ANALÍZIS(1) **VIZSGADOLGOZAT** **2006. jan. 19.**

Mérnök Informatikus szak Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (10 pont)

a) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^7+3}{n+5}}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$

b) Konvergens-e a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor?

Megoldás:

a)

$$b_n = \sqrt[n]{\frac{3}{6}}\,\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n]{\frac{3}{n+5n}} < a_n < \sqrt[n]{\frac{n^7+3n^7}{5}} = \sqrt[n]{\frac{4}{5}}\,\left(\sqrt[n]{n}\right)^7 = c_n$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ és $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p} = 1 \ (p>0)$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ és $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \,.$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$, tehát nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele,

így a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens.

2. feladat (10 pont)

Bizonyítsa be, hogy $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = 1$!

Megoldás:

$$\frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{A}{k+1} + \frac{B}{k} \quad \ldots \quad A=-1\,,\ B=1$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\,(k+1)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-1}{k+1}+\frac{1}{k}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{-1}{2}+1\right)+\left(\frac{-1}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{-1}{4}+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{-1}{n+1}+\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1, \qquad \text{konvergens a sor, összege } 1\,.$$

3. feladat (17 pont)

$$f(x) = \begin{cases} -2x + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-1}\,, & \text{ha} \quad x \neq 1 \\ -2\,, & \text{ha} \quad x = 1 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = ?\,;\quad \lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = ?\,;\quad \lim\limits_{x \to 1} f(x) = ?$

b) $f'(x) = ?\,,$ ha $x \in \mathbb{R}$

c) Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken az f függvény

- szigorúan monoton,
- alulról konvex vagy alulról konkáv!

Indokoljon!

Megoldás:

a)

$$f(1+0) = \lim_{x \to 1+0} (-2x + \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\downarrow\, +\infty}) = -2 + \frac{\pi}{2}$$

$$f(1-0) = \lim_{x \to 1-0} (-2x + \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\downarrow\, -\infty}) = -2 - \frac{\pi}{2}$$

$$f(1-0) \neq f(1+0) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to 1} f(x) \nexists$$

b) $f'(1) \nexists$, mert a függvény nem folytonos $x = 1$-ben, mivel nem létezik a pontban a határérték.
Ha $x \neq 1$, akkor f differenciálható, mert differenciálható függvények összetétele és

$$f'(x) = -2 + \frac{1}{1 + \left(\dfrac{1}{x-1}\right)^2} \quad \frac{-1}{(x-1)^2} = -2 - \frac{1}{(x-1)^2 + 1}$$

c) f szigorúan monoton csökken a $(-\infty, 1)$ és az $(1, \infty)$ intervallumokon, mivel itt $f'(x) < 0$.

$$f''(x) = \frac{2\,(x-1)}{\left((x-1)^2 + 1\right)^2}$$

f alulról konkáv $(-\infty, 1)$- en, mert itt $f''(x) < 0$
f alulról konvex $(1, \infty)$- en, mert itt $f''(x) > 0$

4. feladat (8+5=13 pont)

a) Adjon szükséges feltételt lokális szélsőérték létezésére differenciálható függvénynél az értelmezési tartomány belső pontjában! Állítását bizonyítsa be!

b) Van-e lokális szélsőértéke az $f(x) = \mathrm{e}^{x^5+x^3+5x}$ függvénynek?

Megoldás:

a) T Ha f a c helyen differenciálható és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(c) = 0$. $(K_{c,\delta} \subset D_f)$

B Pl. lokális maximumra:

$$\lim_{h\to -0} \underbrace{\frac{f(c+h)-f(c)}{h}}_{\frac{-}{-}} = \underbrace{f'_-(c) = f'(c)}_{\text{deriválhatóság miatt}} \geq 0$$

$$\lim_{h\to +0} \underbrace{\frac{f(c+h)-f(c)}{h}}_{\frac{-}{+}} = f'_+(c) = f'(c) \leq 0$$

$\Longrightarrow \quad f'(c) = 0 \quad$ (vízszintes érintő) ∎

b) $f'(x) = \mathrm{e}^{x^5+x^3+5x} \cdot (5x^4 + 3x^2 + 5) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ szigorúan monoton nő $\mathbb{R}$-en, tehát nincs lokális szélsőértéke.

5. feladat (10 pont)

Adja meg az alsó integrálközelítő és a felső integrálközelítő összeg definícióját!

A határozott integrál definíciójával bizonyítsa be, hogy

$$\int_a^b c \ \mathrm{d}x = c\,(b-a) \qquad\qquad (c \in \mathbb{R})$$

Megoldás:

D Alsó közelítő összeg (vagy alsó összeg): (a rögzített F felosztáshoz tartozik)

$$s_F = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \qquad\qquad m_k = \inf_{x\in I_k}\{f(x)\} \quad (\exists, \text{Dedekind})$$

D Felső közelítő összeg (vagy felső összeg): (a rögzített F felosztáshoz tartozik)

$$S_F = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \qquad M_k = \sup_{x\in I_k} \{f(x)\} \quad (\exists, \text{Dedekind})$$

$f(x) \equiv c$ esetén:

$$s_F = \sum_{k=1}^{n} m_k \, \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} c \cdot \Delta x_k = c \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = c\,(b-a) \quad \forall\, F\text{-re.}$$

$$S_F = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} c \cdot \Delta x_k = c\,(b-a) \quad \forall\, F\text{-re.}$$

Így $\quad h = \sup\{s_F\} = c\,(b-a) = \inf\{S_F\} = H\,.$

Tehát

$$\int_a^b c \, \mathrm{d}x = c\,(b-a)$$

6. feladat (17 pont)*

a) $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+8} \, \mathrm{d}x = ?$

b) $\displaystyle\int \frac{4x^2+11}{4x^2+8} \, \mathrm{d}x = ?$

c) $\displaystyle\int \frac{2x}{4x^2+8} \, \mathrm{d}x = ?$

d) $\displaystyle\int x \sqrt[5]{2x^2+6} \, \mathrm{d}x = ?$

Megoldás:

a) $$\int \frac{1}{4x^2+8} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{8} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{8} \, \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C$$

b) $$\int \frac{4x^2+11}{4x^2+8} \, \mathrm{d}x = \int \frac{(4x^2+8)+3}{4x^2+8} \, \mathrm{d}x = \int 1 \, \mathrm{d}x + 3 \int \frac{1}{4x^2+8} \, \mathrm{d}x =$$

$$= x + 3\,\frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

(Felhasználtuk az a) feladat megoldását.)

c) $$\int \frac{2x}{4x^2+8} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int \underbrace{\frac{8x}{4x^2+8}}_{\frac{f'}{f}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \ln(4x^2+8) + C$$

d) $\displaystyle\int x\,\sqrt[5]{2x^2+6}\;\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{4}\int \underbrace{4x\,\left(2x^2+6\right)^{1/5}}_{f'\,f^{1/5}}\;\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{4}\,\frac{\left(2x^2+6\right)^{6/5}}{\frac{6}{5}} \;+\;C$

7. feladat (12 pont)*

a) $\displaystyle\int (x+2)\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x \;=?$

b) $\displaystyle\int (x+2)\,\mathrm{e}^{x^2+4x}\,\mathrm{d}x \;=?$

Megoldás:

a) $$\int \underset{\substack{u=(x+2)\\ u'=1}}{(x+2)}\;\underset{\substack{v'=\mathrm{e}^{3x}\\ v=\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{3x}}}{\mathrm{e}^{3x}}\;\mathrm{d}x \;=\; \frac{x+2}{3}\,\mathrm{e}^{3x} \;-\; \frac{1}{3}\int \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{x+2}{3}\,\mathrm{e}^{3x} \;-\; \frac{1}{3}\,\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} \;+\;C$$

b) $$\int (x+2)\,\mathrm{e}^{x^2+4x}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}\int \underbrace{(2x+4)\,\mathrm{e}^{x^2+4x}}_{f'\,\mathrm{e}^{f}}\;\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2+4x} \;+\;C$$

8. feladat (11 pont)*

$\displaystyle\int \frac{1\;+\;\sqrt[3]{x}}{3x\;+\;\sqrt[3]{x^2}}\;\mathrm{d}x \;=?$ ($t=\sqrt[3]{x}$ helyettesítéssel dolgozzon!)

Megoldás:

$$t=\sqrt[3]{x} \quad\Longrightarrow\quad x=t^3 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}x=3t^2\,\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{1+t}{3t^3+t^2}\;3t^2\;\mathrm{d}t \;=\; \int \frac{3t+3}{3t+1}\;\mathrm{d}t \;=\; \int \frac{(3t+1)+2}{3t+1}\;\mathrm{d}t \;=$$

$$=\; \int \left(1\;+\;\frac{2}{3t+1}\right)\;\mathrm{d}t \;=\; t\;+\;2\,\frac{\ln|3t+1|}{3}\;+\;C$$

$$\Longrightarrow\quad \int \frac{1\;+\;\sqrt[3]{x}}{3x\;+\;\sqrt[3]{x^2}}\;\mathrm{d}x \;=\; \sqrt[3]{x}\;+\;\frac{2}{3}\;\ln|3\,\sqrt[3]{x}+1|\;+\;C$$

Pótfeladat (csak az elégséges és közepes vizsgához javítjuk ki):

9. feladat (10 pont)

a)

$f(x) \;=\; \left(2+\operatorname{ch}^2 x\right)^{5x^2}$, $\qquad f'(x) \;=?$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} - 3}{3^{2n+1} + 5^n} = ?$$

Megoldás:

a) $f(x) = e^{5x^2 \cdot \ln(2+\mathrm{ch}^2 x)}$

$$f'(x) = e^{5x^2 \cdot \ln(2+\mathrm{ch}^2 x)} \cdot \left(5x^2 \cdot \ln(2+\mathrm{ch}^2 x)\right)' =$$

$$= e^{5x^2 \cdot \ln(2+\mathrm{ch}^2 x)} \left(10x \ \ln(2+\mathrm{ch}^2 x) + 5x^2 \ \frac{2\,\mathrm{ch}\,x \ \mathrm{sh}\,x}{2+\mathrm{ch}^2 x}\right)$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} - 3}{3^{2n+1} + 5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2^n - 3}{3 \cdot 9^n + 5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\left(\frac{2}{9}\right)^n - 3\left(\frac{1}{9}\right)^n}{3 + \left(\frac{5}{9}\right)^n} = \frac{0-0}{3+0} = 0$$

10. feladat (10 pont)

Keresse meg az alábbi függvény lineáris aszimptotáját $+\infty$-ben!

$$f(x) = \sqrt{9x^2 + 5x + 4}$$

$$\left(A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad B = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - Ax\right)\right)$$

Megoldás:

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 5x + 4}}{x} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{x^2}}{x}}_{=\frac{|x|}{x}=1} \sqrt{9 + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}} = 3$$

$$B = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 5x + 4} - 3x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 5x + 4} - 3x\right) \frac{\sqrt{9x^2 + 5x + 4} + 3x}{\sqrt{9x^2 + 5x + 4} + 3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{9x^2 + 5x + 4 - 9x^2}{\sqrt{9x^2 + 5x + 4} + 3x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{x}{x}}_{=1} \frac{5 + \frac{4}{x}}{\sqrt{9 + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}} + 3} = \frac{5}{3+3} = \frac{5}{6}$$

A *-gal jelölt feladatokból legalább 16 pontot el kell érni!