1. feladat (14+6=20 pont)
a) Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet. (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = (1+y^2)2x\cos(x^2)$$

b) Rajzoljuk fel az

$$y' = y^3 + 1 - x$$

differenciálegyenlet $K = 1$-hez tartozó izoklináját, és jelöljünk be rajta néhány vonalelemet.

Mo. *a*) Szeparálható differenciálegyenlet, a tanult módszerrel:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1+y^2)2x\cos(x^2) \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \int 2x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x \quad (\mathbf{2p}).$$

Az egyenlőség bal oldala:

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \operatorname{arctg}(y) + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{5p}).$$

Az egyenlőség jobb oldala:

$$\int 2x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \sin(x^2) + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{5p}).$$

Tehát a megoldás (implicit alakban):

$$\operatorname{arctg}(y(x)) = \sin(x^2) + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}).$$

b) A $K = 1$-hez tartozó izoklina egyenlete

$$y^3 + 1 - x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \sqrt[3]{x} \quad (\mathbf{2p})$$

+rajz **(4p)** (1 meredekségű vonalelemekkel).

---

2. feladat (20 pont)
Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát.

$$y' - \frac{2y}{x} = x^3 e^x \quad (x \neq 0), \qquad y(1) = 1$$

Mo. Inhomogén lineáris egyenlet, a hozzá tartozó homogén egyenlet:

$$y' - \frac{2y}{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_{h,\acute{a}}(x) = Cx^2 \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad (\mathbf{6p}).$$

(Megoldva szeparálhatóként, vagy a megoldás általános alakjának ismeretéből.)
Az inhomogén egyenlet megoldása: keressük a megoldást $y(x) = c(x)x^2$ alakban (ahol c egy $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ differenciálható függvény) **(1p)** .
Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$\underbrace{c'(x)x^2 + 2c(x)x}_{y'(x)} - \underbrace{2c(x)x}_{\frac{2y(x)}{x}} = x^3 e^x \quad (\mathbf{2p}).$$

Ebből pedig $c'(x) = xe^x$. Parciális integrálással

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x(x-1) + D \quad (D \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p}),$$

tehát a $D = 0$ választással $c(x) := e^x(x-1)$, így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = c(x)x^2 = e^x(x-1)x^2 \quad (\mathbf{1p}).$$

Amiből az általános megoldás:

$$y_{i,á}(x) \overset{(\mathbf{2p})}{=} y_{i,p}(x) + y_{h,á}(x) \overset{(\mathbf{1p})}{=} e^x(x-1)x^2 + Cx^2 \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Jelölje $\widetilde{y}$ a kezdeti feltételt kielégítő megoldást. $\tilde{y}(1) = 1 \quad \Longrightarrow \quad C = 1$ **(1p)** , azaz

$$\tilde{y}(x) = e^x(x-1)x^2 + x^2 \quad (x > 0) \quad (\mathbf{2p}).$$

---

3. feladat (20 pont)
Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását.

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$$

Mo. Harmadrendű, lineáris állandó együtthatós, inhomogén egyenlet. A homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad (\mathbf{2p}),$$

gyökei: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2,$ **(2p)** . Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{h,á}(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p}).$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y(x) = Axe^{2x} \quad (x \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p})$$

alakban keressük (rezonancia miatt). Deriválva kétszer **(2p)** :

$$\begin{aligned} y(x) &= Axe^{2x} && | \cdot 2 \\ y'(x) &= A(1+2x)e^{2x} && | \cdot (-3) \\ y''(x) &= A(4+4x)e^{2x} && | \cdot 1. \end{aligned}$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = Ae^{2x} = 3e^{2x} \quad (\mathbf{1p})$$

$$\Longrightarrow \quad A = 3 \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = 3xe^{2x} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{1p}).$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\begin{aligned} y_{i,á}(x) &= y_{i,p}(x) + y_{h,á}(x) = \\ &= 3xe^{2x} + C_1e^x + C_2e^{2x} \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}). \end{aligned}$$

---

4. feladat (7+7+4+5=23 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{(n+1)^3 \cdot 7^n}{n!}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$ *c)* $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N},\, n \geq 2} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$ *d)* $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N},\, n \geq 2} (-1)^n \frac{1}{n \ln(n)}$

Mo. *a*) Legyen $a_n := \frac{(n+1)^3 \cdot 7^n}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$.
Ekkor

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{(n+2)^3 7^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)^3 \cdot 7^n} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{7(n+2)^3}{(n+1)^4} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1 \quad (\mathbf{2p}),$$

Tehát a hányadoskritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergens **(2p)** .

b) Legyen $b_n := \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$.

$$b_n \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} \underset{(\mathbf{2p})}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \frac{e}{e^2} = \frac{1}{e} \neq 0 \quad (\mathbf{1p}),$$

tehát nem teljesül a sorok konvergenciájának szükséges feltétele, ezért $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ divergens **(2p)** .

c) Legyen $c_n := \frac{1}{n^2 \ln(n)} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$.
Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ esetén

$$0 \leq c_n \leq \frac{1}{n^2} \quad (\mathbf{2p}),$$

és $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ konvergens, tehát a majoráns kritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2} c_n$ konvergens **(2p)** .

d) Legyen $d_n := (-1)^n \frac{1}{n \ln(n)} \quad (n \in \mathbb{N},\, n \geq 2)$ Ekkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2} d_n$ sor alternál **(1p)** $(|d_n|)_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2}$ monoton csökkenő **(1p)** , 0-hoz tart **(1p)** , tehát a Leibniz-kritiérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2} d_n$ konvergens **(2p)** .

---

5. feladat (5+12=17 pont)
a) Mit mond ki a gyökkritérium?
b) Konvergens-e a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^+} \left(\frac{4n-1}{9n+5}\right)^n$$

numerikus sor? Amennyiben igen, adjunk nemtriviális felső becslést az elkövetett hibára, ha a sor összegét a 99. részletösszeggel közelítjük.

Mo. *a*) Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nemnegatív tagú számsorozat **(1p)** . Ekkor a következő állítások teljesülnek.

- Ha $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor konvergens. **(2p)**
- Ha $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor divergens. **(2p)**

b) Legyen $a_n := \left(\frac{4n-1}{9n+5}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}^+)$. Ekkor

$$\sqrt[n]{a_n} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{4n-1}{9n+5} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{9} < 1 \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát a gyökkritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergens **(2p)** . Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$0 \leq a_n \leq \frac{4}{9} \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát ha S jelöli a sor összegét, akkor

$$\left|S - \sum_{n=1}^{99} a_n\right| \overset{(\mathbf{1p})}{=} \sum_{n=100}^{\infty} a_n \overset{(\mathbf{1p})}{\leq} \sum_{n=100}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n \overset{(\mathbf{2p})}{=} \left(\frac{4}{9}\right)^{100} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{100} \cdot \frac{9}{5}.$$

IMSc feladat (8 IMSc pont) Bizonyítsuk be, hogy ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy nemnegatív tagú, monoton csökkenő számsorozat, és a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor konvergens, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

Mo. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor a sorokra vonatkozó Cauchy-kritérium szerint létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $m, n \in \mathbb{N}$ és $m > n \geq N$ esetén

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq \varepsilon \quad (\mathbf{2p}).$$

Speciálisan $n \geq N$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton csökkenése, és nemnegativitása miatt **(1p)**

$$|na_{2n}| = na_n \overset{(\mathbf{2p})}{\leq} \sum_{k=n}^{2n} a_k \overset{(\mathbf{1p})}{=} \left|\sum_{k=n}^{2n} a_k\right| < \varepsilon.$$

Tehát a sorozat-határérték definícója alapján $\lim\limits_{n\to\infty} na_{2n} = 0$ **(1p)** , következésképpen $\lim\limits_{n\to\infty} 2na_{2n} = 0$, és hasonlóan belátható (vagy hivatkozhatunk a monotonitásra), hogy $\lim\limits_{n\to\infty} (2n+1)a_{2n+1} = 0$, eezekből pedig már adódik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$ **(1p)** .