Villamosmérnök A1 (2018 ősz) 1. vizsga ZH

Minden feladat 10 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Konvergensek-e a következő sorok, és ha igen, mi a határértékük? (a) $\sqrt[3]{\frac{\sin n^3}{n}}$ (b) $\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}$

Megoldás. (a) sin korlátos és $1/n \to 0$, így $\frac{\sin n^3}{n} \to 0$, következésképp $\sqrt[3]{\frac{\sin n^3}{n}} \to 0$.
(b) $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n \to e^2 > 7$, ezért valamilyen indextől $\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2} = \left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)^n > 7^n \to \infty$, tehát $\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2} \to \infty$

2. Hol folytonos, és ahol nem, ott milyen szakadása van az $\frac{x^2+x}{(x+1)\sin x}$ függvénynek a $[-\pi/2, 3\pi/2]$ intervallumon?

Megoldás. $f(x) = \frac{x^2+x}{(x+1)\sin x}$ folytonos függvények hányadosa, tehát a nevező 0-helyeinek (-1, 0 és π) kivételével folytonos.
-1: $\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{x}{\sin x} = \frac{-1}{\sin -1}$, vagyis f-nek itt megszüntethető szakadása van. (Az első egyenlőség azért igaz, mert a két függvény csak -1-ben tér el egymástól, tehát a -1-beli határértékeik megegyeznek.)
0: $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{x}{\sin x} = 1$, vagyis f-nek itt is megszüntethető szakadása van. (Az első egyenlőség azért igaz, mert a két függvény csak -1-ben tér el egymástól, tehát van 0-nak olyan környezete, ahol nem.)
π: $\lim_{x\to\pi-0} f(x) = \lim_{x\to\pi-0} \frac{x}{\sin x} = \infty$, vagyis f-nek itt másodfajú szakadása van. (Az első egyenlőség azért igaz, mert a két függvény csak -1-ben tér el egymástól, tehát van π-nek olyan környezete, ahol nem.)

3. Legyen $f(x) = xe^{x^2}$. (a) Hány gyöke van az $f(x) = 0$ egyenletnek? (b) Mi f értékkészlete?

Megoldás. (a) $x = 0$ gyök, és több nincs, mert f az egész számegyenesen deriválható, és $f'(x) = e^{x^2} + xe^{x^2}2x = (1+2x^2)e^{x^2} > 0$ miatt f szigorúan monoton nő.
(b) $\lim_{\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, tehát minden valós számnál vesz fel kisebbet és nagyobbat is, ezért, és mert folytonos $\mathbb{R}$-en, a Bolzano-tétel miatt minden valós számot felvesz. Vagyis az értékkészlete $\mathbb{R}$.

4. (a) $\int \sin 2x \, dx = ?$ (b) $\int_e^{e^2} \frac{2}{x} \, dx = ?$

Megoldás. (a) $\int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$ (b) $\int_e^{e^2} \frac{2}{x} \, dx = 2\ln x\Big|_e^{e^2} = 2(2-1) = 2$

5. (a) $\int x \ln x \, dx = ?$ (b) $\int \sqrt[3]{1+2x} \, dx = ?$

Megoldás. (a) $\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2} \, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$
(b) $\int \sqrt[3]{x} \, dx = \frac{3}{4}x^{4/3} \rightsquigarrow \int \sqrt[3]{1+2x} \, dx = \frac{3}{8}(1+2x)^{4/3} + C$

6. (1) Mondja ki a Weierstrass-tételt!
(2) (a) Deriválható-e az $f(x) = \int_2^x e^{-t^2} \, dt$ függvény $\mathbb{R}$-en és (b) ha igen, mi a deriváltfüggvénye?
(3) Igazak-e a következő állítások? (a) Ha f deriválható egy korlátos intervallumon, akkor integrálható is ott. (b) Ha f folytonos $H \subseteq \mathbb{R}$-en és felvesz H-n pozitív és negatív értéket is, akkor felveszi H-n a 0-t is.

Megoldás. (1) Zárt korlátos intervallumon folytonos függvény korlátos és felveszi az intervallum képének infimumát és supremumát.
(2) Igen, mert az integrandus folytonos; és $f'(x) = e^{-x^2}$.
(3a) Igen, mert ha deriválható, akkor folytonos is.
(3b) Nem, pl. a sgn függvény $H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$-n.

IMSc-feladat. Igazolja, hogy ha a_n konvergens sorozat, akkor a $b_n = \inf\left\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\right\}$ sorozat is konvergens, és $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$!

Megoldás. Legyen $\lim a_n = A$; akkor minden $\epsilon > 0$-ra van N küszöbindex, hogy $(\forall n \geq N)|a_n - A| < \epsilon/2$. De akkor $(\forall n \geq N)|b_n - A| < \epsilon$, vagyis b_n is A-hoz tart.