A számítástudomány alapjai

2. ZH 2008. 11. 17. 17^{15}

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.
Kérjük, minden résztvevő **nevét**, **NEPTUN kódját**, **gyakorlatvezetője nevét**, valamint a **gyakorlatának időpontját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel.
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

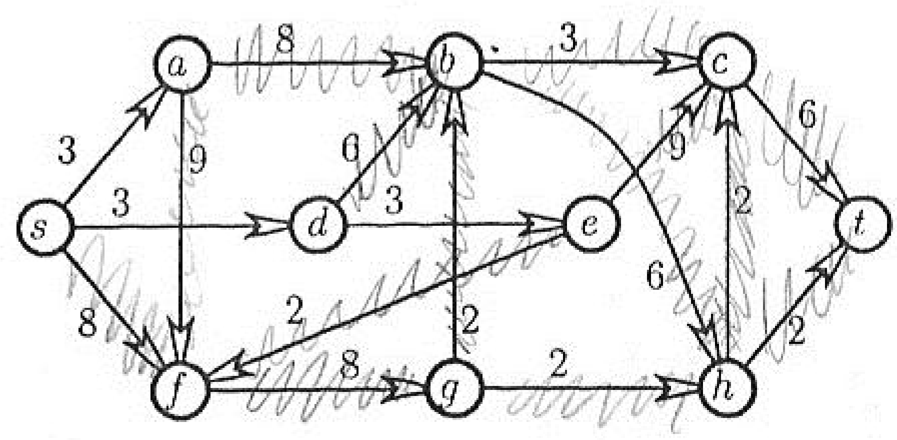
Feladatok

1. Legyenek a G páros gráf színosztályai A és B, és tegyük fel, hogy legfeljebb $|B|$ él szükséges G összes pontjának lefogásához. Igazoljuk, hogy ekkor az A színosztályra teljesül a Hall feltétel.

2. Határozzuk meg mindazon egyszerű, összefüggő, síkbarajzolható G gráfokat, amiknek létezik olyan G^* duálisuk, hogy $G \cong G^*$ teljesül, továbbá $e = n + 2$ áll, ahol e a G éleinek, n pedig G csúcsainak számát jelöli.

3. Topologikusan izomorf-e az $l_G(1) = (2,5)$; $l_G(2) = (1,3,5)$; $l_G(3) = (2,4)$; $l_G(4) = (3,5)$; $l_G(5) = (1,2,4)$ szomszédossági listákkal megadott G gráf az $A(H) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ szomszédossági mátrixszal megadott H gráffal?

4. Határozzuk meg az alábbi PERT probléma optimális ütemezése melletti kritikus tevékenységeket!



5. Bizonyítsuk be, hogy NP-teljes az a π döntési probléma, aminek a bemenete egy $100n$ pontú irányítatlan gráf, a kimenete pedig pontosan akkor „*igen*", ha G-nek van legalább n pontú köre.

6. Igazoljuk, hogy ha m és n pozitív egészek, akkor $d(n)d(m) = d(lnko(n,m))d(lkkt(n,m))$ teljesül, ahol $d(k)$ a k pozitív osztóinak számát, $lnko(n,m)$ és $lkkt(n,m)$ pedig rendre az n és m legnagyobb közös osztóját ill. legkisebb közös többszörösét jelölik.

Gyakorlatvezetők és gyakorlatok

Bérczi Kristóf (Sz 16, IB 138), Beck Zoltán (Sz 16, IB 139), Vígh Dorottya (Sz 16, IB 140), Bertus-Barcza Tímea (Cs, IB 138), Drótos Márton (Cs, IB 139, Sz 16, Z 208), Gyenis Zalán (Cs, IB 140), Krakus Péter (Cs, IB 141), Csákány Rita (K, IB 142), Pereszlényi Attila (K, IB 141), Csönde Gergely (K, IB 138), Nikházy László (K, IB 139), Csorba János (K, IB 140), Reinhardt Gábor (K 10, IB 145), Katona Gyula (Sz 10, IB 138), Keszler Anita (Sz 10, IB 139), Nigicser Bálint (Sz 10, IB 140), Tassy Gergely (Sz 16, Z 209)

Jó munkát!

A számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. Legyenek a G páros gráf színosztályai A és B, és tegyük fel, hogy legfeljebb $|B|$ él szükséges G összes pontjának lefogásához. Igazoljuk, hogy ekkor az A színosztályra teljesül a Hall feltétel.

Mivel G csúcsai lefoghatók élekkel, ezért G-nek nincs izolált pontja, (1 pont)
így igaz Gallai idevágó tétele, miszerint $\rho(G)+\nu(G)=|V(G)|=|A|+|B|$. (2 pont)
A feltétel szerint a lefogó élek minimális száma $\rho(G)\leq|B|$, (1 pont)
ezért $\nu(G)\geq|A|$ teljesül. (2 pont)
Létezik tehát G-ben $|A|$ független él, ami azt jelenti, hogy G-nek van A-t fedő párosítása. (2 pont)
A Hall tétel triviális iránya szerint ekkor viszont A-ra teljesül a Hall feltétel, (1 pont)
azaz tetszőleges $X\subseteq A$ ponthalmazra $|X|\leq|N(X)|$ áll. (1 pont)

A feladat egyébként megoldható a tanult tételek nélkül, csak a Hall feltételt ismerve.

Ha legfeljebb $|B|$ él lefogja G minden pontját, akkor mivel B-n belül nem fut él, ezért a lefogáshoz legalább $|B|$ él szükséges, így e lefogó élek száma pontosan $|B|$ lesz. (1 pont)
Ráadásul minden B-beli csúcsból pontosan egy lefogó él fut egy-egy A-beli csúcsba, és ezen élek minden A-beli csúcsot lefognak. (2 pont)
Ez azt jelenti, hogy a lefogó élek halmaza egy olyan erdő, aminek minden komponense egy-egy A közepű csillag. (3 pont)
Ezen csillagkomponensek mindegyikéből egy-egy tetszőleges élt kiválasztva egy A-t fedő párosítást kapunk. (2 pont)
Ha tehát X az A egy részhalmaza, akkor X szomszédsága már a párosítás miatt legalább X különböző csúcsot tartalmaz, azaz $|X|\leq|N(X)|$, (1 pont)
és ez éppen azt jelenti, hogy A-ra teljesül a Hall-feltétel. (1 pont)

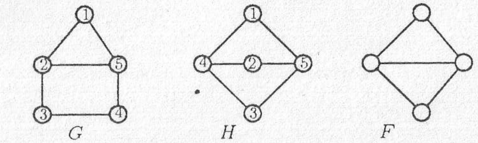
2. Határozzuk meg mindazon egyszerű, összefüggő, síkbarajzolható G gráfokat, amiknek létezik olyan G^* duálisuk, hogy $G\cong G^*$ teljesül, továbbá $e=n+2$ áll, ahol e a G éleinek, n pedig G csúcsainak számát jelöli.

Jelölje t a G gráf adott síkbarajzolásakor keletkező síktartományok számát! Mivel $G\cong G^*$, ezért G^*-nak ugyanannyi csúcsa van, mint G-nek. (1 pont)
Másfelől G^* csúcsainak száma a dualitás definíciója miatt t, (1 pont)
ezért $n=t$ teljesül. (1 pont)
Alkalmazhatjuk a G öf sr grárfa az Euler-formulát: $e+2=n+t=2n$. (3 pont)
(Egyébként G^* mindig öf, és mivel G izomorf vele, G automatikusan öf lesz.)
Mivel $e=n+2$, azt kapjuk, hogy $2n=e+2=n+2+2=n+4$, azaz $n=4$ és $e=6$. (1 pont)
A G egyszerű, összefüggő gráfnak 4 csúcsa van, ezért legfeljebb $\binom{n}{2}=\binom{4}{2}=6$ éle lehet, és ennyi is csak akkor, ha $G\cong K_4$. (1 pont)
Ha tehát létezik a feladatban leírt gráf, az csakis egy K_4-gyel izomorf gráf lehet. (1 pont)
Könnyű ellenőrizni, hogy K_4 síkbarajzolható és $K_4^*\cong K_4$. A keresett gráfok tehát a K_4-gyel izomorf gráfok. (1 pont)

3. Topologikusan izomorf-e az $l_G(1)=(2,5)$; $l_G(2)=(1,3,5)$; $l_G(3)=(2,4)$; $l_G(4)=(3,5)$; $l_G(5)=(1,2,4)$ szomszédossági listákkal megadott G gráf az $A(H)=\begin{pmatrix}0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1\\1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\end{pmatrix}$ szomszédossági mátrixszal megadott H gráffal?

A tanultak alapján megrajzoltuk a G és H gráfok egy-egy diagramját. (3+3 pont)

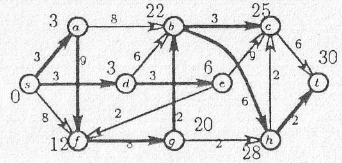
Mindkét gráf egy-egy él felosztásával kapható az F gráfból, (2 pont)
tehát mindkét gráf topologikusan izomorf F-fel, így egymással is. (2 pont)
Avagy az utolsó 4 pont helyett: a két gráf élszáma nem azonos (és így nem kaphatók meg egymásból a Whitney-féle operációkkal), ezért G és H nem *gyengén* izomorfak. (2 pont)



G H F

4. Határozzuk meg az alábbi PERT probléma optimális ütemezése melletti kritikus tevékenységeket!

Az alábbi ábrán az órán tanult módszerrel s,a,d,e,f,g,b,h,c,t sorrendben feldolgoztuk a gráf csúcsait, meghatároztuk az egyes tevékenységek legkorábbi kezdési időpontjait, és megjelöltük azokat az éleket, amik ezeket a legkorábbi időpontokat meghatározzák. (7 pont)



Azok a kritikus tevékenységek, amik rajta vannak egy megjelölt élekből álló *st* úton, (1 pont)
konkrétan az s,a,f,g,b,h és t tevékenységek, (2 pont)
és 30 egységnyi idő kell a PERT feladataz optimális ütemezés melletti végrehajtásához. (0 pont)

5. Bizonyítsuk be, hogy NP-teljes az a π döntési probléma, aminek a bemenete egy $100n$ pontú irányítatlan gráf, a kimenete pedig pontosan akkor „*igen*", ha G-nek van legalább n pontú köre.

Az NP-teljesség igazolásához egyrészt azt kell megmutatni, hogy π NP-beli, másrészt pedig azt, hogy bármely NP-beli probléma polinomiálisan visszavezethető π-re. (1 pont)
Utóbbi tulajdonság helyett (a polinomiális visszavezethetőség tranzitivitása miatt) elég azt igazolni, hogy egy NP-teljes probléma visszavezethető π-re. (1 pont)
Ha tehát G egy $100n$-pontú gráf, akkor ebben egy legalább n pontú kör létezése polinom időben ellenőrizhető, amennyiben tanúként megadják e kör pontjait és a sorrendjüket, hisz legfeljebb $100n$ él létezését kell ellenőriznünk. (1 pont)
Az NP-nehézség igazolásához a tudottan NP-teljes HAM (Hamilton kör) problémát vezetjük vissza π-re. (1 pont)
Az a feladatunk, hogy a HAM probléma tetszőleges inputjához (azaz tetszőleges G gráfhoz) az input méretének polinomjával felülről becsülhető számú lépésben olyan G' gráfot konstruáljunk, amelyre az alábbi két feltétel teljesül: (1) G' csúcsainak száma 100-zal osztható, ill. (2) G-nek pontosan akkor van Hamilton köre, ha G'-nek van olyan köre, ami G' csúcsainak legalább 100-adrészét tartalmazza. (3 pont)
Legyen G' az a gráf, ami a G gráf 100 diszjunkt példányából áll. (1 pont)
Világos, hogy G' bármely köre egyúttal G egy példányának is köre, ezért G'-nek pontosan akkor van a π problémában keresett köre, ha G-nek Hamilton köre van, nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (2 pont)

6. Igazoljuk, hogy ha m és n pozitív egészek, akkor $d(n)d(m)=d(lnko(n,m))d(lkkt(n,m))$ teljesül, ahol $d(k)$ a k pozitív osztóinak számát, $lnko(n,m)$ és $lkkt(n,m)$ pedig rendre az n és m legnagyobb közös osztóját ill. legkisebb közös többszörösét jelölik.

Tegyük fel, hogy $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ ill. $m=p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k}$, ahol $\alpha_i=0$ ill. $\beta_i=0$ is megengedett. (2 pont)
Tanultuk, hogy $lnko(n,m)=p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)}\cdot p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)}\cdot\ldots\cdot p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}$ ill. $lkkt(n,m)=p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)}\cdot p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)}\cdot\ldots\cdot p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}$, (3 pont)
Így az osztók számáról tanultak szerint $d(n)d(m)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)(\beta_1+1)(\beta_2+1)\ldots(\beta_k+1)=(\alpha_1+1)(\beta_1+1)\ldots(\alpha_k+1)(\beta_k+1)$ (1 pont)
ill. $d(lnko(n,m))d(lkkt(n,m))=(\min(\alpha_1,\beta_1)+1)(\min(\alpha_2,\beta_2)+1)\ldots(\min(\alpha_k,\beta_k)+1)(\max(\alpha_1,\beta_1)+1)(\max(\alpha_2,\beta_2)+1)\ldots(\max(\alpha_k,\beta_k)+1)=(\min(\alpha_1,\beta_1)+1)(\max(\alpha_1,\beta_1)+1)\ldots(\min(\alpha_k,\beta_k)+1)(\max(\alpha_k,\beta_k)+1)$. (2 pont)
Minden i-re teljesül, hogy $(\alpha_i+1)(\beta_i+1)=(\min(\alpha_i,\beta_i)+1)(\max(\alpha_i,\beta_i)+1)$, (1 pont)
ezért a fenti két szorzat egyenlő. Ezzel a feladat állítását igazoltuk. (1 pont)