ismétlem...

...

Végül:

, a két csomópont pedig nem változott körben.



Kruskal ~~algorithm~~ - algoritmus (es egy másik algoritmus)

Input: cf. G ; $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ (élsúly függvény)

Kérdés: a legolcsóbb fa? (minimális költség?)

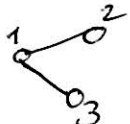
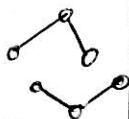
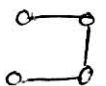
Az elemet egyszerűen választjuk ki a követelések szerint. Először válasszunk ki a gráfból a legkisebb súlyú elem egyikeit. Tegyük fel, hogy már kiválasztottunk néhány elemet. Ekkor válasszuk ki a legkisebb súlyú olyan elem egyikeit, amely nem alkot kört az eddig már kiválasztottakkal. Ha ilyen nincs, megállunk, ha van, akkor ezt az elemet ismételtük.

Kruskal-tétel: ez az algoritmus mindig az egyik legolcsóbb fát választja ki.

De: utazási ügynök - probléma... (legolcsóbb, $\forall$ ponton áthaladó kör?)

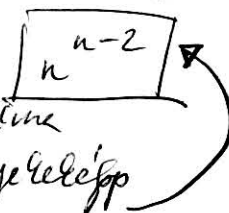
Cayley-tétel, Prüfer-kód

Bev.: Hányféle n -pontú, páronként nem csomós fa létezik?

	$\emptyset$ nalmosva	P_n	előre meghatározott pontok; hogyan kössük, h. fát...?	T_n	
$n=2$		1		1	2
$n=3$		1	 	3	3
$n=4$	 	2	-	16	$12+4=16$ 4^2
$n=5$	-	-	-	125	5^3

P_n = a páronként nem csomós n -pontú fák száma

T_n = n db meghatározott pont közt $n-1$ éllel bármilyen módon lehet fát képezni



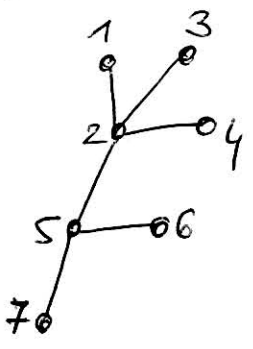
Cayley-tétel: $T_n = n^{n-2}$

13) Prufer-kód

Az $\{1, 2, \dots, n\}$ pontokon adott fahoz rendeljünk egy szám sorozatot a következőképpen. Hagyjuk el a fa előfokú pontjai közül a legkisebb indexűt, és jegyezzük fel a szám sorozatja (a vele összekötött egyetlen pont) indexét. Legyen ez v_1 . Ismételjük az eljárást a maradék fahoz, majd folytassuk egészen addig, amíg csak egy pont marad. Világos, hogy az utolsó pont az n számú. Míg az ezt biztosan nem hagytuk el soha, hiszen mindig legalább két előfokú pont volt, és nyilván nem lehetett a kisebb sorozat az n . Érdet nem is kell, hogy a szám sorozat végén feltüntetjük.

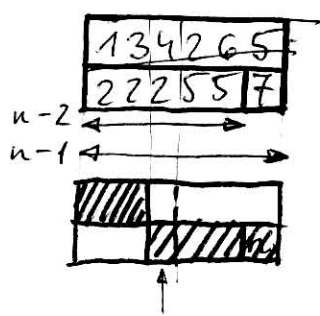
Def.: Az így kapott $v_1, v_2, \dots, v_{n-2}$ sorozatot a fa Prufer-kódjának nevezzük.

Példa:



Prufer-kód: $\begin{array}{c} \xleftarrow{n-2} \\ 22255 \\ \xleftarrow{n-1} \end{array} \big| \textcircled{7}$ nem hordoz információt, elhagyhatjuk.

Rekonstrukció: $n-2$ hosszúságú sorozat n pontú fát kódból
 $\hookrightarrow$ végére odaadjuk az n -est.



$n-1$ számot keltettünk meg (leghelyesebb)!
 $\hookrightarrow$ mindig található egy legkisebb...

Teétel (Cayley): Az $\{1, 2, \dots, n\}$ pontokon n^{n-2} különböző fa adható meg.

Bit.: Definiáljuk: • egy fahoz nem tartozhat két különböző él, • a fahoz tartozik Prüfer-élek. ✓

Kell: • a sorozatban tartozik egy fa, melynek Prüfer-éleje epp az adott sorozat;

• a kapott sorozatból származik epp n^{n-2} .

- $v_{n-1} = n$ (meghatározható, hiszen tudjuk, h. $n-2$ származik van)

Legyen w_k : elhagyásával v_k -t figyeljük.

Képzhet. w_k -t k -ra $\rightarrow$ relációvalható a fa.

w_k a legkisebb szám, ami nem fordul elő a

$w_1, w_2, \dots, w_{k-1}, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{n-1}$ számok között.

Es legfeljebb $n-1$ darab különböző szám: $\Rightarrow$ mindig van legalább egy legkisebb szám.

- így megkaptuk a $\{v_1, w_1\}, \{v_2, w_2\}, \dots, \{v_{n-1}, w_{n-1}\}$ eleket.

Bekapjuk, h. • ezek az éllel feltérképezhetők meg, és akkor belátható, h.

• ekkor a fa az a Prüfer-éleje éppen $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$.

Bit.: indult, t.f.h. nem fa, azaz a kapott grafban van kör:

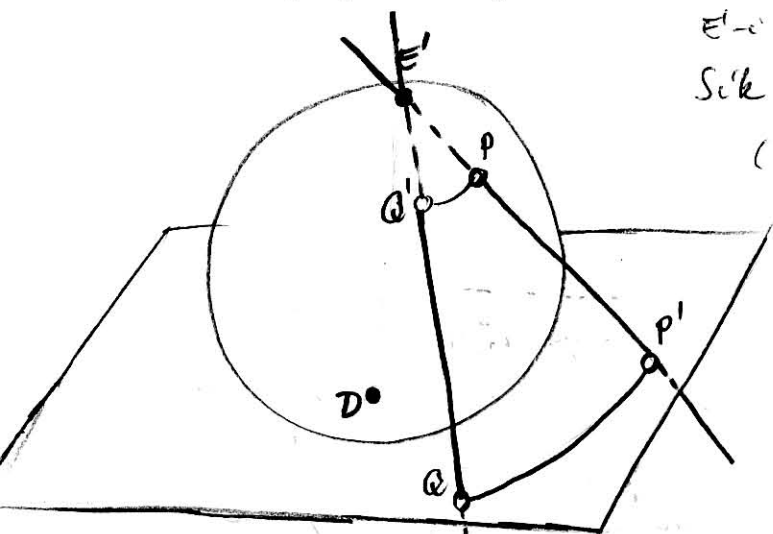
~~egyszerűsítés~~ v_i, w_i felírásakor egy újabb pontjárt és egy újabb éllel kapcsol a grafban. Ennek olyan lépés, h. a kör utolsó éllel kapcsol meg, de ekkor olyan w_i -t kellene felírni, amit már korábban felírtunk. Ez azonban nem lehetséges a fenti eljárásban.

- Tehát k olyan $n-1$ elemű sorozatban, amelyben az első $n-2$ elem mindegyike lehet $\{1, 2, \dots, n\}$ és az $(n-1)$. elem n , tartozik egy-egy fa, az különböző sorozatból különböző fa tartozik. Minél több sorozat n^{n-2} van, annál a különböző fa száma is.

(14) Def.: Ha egy gráf le rajzolható a síkra úgy, hogy az élei ne metszessenek egymást, akkor a gráf síkle rajzolható. A síkle rajzolt gráf a sík tartományokra osztja. Hasonlóan definiáljuk a gömbre rajzolható gráfot.

Tétel: Egy 6 csúcsú pontosan illen szelvényes, ha gömbre rajzolható!

Ver.: stereographic projection



El-e potus, mint veheteli pont. -.

Siek $\xleftrightarrow{1:1}$ Gömbpételet- $\{E\}^?$
(szögterelő, de nem talvolszögterelő)

Tétel: Ha G szétbontozható és T egy ketnőleges tartomány $\Rightarrow$
 úgy is szétbontozható, hogy T a második tartományon legyen.

Bir: sikrografius projekt...

Euler-Formel: $p+t = e+2$ (s. "Euler'sche", "Euler'sche" graphen)

Bit : *seronimus* *moderem* *alapalo* *brarytas* - -

(R. 39)

... mindig elhagyjuk a graf egy körének szét $\rightarrow$ csatlakoztatás
szét tartás

„fellebanten“ eGer malina: $e_1 = t - 1$

manadde: penitelyat at : $e_2 = p-1$

$$\textcircled{+} \quad e_1 + e_2 = t + p - 2$$

$$e+2 = p+t \quad \checkmark$$

Teil: 6 eigenen, silberfarb. Blatt' is $p \geq 3 \Rightarrow e \leq 3p-6$

Biz.: (16.38) Edegy csak az grafon biz.

ai: i. tart-nal helye lli van?

$$a_1 + a_2 + \dots + a_t$$

$$a_i \geq 3$$

$$2e \geq a_1 + a_2 + \dots + a_t \geq 3t = 3(e+2-p)$$

$$2e \geq 3e + 6 - 3p$$

$$3p-6 \geq e$$

all: K_5 nem rajzolható síkba

bit: indirekt 10~~4~~ 3.5-6 4

Teorema: G cignoara, scilicet j -foliată, $\forall$ care legalizat k hoarii este $p \geq 4 \Rightarrow e \leq 2p-4$

Біз : Ү хатманың легалдығы ең қатаң

$$\dots 4t \leq 2e \quad , \text{ Euler}$$
$$e \leq 2p-4$$

Teil: g wird ~~konstant~~ ^{konstant} also: $2e \geq gt = g(e+2-p)$

eller $ze \geq g^t = g(e + z - p)$

$$e \leq \frac{g}{g-2} \cdot p - \frac{2g}{g-2} \quad \text{da } p \text{ beliebig tollant es } p \text{ gibt}$$

≥ g als 2. takt

Tétel: $K_{3,3}$ nem rajzolható síkba

Bit : indirekt $p=6$

$$e = g$$
$$g = 4$$

9 $\neq$ 2.6-4 ∇

Teitel: G. cynosu, silbergrün $\Rightarrow$ min. felsen
Lagefeld 5

B.T.: Feltschicht: p 23, T.f.h. d. min ≥ 6 .

Für $\Sigma d = 2e$, $6p \leq 2e$. Folgt:

$$e \leq 3p-6, \text{ and at } 2e \leq 6p-12.$$

Aranson: $G_p \not\cong G_p - 12 \frac{1}{2}$. ✓

Total min. planes $\leq 5 \dots + 4(40)$ ↗

Tétel (Kuratowski): H G sébzengszallható $\Leftrightarrow$ $\nexists$ benne részgráfok K_5 vagy $K_{3,3}$
vagy ezek szűz kivétele

vagy ezek soros kivétel

Pelda: Petersen-graf

Tétel (Faly-Wagner-tétel): Ha G szelvényekből áll egyenlő $\Rightarrow$ keretnek is szelvényekből álló natonál is szelvényekből áll.

nelkenti eppes nakhonkhal is lerajollhas!

i) $\xrightarrow{\text{belaght.}}$ 2 Klassen mit (keine Baumstruktur)

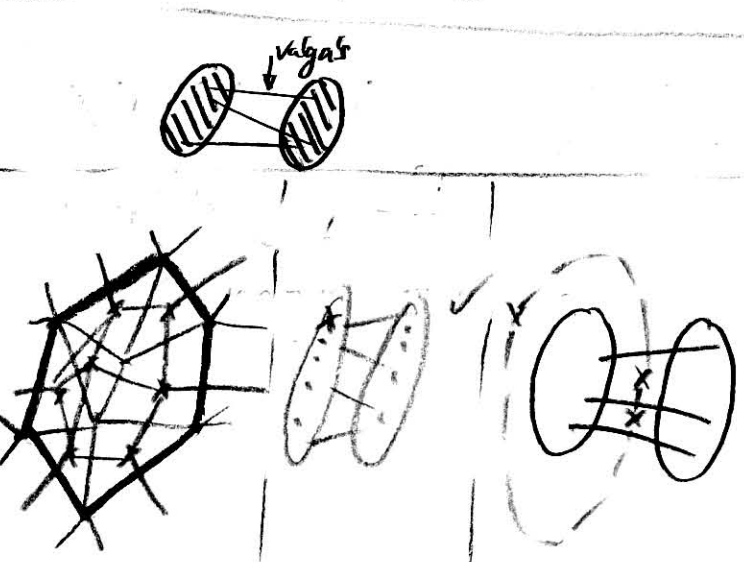
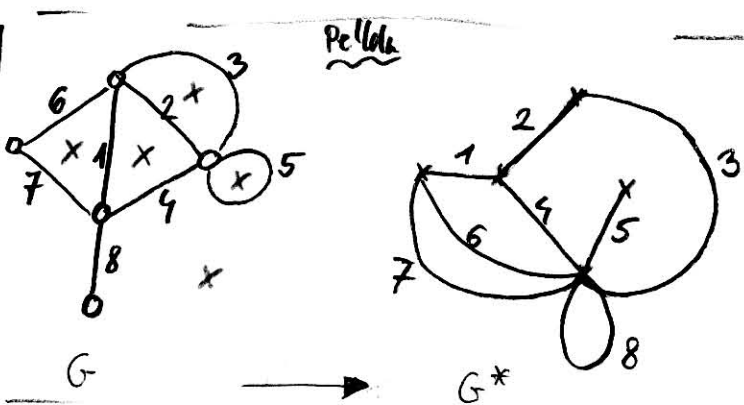
i) 2 feli' isitara Alankado e Gbeti gya'lam h'ng

Def: G és H topológikusan isomorfak, ha a két emlekedés között transzformációk sorozatát alkalmazásával irány gráfba transzformálhatók.

15.

- "meggyőző" sejtés
- síkgráfok dualizációja

G (síkgráf)	G^* (dualis)
tartomány	pont
él	él
szomszédos él	parhuzamos él
elválasztó él	hurok
valgás	kör
(2 csomópont) parhuzamos él	szomszédos él (2 csomópont valgás)
(1 csomópont) hurok	elválasztó él (1 csomópont valgás)
kör	valgás
(ciklus) ja	elválasztó él komplementere

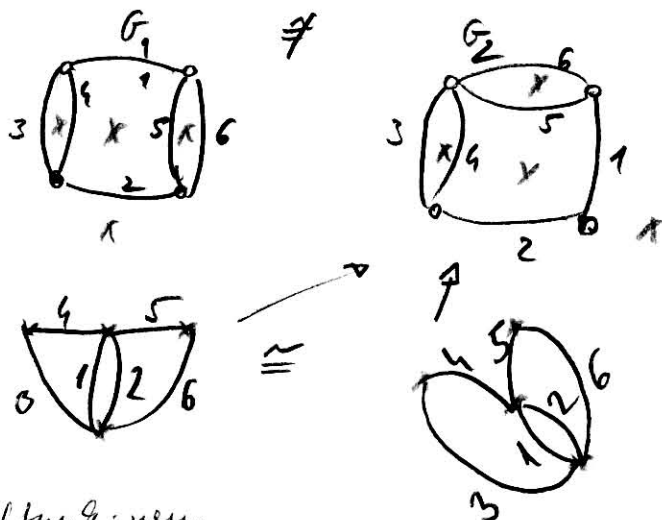


Villamosmérnöktanár...

De baj van (H. Whitney) is a kiegészítő nem igazolt:

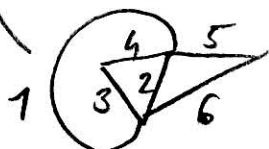
$$(G^*)^* \cong G \quad ; \quad G^* \cong H^* \\ \Downarrow \\ G \cong H$$

Ellenpélda:



De az meddig nem voltak izomorfok!!!

RE: kissé valóság: nem minden esetben az ér. a dualis ált. ...



Hopp! A graf konkrét síkgráfolásához rendeltünk egy dualist.

Definiálunk két: 2-izomorfia: $G \stackrel{(2)}{\cong} H$

Igy már igazak az áll-ek:

(Whitney) $(G^*)^* \stackrel{(2)}{\cong} G$ és $G^* \stackrel{(2)}{\cong} H^* \Rightarrow G \stackrel{(2)}{\cong} H$ (H.45.)

Def.: $G_1(V_1, E_1) \stackrel{(2)}{\cong} G_2(V_2, E_2)$ gyenge izomorfia, ha

$\exists f: E_1 \xrightarrow{1:1} E_2$ úgy, hogy $\forall X \subseteq E_1$ -re X kör G_1 -ben

$\Leftrightarrow f(X)$ kör G_2 -ben.

(Két gráfot gyenge izomorfia nevesít, ha létezik közt kölcsönösen egyértelmű és körtartó leképezés lehetséges.)

Megj.: valgaistartó is.

Def.: G_1 és G_2 egymás absztrakt duálisai, ha $\exists \varphi: E_1 \xrightarrow{1:1} E_2$, melyre:

$X \subseteq E_1$ kör G_1 -ben $\Leftrightarrow \varphi(X)$ valga G_2 -ben és

$Y \subseteq E_1$ valga G_1 -ben $\Leftrightarrow \varphi(Y)$ kör G_2 -ben

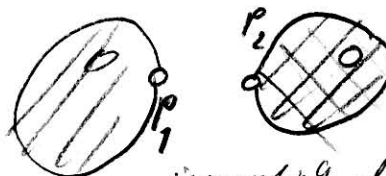
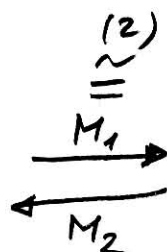
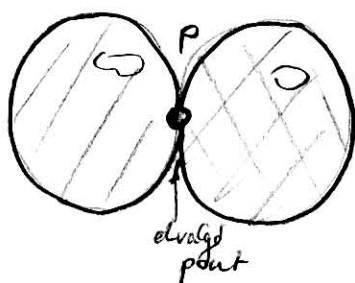
(φ és G^* gráfok egymás absztrakt duálisai, ha létezik közt kölcsönösen egyértelmű leképezés, mely kört valgáskor, valgást körbe visz.)

Tétel: Ha G szétválasztható $\Leftrightarrow \exists$ absztrakt duális

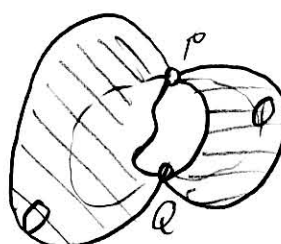
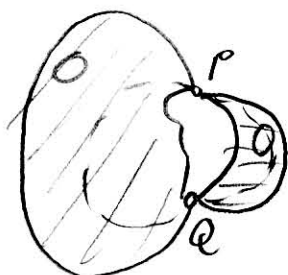
Tétel (Whitney): [H.46.: val egy φ (leképezés: mindig $\stackrel{(2)}{\cong}$ gráf leképezés)]

Két G_1 -ből az $M_1 - M_2 - M_3$ művelettel két. kombinatoriáljából

G_2 megkapható $\Leftrightarrow G_1 \stackrel{(2)}{\cong} G_2$



izomorfia elrontja, de megmarja a gyenge izomorfia.



Biz.: áll-megfeleltetés ✓

valami: megfeleltetés

körtartó ✓

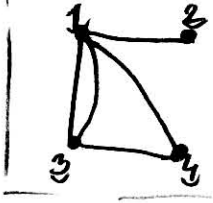
↑ ez a vételez megfigyelésem; val gyenge izomorfia...

16.

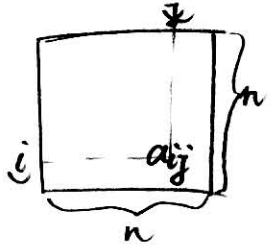
Sturmcsalgi matrix (K-32)
(adjacency-matrix)

$G \rightarrow A^{(n \times n)}(G), |V(G)| = n$

Pl.



$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } \{i, j\} \notin E(G) \\ \text{élek száma } i \text{ és } j \text{ között} \end{cases}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Tétel: ~~Ha~~ A t-edik hatványra olyan $A^t = (m_{ij}^{(t)})$ matrix, melynek $m_{ij}^{(t)}$ eleme az i-ből j-be vezető t hosszúságú élsorozatok száma. Ezen élsorozatok között nem kell az utolsó csomópontot, hanem az utolsó pontot, vagy akár élen, feltüntetnünk a kiinduló csomópontot is.

Biz.: $t=2$ -re

(ezt a bit-t vár. nem
adok tudni!)

Az A^2 matrix egy $m_{ij}^{(2)}$ elemét az A matrix i-edik sorának és j-edik oszlopának skalárszorzataként kapjuk meg. Ebben a skalárszorzatban a k-adik összeadandó a graf v_i -ből v_k -ba vezető és v_k -ból v_j -be vezető élek számának szorzata. Így a skalárszorzat eredmény az összegebe k -ra, "beleértve, hogy lehet $k=i$ vagy $k=j$ is. Ugyanúgy számoljuk a hurokakat is. Tehát $m_{ij}^{(2)}$ a v_i és v_j közötti 2-ből (2-hosszú utak), aló élsorozatok száma.

$A^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} i & j \end{matrix} \\ \begin{matrix} i & j \end{matrix} & \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix} \end{matrix}$
 $k=1 \quad k=2 \quad \dots \quad k=n$
 $a_{i1} \cdot a_{1j} + a_{i2} \cdot a_{2j} + \dots + a_{in} \cdot a_{nj}$

$t \geq 2$ esetén: T.I.-vel

T.f.h. $(t-1)$ -re már biz. Def nemint: $A^t = A^{t-1} \times A$.

A^t egy $m_{ij}^{(t)}$ eleme: A^{t-1} i-edik sorának és A j-edik oszlopának skalárszorzata. k-adik összeadandó: v_i -ből v_k -ba vezető $(t-1)$ hosszú élsorozatok száma és v_k -ból v_j -be vezető élek számának szorzata. Így a skalárszorzat eredmény az összegebe k -ra, tehát $m_{ij}^{(t)}$ a v_i és v_j közötti t-ből aló élsorozatok száma.

Helyj.: G egyszerű esetén $[A(G)]^3$ diagonális elemeinek összege a grafban található három hosszúságú körök számának hatnosa (hiszt $\forall$ kör $\forall$ pontból mindkét irányban ké lehet járni):

$\frac{1}{6} (m_{11}^{(3)} + m_{22}^{(3)} + \dots + m_{nn}^{(3)}) = G \text{ graf 3-hosszú köreinek a száma}$
6-tal osztva!
Graf és lin. alg. közötti kapcsolat...

Egy graf k -reguláris, ha $\forall$ pont foka k .

Ha G k -reguláris, akkor $A(G)$ -nek k sajátértéke:

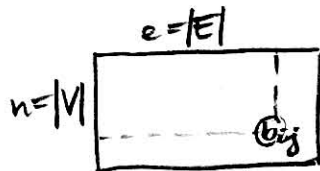
$$A(G) \cdot \underline{x} = k \underline{x}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \vdots \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \vdots \\ \hline k \\ \hline \end{array} \quad \text{adott pont foka...}$$

Incidenca-mátrix - irányított grafra (E : rendezett pár(ok))

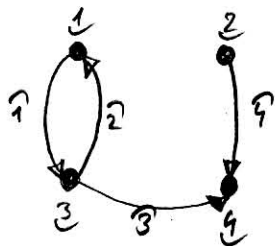
(H.32.)

$$\vec{G}(V, E) \rightarrow \underline{B}^{(n \times e)}(G); e = |E|, n = |V|$$



$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } e_j = (\overrightarrow{v_i, \cdot}) \\ -1, & \text{ha } e_j = (\overleftarrow{\cdot, v_i}) \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Példán



	1	2	3	4
1	1	-1	0	0
2	0	0	0	1
3	-1	1	1	0
4	0	0	-1	-1

16) Tétel: Ha $\vec{G}$ n -pontú, hamismentes és (nyílt körű) összefüggő,
 akkor $r(B(G)) = n-1$.

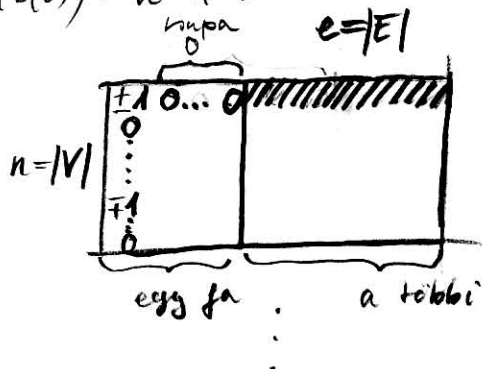
Biz.: • $\leq n-1$ - ez triviális:

Sorok száma n , és az összes sor összege $(0, 0, \dots, 0)$ ^(sorok, det. rang) $\Rightarrow$ a sorok line. öf.
 (hiszen minden elvek megfelelő sorban egy $+1$, egy -1
 és $n-2$ darab zeros található): nyitva tudnánk a
 rang legfeljebb $n-1$ lehet (felm. a hamismenteséget)

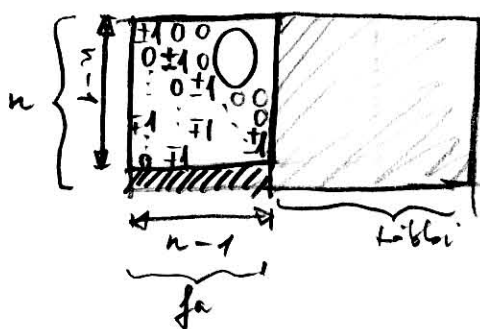
• $\geq n-1$

Vegyük egy $n-1$ élű fenyőfát. Legyen v_1 egy előfelmű
 pont ebben a fenyőfában és e_1 a hozzá illeszkedő él.
~~Legyen v_2 egy előfelmű pont. Hagyjuk el v_1 -et és e_1 -et.~~
 Legyen v_2 egy előfelmű pont a keletkezett új fában és
 e_2 a hozzá illeszkedő él. Elhagyjuk... stb. Ha $B(G)$
 sorait $v_1, v_2, \dots$; oszlopait pedig $e_1, e_2, \dots$ sorrendben
 írjuk fel, akkor egy $n \times (n-1)$ méretű mátrixot
 kapunk. Ebből elhagyva az utolsó sort, egy olyan mátrixot
 kapunk, melynek diagonális elemei ± 1 és az az $n-1$ felett
 supra zeros áll. Mivel egy találtunk $n-1$ lineárisan
 független oszlopot, a rang legalább $n-1$ lehet.

$\rightarrow r(B(G)) = n-1 \checkmark$



valamelyik előfelmű pont: első sor...
 elhagyom, lesz még egy előfelmű $\rightarrow$ 2. sorba



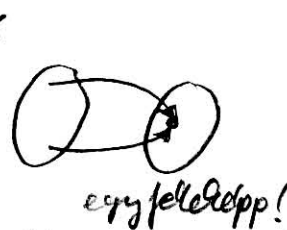
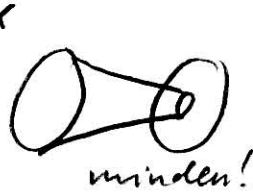
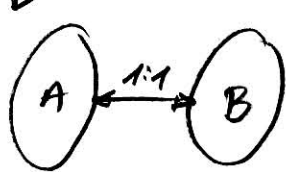
Altså háromszög mátrix,
 diagonálban nincs nulla
 $\rightarrow \det \neq 0$
 legalább $(n-1)$ a teljes
 mátrix rangja...

17.

Def.: A és B egyenlő számosságúak, ha $\exists f: A \rightarrow B$, hogy:

$\forall x \in A$ -kor $\exists$ egyetlen $f(x) \in B$
 $\forall y \in B$ előálljon $f(x) = y$ alakban (ahol $x \in A$) } a fgv. B -re egy
értékpárosítás legyen

és ez az előállítás egyértelmű legyen (egyfelelepp)



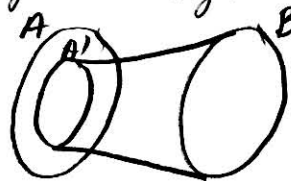
Beművel: $\exists f: A \rightarrow B$, hogy elemenkénti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést
lehetett. Jel.: $|A| = |B|$.

Def.: A halmozatos véges (mátrioszágh), ha van olyan k véges szám, hogy
 A és az $\{1, 2, \dots, k\}$ halmozatok egyenlő számosságúak ($|A| = k$).

Egy halmozatos végtelen (mátrioszágh), ha nem véges számosságú

Def.: $|A| \geq |B|$, ha $\exists A' \subseteq A$, hogy $|A'| = |B|$

és $|A| > |B|$, ha $|A| \geq |B|$, de $|A| \neq |B|$



Def.: egy halmozatos megszámlálhatóan végtelen számosságú, ha a
természetes számok $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ halmozataival egyenlő számosságú.
(sorrendelhetőség; kölcsönösen egyértelmű a halmozatos és $\mathbb{N}$ elemei között)

Pl.: $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots\}$ Valószínűleg H_1 $\mathbb{N}$ -vel, de egyforma számosságú!

$H_1 = \{0; 1; 2; \dots\}$

$f(x) = x - 1$ ✓

$H_2 = \{2; 4; 6; \dots\}$

$f(x) = 2x$ ✓

$H_3 = \{1; 4; 9; \dots\}$

$f(x) = x^2$ ✓

$H_4 = \{0; +1; -1; +2; -2; \dots\}$

$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x=0 \\ 2x, & \text{ha } x>0 \\ 2x+1, & \text{ha } x<0 \end{cases}$ ✓

($\mathbb{Z}$)

Tétel: Ha A megszámlálható és a fölé diszjunkt B halmozatos véges, akkor
 $A \cup B$ is megszámlálható. biz.: ✓

(Tétel: A diszjunkt A, B halmozatok egyenlőképpen számosságúak csak)
 A és B számosságától függ...

Tétel: Ha v és s két (k darab) diszjunkt B_i halmazunk van és mindkettő megvalósítható, akkor $\bigcup_{i=1}^k B_i$ is megvalósítható.

Biz:

$$B_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots\}$$

$$B_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots\}$$

$$\vdots$$

$$B_k = \{a_{k1}, a_{k2}, \dots\}$$

[Ha $|B_i| = \text{megval.}$ $\forall i=1, \dots, k$ -ra, akkor $\bigcup_{i=1}^k B_i$ is megval.]

$$\bigcup_{i=1}^k B_i = \{a_{11}, a_{21}, \dots, a_{k1}, a_{12}, \dots, a_{k2}, \dots\}$$

veszes hosszú sorokból.

Tétel: ~~Ha B_i megvalósítható diszjunkt~~ Ha megvalósítható két diszjunkt B_i halmazunk van és $\emptyset$ megval., akkor az egyenletük is megval.

[Ha $|B_i| = \text{megval.}$ $\forall i=1, 2, \dots, n$ (index halmazt vegyük), akkor $\bigcup_{i=1}^n B_i$ is megvalósítható.]

Biz:

$$B_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \dots\}$$

$$B_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \dots\}$$

$$B_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, \dots\}$$

$$B_4 = \{a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, \dots\}$$

$$\vdots$$

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31},$
 $a_{22}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{32}, \dots$
 sorrendben megkezdve
 B elemeit N elemeként
 (kegyesével ...)

Tétel: A racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza is megvalósítható ($|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$)

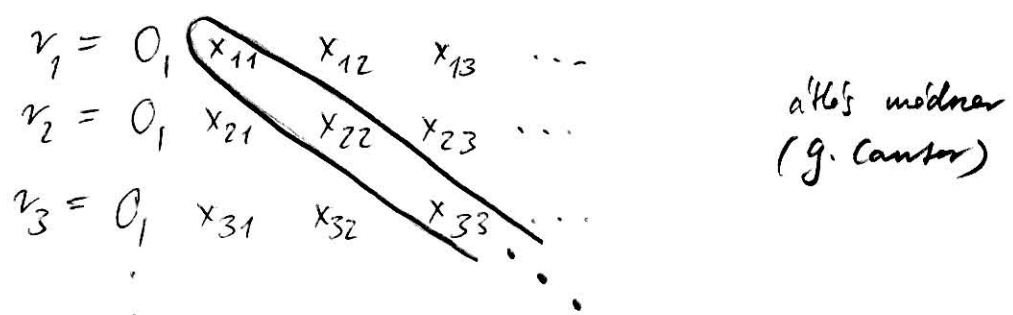
Biz:

Megvalósíthatóan két diszjunkt A_i halmazhoz jutottunk, melynek egyike $\emptyset$ vagy $\mathbb{Q}$, alkalmasságuk az előző állításra.

17.

Tétel: A $(0,1)$ intervallumban tartozó összes valós szám H halmaza megszámlálhatóan végtelen számosságú.

Biz: $|H|$ legfeljebb megszáml. (tart. $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ részhalmaza)
Indirekt t.f.h. $|H| = |\mathbb{N}|$, vagy H elemait valamilyen $(r_1, r_2, \dots)$ sorrendbe rendezhetjük. Minden ilyen r_i egy 0 és 1 közötti valós szám, felírható tehát végtelen tizedesjeggyel
 $0, x_{i1} x_{i2} x_{i3} \dots$ alakban (nem egyért.; ~~pl.~~ pl. $0,5 = 0,4999 \dots$),
azért ki a jobboldali felírás möblet). H indirekt felvétel szerint
tehát a

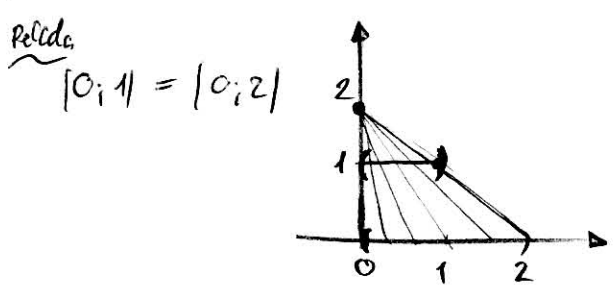


Sorozat H minden elemét tartalmazza. A táblázat „átolaj” mentén végighaladva konstruálunk egy olyan $y \in (0,1)$ valós számot, melynek

$y = 0, y_1 y_2 y_3 \dots$ tizedesérték alakja ~~az egy juttat, hogy x_{ii}~~
ban:
$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{ha } x_{ii} \neq 1 \\ 2 & \text{ha } x_{ii} = 1 \end{cases}$$

És az y szám biztos nem szerepelhetett a fenti táblázatban, hisz bármely j -re elmondható, hogy az r_j szám j -edik tizedesjegye különbözik az y szám j -edik tizedesjegyeétől. Így nem minden 0 és 1 közötti valós szám szerepel a felsorolásban $\rightarrow$ ellentmondás-ra jutottunk $\frac{1}{2}$. ✓

$|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$, hiszen $\mathbb{R}$ tartalmazza a $(0,1)$ intervallumot.
Ez a számosságot kontinuum számosságúnak hívjuk.



Tétel: Kontinuum számosságai

- (1) $(0; 1) \in \mathbb{R}$, ill. ált. $\forall$ nem üres számot tart. intervallum
- (2) sikk (ált. $\forall$ véges n számra az n -dimenziós valósz. tér) pontjainak halmaza (es így $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}|$ is).

Biz.: (1) Legyen $I = (a, b)$, ahol $a < b$. Ekkor elemet

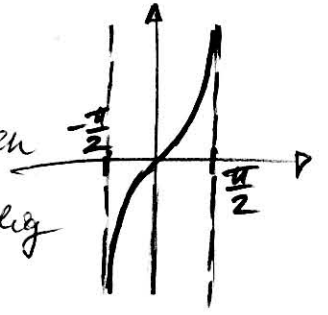
az $x \mapsto \frac{\pi(x-a)}{b-a} - \frac{\pi}{2}$ fgv. kölcsönösen egyértelműen

átvisz a $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ intervallumba, amelyet pedig

az $y \mapsto \arctg y$ fgv. kölcs. egyért. átvisz $\mathbb{R}$ -be.

Belátható, h. $|(a, b) \in \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$ ✓

(2) Legyenek az n -dimenziós tér pontjai $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ alakban adható. stb. ...

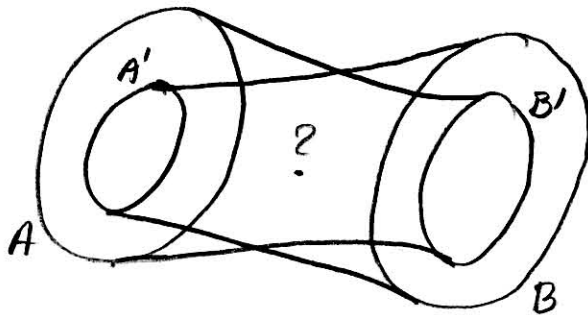


Tétel: $|A| \geq |B|$ és $|B| \geq |A| \iff |A| = |B|$

$\Leftarrow$ triv.

$\Rightarrow$ (Cantor-Bernstein-tétel)

[nem viz. ...]



Példa: all. $|\mathbb{R}^+| = |\mathbb{N}|$

• $\geq$ triv. ($\mathbb{N}$ része $\mathbb{R}^+$ -nak) ✓

• $\leq$: $\frac{p}{q} \rightarrow 2^p \cdot 3^q$ (hosszrend., egyértelműen ...)

$\hookrightarrow$ előző tétel alapján: = ✓

- (18) Egy H halmaz összes részhalmazának halmazát H hatványhalmaz-nak nevezzük. Például $\{a, b\}$ hatványhaza az $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
Vegyük észre, hogy ha $|H|=v$ véges, akkor hatványhaza 2^v eleme. Ez indokolja, hogy H hatványhazát 2^H -val jelöljük.

Tétel: Végtelen halmazok esetén is teljesül a $|H| < |2^H|$ reláció!

Biz.: • $|H| \leq |2^H|$ nyilvánvaló, mivel $\forall a \in H$ esetén $\{a\} \in 2^H$,
vagyis az $a \mapsto \{a\}$ H elemei és H egyelemű részhalmazai
között. ✓

• Individuál f.h.: $\exists f: H \xrightarrow{1:1} 2^H$ ($|H| \stackrel{?}{=} |2^H|$)
 H elemeit két csoportba fogjuk osztani:

$x \in H$ páros, ha $x \in f(x)$ (vagyis x páros, ha benne van az f szimult
képében, ami H -nak egy részhaza)

lét, ha $x \notin f(x)$

[megj.: pl. $f^{-1}(\emptyset)$ biztosan lét; $f^{-1}(H)$ biztosan páros]

Jelölje P és K az összes páros, ill. lét elem halmazát.

Mivel $K \subseteq H$, ezért $K \in 2^H$, tehát $\exists$ egy $q = f^{-1}(K)$ elem H -ban.

Ez nem lehet páros (mert akkor $q \in f(q) = K$ miatt K tartalmazna egy páros elemet is), de lét sem lehet, hisz akkor $q \notin f(q) = K$ miatt párosnak definiáltuk volna. Ellentmondás! ✓

↳ ✓

[utolsó biz.: Bertrand: "borely-paradoxon"]

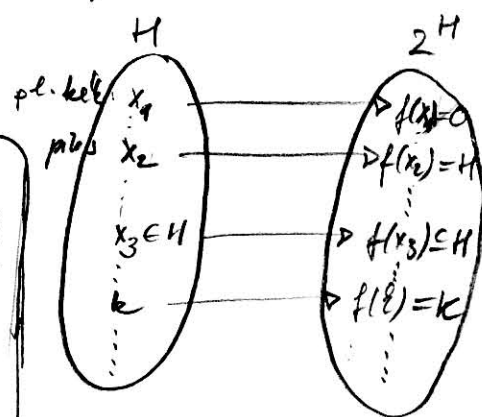
Tétel: Megszámálható halmaz hatványhaza
épp kontinuum számosságú. ($|N| < |2^N| \stackrel{!}{=} |R|$)

Biz.: lét: $(0, 1) \xrightarrow{1:1} 2^N$

Pl.: • $0, 1290 \dots \in R$

• $0, \overbrace{0001} / \overbrace{0010} / \overbrace{1001} / \overbrace{0000} / \dots$

• $\{4, 7, 9, 12, \dots\} \in 2^N$ ✓



Georg Cantor : matematikawan - kelahiran : 1879 - '57

Salmonsalget a helber abete' also bekijchel jebotte. - 2 (af)

$$|N| = \text{magnitud.: } K_0$$

refferke
naturssag: χ_1

решивая все случаи: λ_k

$$\lambda_{q+1}$$

$\text{Cl}_2\text{Fe}^{\text{II}}$ Adalium all. unabh.:

49-1a: $|x| = r_k \Rightarrow |2^x| > r_k$

(nem foglalkozunk a "részletekkel"
a jelek pontos magyarázatával.)

Kontinuumhipotézis: $|IR| = |2^N| = \aleph_1$ (vagyis ha egy végtelen
kardosságot kicserél a kontinuummal, akkor ez mindig lejjebb megadható lehet)

altalánosított konvergenciahipotézis: $\forall \epsilon > 0: |x| = \lambda_k \Rightarrow |z^x| = \lambda_{k+1}$,

vagyis $2^{\lambda_k} = \lambda_{k+1}$. [Ha $|H| > \lambda_0$, akkor igaz-e,

Erkennt: $|N| = \text{magnitud.} = \chi_0$

hogy $|H| \geq |R|$?

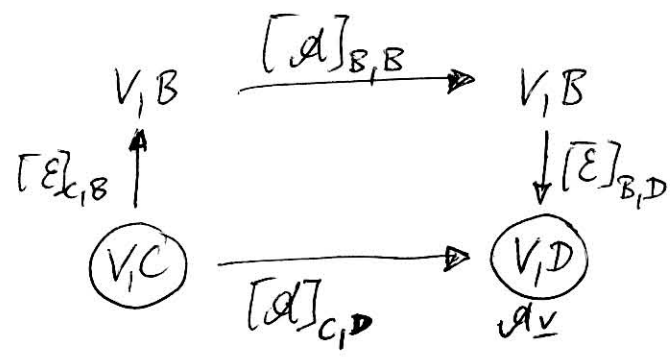
$$|2^N\rangle = \text{ent.} = \chi_1$$
$$|2^{\infty}| = \dots = \infty$$

...

XX. st.: es a syfés se nem egyar, se nem hannis, hanem eddintesebban:

ha a felméréseket axiómákról felépítésre szánt a szöveg axiómához a hipotézis igazságát vagy hamiságát, mint ~~van~~ további axiómát hozzáveszünk, akkor két olyan axiómarendszert kapunk, melyek páros egymást kizárják, de egyikük sem tartalmaz ellentmondást.

Key:



$$[\mathcal{A}_V]_{C,D} = [E]_{B,D} [A]_{B,B} [E]_{C,B} [V]_C$$

$$\begin{bmatrix} [b_1]_D & [b_2]_D \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} [c_1]_B & [c_2]_B \end{bmatrix}$$

$$B = \{ (1,0), (0,1) \}$$

$$C = \{ \underset{(c_1)}{(1,1)}, \underset{(c_2)}{(1,-1)} \}$$

$$\begin{bmatrix} [ac_1]_C & [ac_2]_C \end{bmatrix} = [A]_{C,C} \leftarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 \Rightarrow [c_1]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$ac_1 = \alpha_1 \cdot (ab_1) + \alpha_2 \cdot (ab_2)$$

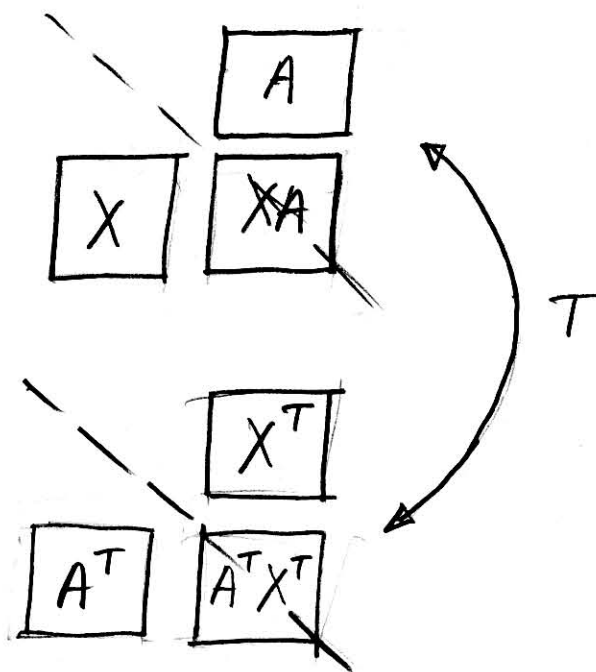
$$[ac_1]_B = \left(\underset{\parallel}{[ab_1]_B} \quad [ab_2]_B \right) \cdot \underset{\uparrow}{[c_1]_B} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\parallel}{[A]_{B,B}} \quad \underset{\uparrow}{[c_1]_B}$$

$$X \cdot A = B$$

$$(XA)^T = B^T$$

$$A^T X^T = B^T$$



Kieg ① I.:

Biz: (axiomat'lat fellh...)

$$(i) \quad \lambda \cdot \underline{0} = \underline{0}$$

$$\underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$$

$$\lambda(\underline{v} + \underline{0}) = \lambda \cdot \underline{v}$$

$$-\lambda \underline{v} + \lambda(\underline{v} + \underline{0}) = -\lambda \underline{v} + \lambda \underline{v}$$

$$(-\lambda \underline{v} + \lambda \underline{v}) + \lambda \underline{0} = \underline{0}$$

$$\lambda \underline{0} = \underline{0} \checkmark$$

$$(ii) \quad \underline{0} \cdot \underline{v} = \underline{0}$$

$$\lambda + \underline{0} = \lambda$$

$$\underline{v}(\lambda + \underline{0}) = \underline{v} \lambda$$

$$(-\lambda \underline{v} + \lambda \underline{v}) + \underline{0} \underline{v} = \lambda \underline{v} + (-\lambda \underline{v})$$

$$\underline{0} + \underline{0} \underline{v} = \underline{0}$$

$$\underline{0} \underline{v} = \underline{0} \checkmark$$

$$(iii) \quad (-1) \cdot \underline{v} = -\underline{v}$$

$$-1 + 1 = 0$$

$$\underline{v}(-1 + 1) = \underline{v} \cdot 0$$

$$(-1) \underline{v} + 1 \underline{v} = \underline{0} \quad (ii)$$

$$(-1) \underline{v} + \underline{v} = \underline{v} + (-\underline{v})$$

$$(-1) \underline{v} = -\underline{v} \checkmark$$

$$(iv) \quad \lambda \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \lambda = 0 \text{ vagy } \underline{v} = \underline{0}$$

Indirekt: $\lambda \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \lambda \neq 0 \text{ vagy } \underline{v} \neq \underline{0}$

Fellh.: (i) - (ii) - t ...