1. zh, VIK Villamosmérnök, 2022. ősz

(Minden feladat 10 pontot ér, indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat időtartama 90 perc.)

1. **a)** Igazolja a halmazműveletek definícióira hivatkozva, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra, ha $C \subseteq A$, akkor $A \cup (B \cap C) = A$! **b)** Igaz-e minden A, B, C halmazra, hogy ha $A \cup (B \cap C) = A$, akkor $C \subseteq A$?

MO. a) $\subseteq$ Legyen $x \in A \cup (B \cap C)$. Ekkor az első esetben, azaz $x \in A$-t feltéve, készen vagyunk. A második esetben, ha $x \in B \cap C$, akkor a $\cap$ definíciója értelmében $x \in C$ is, de mivel $C \subseteq A$ a feltétel miatt, így $x \in A$. $\supseteq$ Ha $x \in A$, akkor az $\cup$ definíciója miatt $x \in A \cup (B \cap C)$. b) Nem igaz. Legyen $A = B = \varnothing$ és $C = \{0\}$. Ekkor $A \cup (B \cap C) = \varnothing = A$, de $C = \{0\} \nsubseteq \varnothing = A$.

2. Legyen $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ két olyan térvektor, amire $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| \neq 0$ teljesül! Igazolja, hogy ha $\mathbf{a}$ merőleges $\mathbf{b}$-re, akkor $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ is merőleges $\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$-re!

MO. Két nemnulla vektor merőleges egymásra, pontosan akkor, ha skaláris szorzatuk nulla: $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})(\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}\mathbf{b}^2 + (2 - \frac{1}{2})\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 + (2 - \frac{1}{2})\mathbf{ab} = 0 + 0 = 0$

3. Írja fel annak az f egyenesnek az egyenletét, ami az $S : x - y + z = 4$ egyenletű síkban van, merőleges az $x = 3 + 4t, y = t, z = 1 - t$ egyenletrendszerű e egyenesre és áthalad az e és az S közös pontján!

MO. Az e és S egyenletei együtt: $x - y + z = 4, x = 3 + 4t, y = t, z = 1 - t \rightsquigarrow 3 + 4t - t + 1 - t = 4 \rightsquigarrow t = 0$, és innen $(x, y, z) = (3, 0, 1)$ az f egy pontja. f benne van az S síkban és merőleges e-re, így $\mathbf{v}_f = \mathbf{n}_S \times \mathbf{v}_e$ egy alkalmas irányvektor f számára. $\mathbf{n}_S = (1, -1, 1)$ és $\mathbf{v}_e = (4, 1, -1)$, így

$$\mathbf{v}_f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0, 5, 5) \parallel (0, 1, 1)$$

Innen pedig f egyenletrendszere: $x = 3, y = t, z = 1 + t$.

4. Oldja meg a komplex számok halmazán a $|z|^2 + z^2 = 2 - 2i$ egyenletet!

MO. Legyen $z = x + iy$, ahol $x, y \in \mathbf{R}$. Ekkor $x^2 + y^2 + x^2 - y^2 + 2xyi = 2 - 2i$, azaz $2x^2 + 2xyi = 2 - 2i$. Innen a két komponens egyenlősége miatt: $x^2 = 1 \rightsquigarrow x_{12} = \pm 1$. $2xy = -2$ miatt pedig $y_{12} = \mp 1$. Tehát a megoldások: $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 + i$.

5. Konvergensek-e a következő sorozatok, és ha igen, mi a határértékük?

$$\text{a) } a_n = \frac{2^n + 3^n - \sin(8^n)}{2^n + 5^n}, \qquad \text{b) } b_n = \frac{n^3 + (-5)^n}{n + 3^n}$$

MO. a) $a_n = \dfrac{2^n + 3^n - \sin(8^n)}{2^n + 5^n} = \dfrac{(2/5)^n + (3/5)^n - (\sin(8^n)/5^n)}{1 + (2/5)^n}$, így hivatkozva arra, hogy $q^n \to 0$, ha $|q| < 1$, hogy $(-\sin(8^n))$ korlátos, és hogy a határértékképzés invariáns az alapműveletekre, a sorozat konvergens és a határértéke $\frac{0+0}{1+0} = 0$. b) $\dfrac{n^3 + (-5)^n}{n + 3^n} = \dfrac{(n^3/3^n) + (-5/3)^n}{1 + (n/3^n)}$, így hivatkozva arra, hogy $n, n^3 << 3^n$ és hogy $b_{2k} \to \infty$ amiatt, hogy a határértékképzés invariáns az alapműveletekre, és $q^n \to \infty$, ha $q > 1$, a sorozat nem konvergens.

6.1. Igazak-e az alábbi állítások minden z és w komplex számra?
a) $\arg z - \arg w = \arg(z - w)$ b) $\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w = \operatorname{Re}(z - w)$
6.2. Hány megoldása van a komplex számok halmazán a $z^4 = -16$ egyenletnek?
6.3. Hány olyan $\mathbf{x}$ térvektor van, amire az alábbi egyenletek *együttesen* fennállnak?

$$\mathbf{x} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}, \mathbf{x} \cdot \mathbf{i} = 0$$

MO. 6.1. a) Hamis. $z = i, w = 1$, akkor $\arg z - \arg w = \pi/2 \neq 3\pi/4 = \arg(z - w)$. b) Igaz, algebrai alakban, $z = x + ix$, $w = a + bi$: $\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w = \operatorname{Re}(x + iy) - \operatorname{Re}(a + ib) = x - a = \operatorname{Re}(x - a + i(y - b)) = \operatorname{Re}(x + iy - (a + ib)) = \operatorname{Re}(z - w)$.
6.2. A gyökképlet miatt 4.
6.3.

$$\mathbf{x} \times \mathbf{i} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, x_3, -x_2) = (0, 0, 1) \rightsquigarrow x_2 = -1, x_3 = 0, x_1 = 0 \rightsquigarrow \mathbf{x} = -\mathbf{j}. \text{ Egy ilyen van.}$$

iMSc. Legyen $\{H_i\}_{i=0}^{\infty}$ tetszőleges halmazcsalád, aminek minden eleme a valós számok halmazának egy részhalmaza. a) Igaz-e, hogy ha az $x \in \mathbf{R}$ szám az $\bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ halmaznak torlódási pontja, akkor *minden* $i \in \mathbf{N}$-re x torlódási pontja H_i-nek. b) Igaz-e, hogy ha az $x \in \mathbf{R}$ szám torlódási pontja a $\bigcap_{i=0}^{\infty} H_i$ halmaznak, akkor *minden* $i \in \mathbf{N}$-re x torlódási pontja H_i-nek.

MO. H' jelöli a H halmaz torlódási pontjainak halmazát. a) Nem igaz. Legyen $H_0 = (0, 1)$ és $H_i = \varnothing$, ha $i > 0$. Ekkor $0 \in \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} H_i\right)' = (0, 1)' = [0, 1]$, de $0 \notin H_1' = \varnothing' = \varnothing$.
b) Igaz. Legyen $x \in \left(\bigcap_{i=0}^{\infty} H_i\right)'$ és i_0 tetszőleges. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $y \in B_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$, hogy $y \in \bigcap_{i=0}^{\infty} H_i$. De akkor $y \in H_{i_0}$ is, azaz $y \in (B_\varepsilon(x) \setminus \{x\}) \cap H_{i_0}$, így $x \in H_{i_0}'$.
Valójában elég belátni, hogy ha $X \subseteq Y$, akkor $X' \subseteq Y'$, hiszen $\bigcap_{i=0}^{\infty} H_i \subseteq H_i$, és a kérdés, hogy $\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} H_i\right)' \subseteq H_i'$ igaz-e ($i \in \mathbf{N}$ tetszőleges). Az előbbi pedig igaz. Legyen ugyanis $u \in X'$ és $\varepsilon > 0$. Ekkor ε-hoz létezik $x \in X$, hogy $x \in B_\varepsilon(u) \setminus \{u\}$. De $x \in X \subseteq Y$, így éppen ez az ε és x azt is mutatja, hogy van u-tól különböző Y-beli is, ami $B_\varepsilon(u) \setminus \{u\}$-ben van, tehát $u \in Y'$.