Felsőbb matematika vizsga – 2014-01-21

Név ____ **Neptun** ____________

Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható.

1. Tekintsük a 2-elemű $\mathbb{F}_2$ test fölötti 5-dimenziós tér alábbi öt vektorát: $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,0,0)$, $\mathbf{v}_2 = (1,0,1,1,1)$, $\mathbf{v}_3 = (0,1,0,1,0)$, $\mathbf{v}_4 = (0,1,0,0,1)$, $\mathbf{v}_5 = (1,1,1,0,1)$. Hány dimenziós az általuk kifeszített altér? Állítsuk elő a $\mathbf{w} = (1,1,1,1,1)$ vektort ezek lineáris kombinációjaként! *(2 pont)*

2. Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a standard bázisra vonatkozó mátrixát, amely a valós 3-dimenziós teret az $(1,-3,3)$ vektor irányában az $x+y+z=0$ síkra vetíti! *(2 pont)*

3. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix redukált szinguláris felbontását, és ezt használva írjuk fel azt az 1-rangú mátrixot, mely Frobenius-normában a legközelebb van $\mathbf{A}$-hoz. *(2 pont)*

4. Írjuk fel az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix első oszlopát az $(5,0)$ vektorba vivő Givens-forgatás $\mathbf{G}$ és Householder-tükrözés $\mathbf{H}$ mátrixát! *(2 pont)*

5. Mely mátrixok diagonalizálhatók a valós test fölött? (röviden indokoljuk a választ!) *(1.5 pont)*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *c)* $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Egy 8×8-as $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei 1 és 2. Az $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 6, 4, 3, 3, az $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 7, 6, 5, 5. Írjuk fel Jordan-féle normálalakját! *(2 pont)*

7. Mi a kapcsolat egy mátrix primitvitása és sajátértékei között? *(1 pont)*

8. Számítsuk ki az alábbi vektor- és mátrixnormákat! *a)* $\|(3,4,5)\|_3$, *b)* $\|\mathbf{A}^{-1}\|_2$, ha $\mathbf{A}$ szinguláris értékei 3, 3, 2, 2. *c)* $\|\mathbf{B}\|_2$, ha $\|\mathbf{B}^{\mathsf{H}}\|_2 = 3$, $\|\mathbf{B}^{-1}\|_2 = 2$ és $\mathbf{B}$ egyik szinguláris értéke 2. *(1.5 pont)*

9. Fogalmazzuk meg a mátrixok unitér diagonalizálhatóságára vonatkozó tételt, és írjuk le a tételben szereplő két legfontosabb fogalom definícióját is! *(2 pont)*

10. Adjunk meg egy olyan n-dimenziós vektort, mely minden olyan pozitív $\mathbf{A}_{n\times n}$ mátrixnak sajátvektora, melyben mindegyik sorösszeg c! Ezt fölhasználva mutassuk meg, hogy e mátrixnak c a spektrálsugara. *(2 pont)*

11. Igazoljuk, hogy bármely komplex mátrix esetén $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\bar{\mathbf{A}})$, ahol $\bar{\mathbf{A}}$ az $\mathbf{A}$ mátrix elemenkénti konjugáltja. *(3 pont)*

12. Igazoljuk, hogy különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek egymástól! *(4 pont)*