A3 Pótzh, 2012 ősz

1. Zh pótlás

1. Oldja meg az $y'\cos y - x = 0$, $y(0) = \pi/6$ kezdetiérték-problémát!

MO. $y' = \frac{x}{\cos y}$ szétválasztható változójú. 2p

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{\cos y} \rightsquigarrow \int \cos y \,\mathrm{d}y = \int x \,\mathrm{d}x \rightsquigarrow \sin y = \frac{x^2}{2} + c \rightsquigarrow y = \arcsin(\frac{x^2}{2} + c)$$

5p

$\pi/6 = y(0) = \arcsin(c) \rightsquigarrow c = \frac{1}{2} \rightsquigarrow y = \arcsin(\frac{x^2+1}{2})$ 3p

10p

2. Oldja meg a $3yx^2 - (x^3 + 2y^4)y' = 0$ differenciálegyenletet!

MO. $(3yx^2)_y = 3x^2$, $(-x^3-2y^4)_x = -3x^2$, tehát nem egzakt, de $\frac{(-x^3-2y^4)_x-(3yx^2)_y}{3yx^2} = \frac{-2}{y}$, így $e^{\int -2/y} = \frac{1}{y^2}$-el végigszorozva a $3x^2y{-1} + (-x^3y^{-2} - 2y^2)y' = 0$ egzakt egyenletet kapjuk. 6p

$$u = \int 3x^2y^{-1}\,\mathrm{d}x = x^3y^{-1} + c(y)$$

$$\rightsquigarrow -x^3y^{-2} - 2y^2 = u_y = -x^3y^{-2} + c'(y) \rightsquigarrow c'(y) = -2y^2 \rightsquigarrow c(y) = -\frac{2}{3}y^3 + c$$

6p

tehát $u = x^3y^{-1} - \frac{2}{3}y^3 + c$, vagyis $x^3y^{-1} - \frac{2}{3}y^3 = c$ megoldásai az általános megoldás.

2p

14p

3. Oldja meg az $y'' - y' - 2y = 4x^2$ differenciálegyenletet.

MO. (1) Homogén. Karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. Megoldásai: $\lambda = 2, -1$. A homogén egyenlet általános megoldása: $y_{ha} = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$. 3p
(2) Inhomogén partikuláris megoldása: $4x^2 = e^{0x}(4x^2\cos 0x + 0\sin 0x)$ és $0 + 0i$ a karakterisztikus egyenletnek nem gyöke, ezért y_{ip}-t $ux^2 + vx + w$ alakban keressük. 4p

Visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe $4x^2 = -2ux^2 - 2(u+v)x + 2u - v - 2w$, tehát $u = -2$, $v = 2$ és $w = -3$, azaz $y_{ip} = -2x^2 + 2x - 3$, és így $y_{ia} = y_{ha} + y_{ip} = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} - 2x^2 + 2x - 3$. 3p

10p

2. Zh pótlás

4. Folytonos ill. deriválható-e az $f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z} & \text{ha } z \neq 0 \\ 0 & \text{ha } z = 0 \end{cases}$ függvény az origoban.

MO. Folytonos 0-ban, mert $\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}^2}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}^3}{|z|^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3e^{-i\varphi}}{r^2} = 0$. 5p
Nem deriválható 0-ban, mert $\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}^2}{z^2}$ nem létezik, hiszen a valós tengely mentén 1, az $y = x$ egyenes mentén pedig $\frac{\bar{z}}{z} = \frac{x+ix}{x-ix} = i$ miatt -1. 4p

5. Oldja meg a $\overline{\cos iz} = \cos i\bar{z}$ egyenletet a komplex számok körében!

MO. $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$
és $\overline{e^z} = \overline{e^x(\cos y + i\sin y)} = e^x(\cos -y + i\sin -y) = e^{\bar{z}}$ ha $z = x + iy$,
ezért $\overline{\cos iz} = \overline{\frac{1}{2}(e^{-z} + e^{z})} = \frac{1}{2}(e^{-\bar{z}} + e^{\bar{z}}) = \cos i\bar{z}$
vagyis az egyenletet minden $z \in \mathbb{C}$ kielégiti.

6. Számítsa ki $\int_C \frac{z}{9-z^2}\,dz$-t ha C a 2 középpontú 2 sugarú pozitívan irányított körvonal!

MO. $\frac{z}{9-z^2} = \frac{z}{(3-z)(3+z)} = \frac{f(z)}{z-3}$, ahol $f(z) = \frac{-z}{3+z}$.
Mivel f holomorf a 2 középpontú 2 sugarú körlapon, a Cauchy integrálformula szerint $\int_C \frac{z}{9-z^2}\,dz = \int_C \frac{f(z)}{z-3}\,dz = 2\pi i f(3) = -\pi i$.