POINCARÉ-TÉTEL:

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[(-1)^{n+1}\cdot\sum_{1\le j_1<\cdots<j_i\le n}\mathbf{P}\left(A_{j_1}\cdot A_{j_2}\cdot\ldots\cdot A_{j_i}\right)\right]$$

BOOLE-EGYENLŐTLENSÉGEK:

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i), \qquad \mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) \ge 1-\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i)$$

FELTÉTELES VALÓSZÍNŰSÉG:

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}$$

TELJES VALÓSZÍNŰSÉG TÉTELE:

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{P}(B \mid A_i)\mathbf{P}(A_i)$$

BAYES-TÉTEL:

$$\mathbf{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbf{P}(B \mid A_i)\mathbf{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{P}\left(B \mid A_j\right)\mathbf{P}\left(A_j\right)}$$

ELOSZLÁS- ÉS SŰRŰSÉGFÜGGVÉNYEK:

Binomiális: $X \in B(n,p)$

$$p_k = \mathbf{P}(X=k) = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

Geometriai: $X \in G(p)$

$$p_k = \mathbf{P}(X=k) = p\cdot(1-p)^{k-1}$$

Poisson: $X \in Po(\lambda)$

$$p_k = \mathbf{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

Egyenletes: $X \in U(a,b)$

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X<x) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$f_X(x) = F_X'(x) = \frac{1}{b-a}$$

Exponenciális: $X \in E(\lambda)$

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X<x) = 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

$$f_X(x) = F_X'(x) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Normális: $X \in N(\mu,\sigma)$

$$F_X(x) = \Phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt$$

$$f_X(x) = \varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Standard normális: $X \in N(0,1)$

$$\Phi_{0,1}(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$\varphi_{0,1}(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

Normális felírása standard normálissal:

$$\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma}\cdot\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

VÁRHATÓ ÉRTÉK, SZÓRÁS(NÉGYZET):

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot \mathbf{P}(X = x_i) \qquad \text{(diszkrét)}$$

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx \qquad \text{(folytonos)}$$

$$\sigma^2(X) = \mathbf{E}\left[\left(X - \mathbf{E}(X)\right)^2\right]$$

Steiner-tétel:

$$\sigma^2(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}^2(X)$$

Binomiális: $X \in B(n,p)$

$$\mathbf{E}(X) = n \cdot p$$

$$\sigma^2(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Geometriai: $X \in G(p)$

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Poisson: $X \in Po(\lambda)$

$$\mathbf{E}(X) = \lambda$$

$$\sigma^2(X) = \lambda$$

Egyenletes: $X \in U(a,b)$

$$\mathbf{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exponenciális: $X \in E(\lambda)$

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma^2(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Normális: $X \in N(\mu,\sigma)$

$$\mathbf{E}(X) = \mu$$

$$\sigma^2(X) = \sigma^2$$

Standard normális: $X \in N(0,1)$

$$\mathbf{E}(X) = 0$$

$$\sigma^2(X) = 1$$

Markov-egyenlőtlenség $(X \geq 0, \exists \mathbf{E}(X) \leq 0, \lambda \geq 0)$

$$\mathbf{P}(X > \lambda) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{\lambda}$$

Csebisev-egyenlőtlenség $(X \geq 0, \exists \sigma(X), \lambda \geq 0)$

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| > \lambda) \leq \frac{\sigma(X)}{\lambda^2}$$

EGYÜTTES ELOSZLÁSOK:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\, dv du$$

Függetlenség:

Ha X és Y függetlenek, akkor:

$$\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \cdot \mathbf{P}(Y = y)$$
$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$
$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Peremeloszlás az együttesből:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy$$

<u>Összegek eloszlása:</u>

Ha $Z = X + Y$, akkor:

$$\mathbf{P}(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}(X = i, Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}(X = k - i, Y = i)$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t, z - t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(z - t, t)\, dt$$

<u>Konvolúció:</u>

Ha $Z = X + Y$, valamint X és Y függetlenek, akkor:

$$\mathbf{P}(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}(X = i) \cdot \mathbf{P}(Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}(X = k - i) \cdot \mathbf{P}(Y = i)$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) \cdot f_Y(z - t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - t) \cdot f_Y(t)\, dt$$

<u>Összeg várható értéke:</u>

$$\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$$

<u>Szorzat várható értéke:</u>

Ha X és Y függetlenek, akkor:

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$$

<u>Kovariancia:</u>

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbf{E}\Big(\big(X - \mathbf{E}(X)\big) \cdot \big(Y - \mathbf{E}(Y)\big)\Big) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$$
$$\mathrm{cov}(X, X) = \sigma^2(X)$$
$$\mathrm{cov}(aX + bY, Z) = a \cdot \mathrm{cov}(X, Z) + b \cdot \mathrm{cov}(Y, Z), \text{ ha } a, b \in \mathbb{R}$$

<u>Összeg (és különbség) szórásnégyzete:</u>

$$\sigma^2(X \pm Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) \pm 2\mathrm{cov}(X, Y)$$

<u>Korrelációs együttható:</u>

$$\mathbf{R}(X, Y) = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}$$

<u>Korrelálatlanság:</u>

X és Y korrelálatlanok, ha $\mathrm{cov}(X, Y) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{R}(X, Y) = 0$.

Ha X és Y függetlenek, akkor korrelálatlanok. (Fordítva általában <u>nem</u> igaz.)

<u>Kovarianciamátrix:</u>

A $\underline{\underline{\Sigma}}$ mátrix az $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ valószínűségi vektorváltozó kovarianciamátrixa, ha:

$$\underline{\underline{\Sigma}}_{i,j} = \mathrm{cov}\big(X_i, X_j\big)$$

<u>FELTÉTELES SŰRŰSÉGFÜGGVÉNY:</u>

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

<u>REGRESSZIÓ (FELTÉTELES VÁRHATÓ ÉRTÉK):</u>

$$\mathbf{E}(X|Y=y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(X = x_i, Y = y) = r(y) \Longrightarrow \mathbf{P}\big(\mathbf{E}(X|Y) = r(y)\big) = \mathbf{P}(Y = y)$$

$$\mathbf{E}(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x|y)\, dx = r(y) \Longrightarrow \mathbf{E}(X|Y) = r(Y)$$