

Jelek és rendszerek II.

I. HÁZI FELADAT VILLAMOSMÉRNÖK SZAKOS HALLGATÓK RÉSZÉRE

Név	Szvoboda Márk
Neptun kód	BFAXW5
Házi feladat kódja	1733100602
Beadási határidő:	7. oktatási hét

Megjegyzések: Le kell töltenie a feladatlapot (a hálózat és a gerjesztőjel adataival együtt), továbbá a hálózat ábráját, és ezeket a megoldással együtt írásban kell benyújtani. Ha javítás, illetve részfeladat külön beadása miatt többször adja be a házi feladatot, minden alkalommal az előző részeket is és a feladatlapot is be kell adni. Javítás esetén a hibás részt kicserélni nem szabad még akkor sem, ha valamelyik feladat megoldását előlről kezdi. A javítást külön lapon kell mellékelni, megjelölve, melyik pont korrekciójáról van szó. Ügyeljen az áttekinthető és világos külalakra! A teljes megoldást minden esetben részletesen le kell írni, nem elegendő a végeredményeket közölni! A numerikus számításokra és az ábrák elkészítésére természetesen alkalmazhat számítógépi programokat (MATLAB, DERIVE stb.), de a megoldás elvi lépéseit ekkor is részletesen ismertetni kell.

Gyakorlatvezető neve:

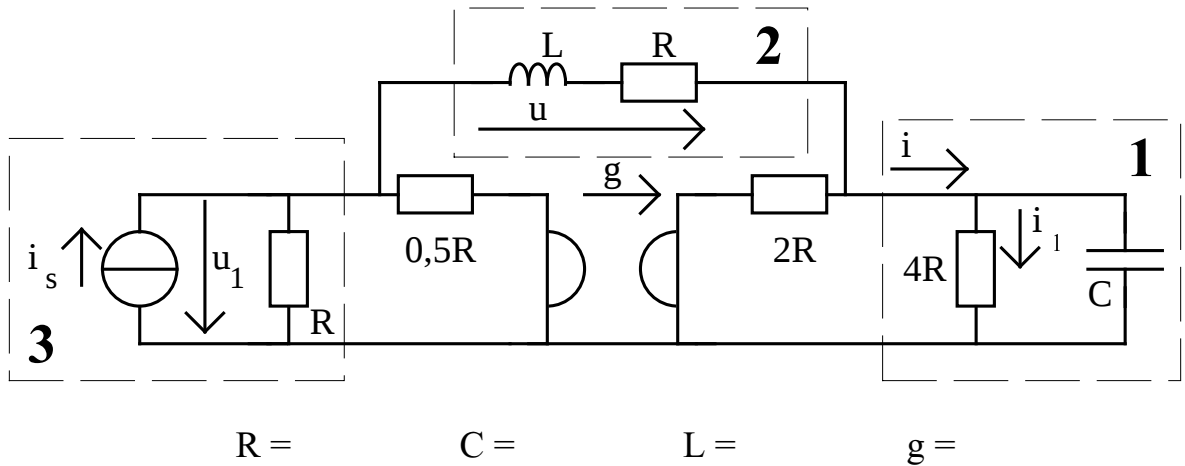
Javító véleménye (elfogadás, javítások):

Az ábrán megadott lineáris invariáns hálózat **gerjesztése az áramforrás árama, válasza a 02 kimeneti jel.**

H17

Válaszjel: u , u_1 , i , i_1

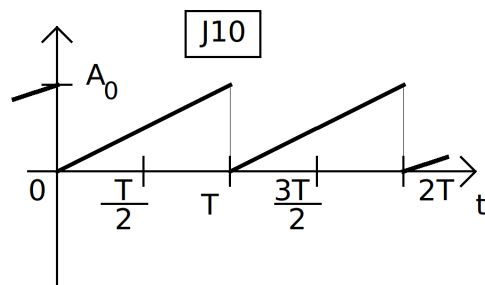
A vizsgált kétpólus: 1, 2, 3



R	C	L	g
10Ω	$200nF$	$120\mu H$	$150mS$

1. feladat

A hálózat gerjesztése az alábbi periodikus jel:



A_0	T/τ	τ
$(10\text{ V})/R$	1.05	$\tau = 1 \cdot CR$

- 1.1 Határozza meg ezen periodikus jel legalább négy (nem zérus) harmonikust tartalmazó Fourier-polinomját! Írja fel a Fourier-polinomot komplex és valós együtthatós alakban!
- 1.2 Határozza meg a jel effektív értékét pontosan és a választott Fourier-polinom közelítésben is! Adja meg a közelítés relatív hibáját!

- 1.3 Határozza meg a rendszer átviteli karakterisztikáját!
- 1.4 Határozza meg a válasz Fourier-polinomját az előző feladatban számított közelítésben!
Határozza meg közelítőleg a válasz effektív értékét!
- 1.5 (Nem kötelező!) Rajzolja fel az átviteli karakterisztika Bode- és Nyquist-diagramját!

2. feladat

A gerjesztés az 1. feladatban megadott jel első periódusa; a $(0, T)$ intervallumon kívül zérus a jel értéke.

- 2.1 Határozza meg az aperiodikus gerjesztő jel komplex spektrumát!
- 2.2 Ábrázolja az amplitúdóspektrumot, és ennek alapján adja meg a jel sávszélességét!
($\varepsilon = 0.05$)
- 2.3 Írja fel a válasz komplex spektrumát!

3. feladat

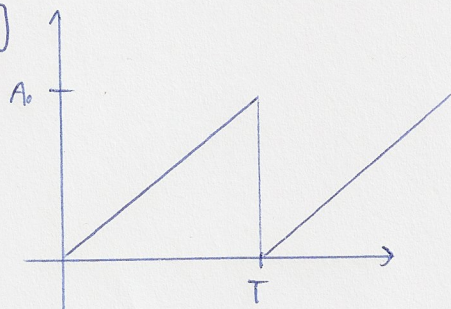
- 3.1 Határozza meg az átviteli függvényt! Számítsa ki az átviteli függvény pólusait és zérusait, vázolja fel a pólus-zérus elrendezést!
- 3.2 Határozza meg az impulzusválaszt az átviteli függvény alapján, és vázolja az impulzusválasz időfüggvényét!
- 3.3 Határozza meg a választ, ha a gerjesztőjel a 2. pont szerinti aperiodikus jel! Vázolja a válaszjelet!

4. feladat

A feladat megoldása nem kötelező! Ellenőrizze a számításokat a TINA hálózatanalízis program segítségével!

1. feladat

1.1



$$A_0 = \frac{10V}{10\Omega} = 1A$$

$$i(t) = A_0 \cdot \frac{t}{T}$$

Fourier sor, való alak:

$$i(t) = \hat{I}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\hat{I}_k^A \cos(k\omega_0 t) + \hat{I}_k^B \sin(k\omega_0 t) \right)$$

$$\hat{I}_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T A_0 \cdot \frac{t}{T} dt = \frac{A_0}{T^2} \int_0^T t dt = \frac{A_0}{T^2} \cdot \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^T = \frac{A_0}{T^2} \cdot \frac{T^2}{2} = \underline{\underline{\frac{A_0}{2}}}$$

$$\hat{I}_k^A = \frac{2}{T} \int_0^T i(t) \cdot \cos(k\omega_0 t) dt = 0$$

$$\hat{I}_k^B = \frac{2}{T} \int_0^T i(t) \cdot \sin(k\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T A_0 \cdot \frac{t}{T} \cdot \sin(k\omega_0 t) dt = \frac{2A_0}{T^2} \int_0^T t \cdot \sin(k\omega_0 t) dt =$$

$$= \frac{2A_0}{T^2} \cdot \left(\left[t \cdot \frac{-\cos(k\omega_0 t)}{k\omega_0} \right]_0^T - \int_0^T 1 \cdot \frac{-\cos(k\omega_0 t)}{k\omega_0} dt \right) = \frac{2A_0}{T^2} \cdot \left(\left(T \cdot \frac{-\cos(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T)}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} - 0 \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k\omega_0} \cdot \left[\frac{\sin(k\omega_0 t)}{k\omega_0} \right]_0^T \right) = \frac{2A_0}{T^2} \cdot \left[\left(T \cdot \frac{-\cos(k \cdot 2\pi)}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \right) + \frac{1}{k\omega_0} \cdot \left(\frac{\sin(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T)}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} - 0 \right) \right] =$$

$$= \frac{2A_0}{T^2} \cdot \left[\left(\frac{-T}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \right) + 0 \right] = \frac{2A_0}{T^2} \cdot \left(\frac{-T^2}{k \cdot 2\pi} \right) = -\frac{2A_0}{k \cdot 2\pi} = \underline{\underline{-\frac{A_0}{k \cdot \pi}}}$$

$$i(t) = \frac{A_0}{2} + \left[\frac{A_0}{\pi} \sin(\omega_0 t) + \frac{A_0}{2\pi} \sin(2\omega_0 t) + \frac{A_0}{3\pi} \sin(3\omega_0 t) + \frac{A_0}{4\pi} \sin(4\omega_0 t) \right]$$

$$i(t) = 0,5 + (-0,3183 \sin(\omega_0 t)) + (-0,1591 \sin(2\omega_0 t)) + (-0,1061 \sin(3\omega_0 t)) + (-0,0795 \sin(4\omega_0 t))$$

$$i(t) = 0,5 - [0,3183 \sin(\omega_0 t) + 0,1591 \sin(2\omega_0 t) + 0,1061 \sin(3\omega_0 t) + 0,0795 \sin(4\omega_0 t)]$$

A

1.1

Fourier - sorfejtés komplex együtthatók alakban:

$$I_0^c = \bar{I}_0 = \frac{A_0}{2} = 0,5 \text{ [A]}$$

$$\begin{aligned} I_k^c &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A_0 \cdot \frac{t}{T} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} dt = \frac{A_0}{T^2} \cdot \int_0^T t \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} dt = \\ &= \frac{A_0}{T^2} \cdot \left\{ \left[t \cdot \frac{e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t}}{-j \cdot k \cdot \omega_0} \right]_0^T - \int_0^T \frac{e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t}}{-j \cdot k \cdot \omega_0} dt \right\} = \frac{A_0}{T^2} \cdot \left\{ -T \cdot \frac{e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot T}}{j \cdot k \cdot \omega_0} + \frac{1}{j \cdot k \cdot \omega_0} \cdot \int_0^T e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} dt \right\} = \\ &= \frac{A_0}{T^2} \cdot \left\{ -T \cdot \frac{e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot T}}{j \cdot k \cdot \omega_0} + \frac{1}{j \cdot k \cdot \omega_0} \cdot \left[\frac{e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t}}{-j \cdot k \cdot \omega_0} \right]_0^T \right\} = \frac{A_0}{T^2} \cdot \left\{ -T \cdot \frac{e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot T}}{j \cdot k \cdot \omega_0} - \frac{e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot T} - 1}{(j \cdot k \cdot \omega_0)^2} \right\} = \\ &= A_0 \cdot \left\{ -\frac{e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot T}}{j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot T} - \frac{e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot T} - 1}{(j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot T)^2} \right\} \end{aligned}$$

$$A_0 = 1 \text{ A} ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} ; \quad \text{valamint } e^{-j \cdot 2k\pi} = \cos(2k\pi) - i \cdot \sin(2k\pi) = 1, \text{ ha } k \text{ egész}$$

$$I_k^c = A_0 \cdot \left\{ -\frac{e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T}}{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T} - \frac{e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T} - 1}{(j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T)^2} \right\} = A_0 \cdot -\frac{1}{j \cdot k \cdot 2\pi} = -\frac{A_0}{j \cdot k \cdot 2\pi} = j \cdot \frac{A_0}{2k\pi}, \quad k \neq 0$$

$$i(t) = \bar{I}_0^c + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\bar{I}_k^c \cdot e^{j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t}) = \underline{\underline{0,5 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(j \cdot \frac{1}{2k\pi} \cdot e^{j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} \right)}} ; \quad k \neq 0$$

Közelítés:

$$i(t) \approx 0,5 + j \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot e^{j \omega_0 t} + j \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot e^{j 2 \omega_0 t} + j \cdot \frac{1}{6\pi} \cdot e^{j 3 \omega_0 t} + j \cdot \frac{1}{8\pi} \cdot e^{j 4 \omega_0 t}$$

$$\omega_0 = 2,9919 \text{ Mrad/s}$$

1.2) I gerjestet' effektiv' i'ntele pontosan:

$$\begin{aligned} I_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left(A_0 \cdot \frac{t}{T}\right)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T A_0^2 \cdot \frac{t^2}{T^2} dt} = \\ &= \sqrt{\frac{A_0^2}{T^3} \cdot \int_0^T t^2 dt} = \sqrt{\frac{A_0^2}{T^3} \cdot \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^T} = \sqrt{\frac{A_0^2}{T^3} \cdot \frac{T^3}{3}} = \sqrt{\frac{A_0^2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot A_0 = \underline{\underline{\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot A_0}} \end{aligned}$$

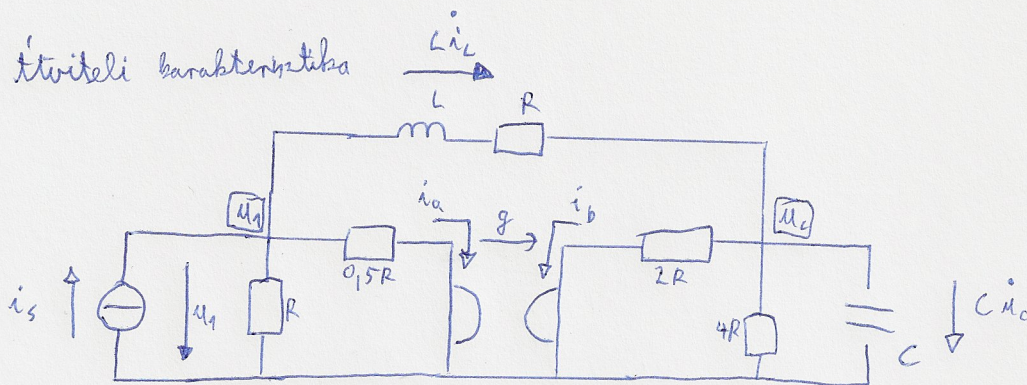
$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot 1 \text{ A} = \underline{\underline{0,5773 \text{ A}}}$$

$$I_{\text{eff fourier}} = \sqrt{0,5^2 + \left(\frac{-0,3183}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-0,1591}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-0,1061}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-0,0795}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$I_{\text{eff fourier}} = \underline{\underline{0,5675 \text{ A}}}$$

$$\text{Relativ' Riba: } H = \frac{I_{\text{eff}} - I_{\text{eff fourier}}}{I_{\text{eff}}} \cdot 100 = \frac{0,5773 - 0,5675}{0,5773} \cdot 100 = \underline{\underline{1,697\%}}$$

1.3 Átviteli karakterisztika



Állóirati egyenletek:

$$(1) \quad \frac{u_1}{R} + i_L + i_a - i_s = 0$$

$$(2) \quad \frac{u_c}{4R} + C \dot{u}_c - i_L + i_b = 0$$

$$(3) \quad 0,5R \cdot i_a - \frac{1}{g} \cdot i_b - u_1 = 0$$

$$(4) \quad 2R i_b + \frac{1}{g} i_a - u_c = 0$$

$$(5) \quad \frac{u_1 - L \dot{i}_L - u_c}{R} - i_L = 0$$

tr állapotráltozás leírás normálalakja:

$$\dot{u}_c = -0,3427 u_c + 4,0322 i_L + 0,9677 i_s$$

$$\dot{i}_L = -0,0099 u_c - 0,1182 i_L + 0,0349 i_s$$

$$u_1 = -0,1935 u_c - 4,1935 i_L + 4,1935 i_s$$

Kohérens egységrendszer: $[V; A; \Omega; s; MF; MH; \text{ms}; \text{Mrad/s}]$

tr egyenletrendszert MAPLE 17 segédprogrammal oldottam meg.

$$R = 10 \Omega; \quad C = 0,2 \mu F; \quad L = 120 \mu H; \quad g = 0,15 S$$

Kapott mátrixok:

$$A = \begin{bmatrix} -0,3427 & 4,0322 \\ -0,0099 & -0,1182 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0,9677 \\ 0,0349 \end{bmatrix}; \quad C^T = \begin{bmatrix} -0,1935 & -4,1935 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 4,1935 \end{bmatrix}$$

Mivel az A mátrix r.e.-ei kisebbek, mint 0 -a, így a rendszer aszimptotikusan stabilis, így létezik az átviteli karakterisztika.

$$\lambda_1 = -0,2304 + 0,1653j$$

$$\lambda_2 = -0,2304 - 0,1653j$$

Ennek meghatározása Mathlab segítségével:

$$\Rightarrow [num, den] = ss2tf(A, B, C, D)$$

$$num = 4,1935 \quad 1,5992 \quad 0,2779$$

$$den = 1 \quad 0,4609 \quad 0,0804$$

Létezik az átviteli karakterisztika:

$$H(j\omega) = \frac{u_1}{i_s} = \frac{4,19(j\omega)^2 + 1,59j\omega + 0,27}{(j\omega)^2 + 0,46j\omega + 0,0804}$$

1.4) a) vektor Fourier-polinomja

$$i(t) = 0,5 - 0,3183 \sin(\omega_0 t) - 0,1591 \sin(2\omega_0 t) - 0,1061 \sin(3\omega_0 t) - 0,0795 \sin(4\omega_0 t) \quad [A]$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2,1} \approx 2,9919 \text{ Mrad/s}$$

$$\omega = 0$$

$$0,5 \cdot H(j\omega) = 0,5 \cdot \frac{0 + 0 + 0,2779}{0 + 0 + 0,0804} \approx 1,73 \text{ V}$$

$$\omega = \omega_0 = 2,9919 \text{ Mrad/s}$$

$$-0,3183 \cdot H(j\omega) = -0,3183 \cdot \frac{4,1935 \cdot j^2 \cdot 2,9919^2 + 1,5992 \cdot j \cdot 2,9919 + 0,2779}{j^2 \cdot 2,9919^2 + 0,4609 \cdot j \cdot 2,9919 + 0,0804} = 1,3318 \cdot e^{-178,48^\circ}$$

$$\omega = 2\omega_0 = 5,9838 \text{ Mrad/s}$$

$$-0,1591 \cdot H(j\omega) = -0,1591 \cdot \frac{4,1935 \cdot j^2 \cdot 5,9838^2 + 1,5992 \cdot j \cdot 5,9838 + 0,2779}{j^2 \cdot 5,9838^2 + 0,4609 \cdot j \cdot 5,9838 + 0,0804} = 0,6668 \cdot e^{-179,23^\circ}$$

$$\omega = 3\omega_0 = 8,9757 \text{ Mrad/s}$$

$$-0,1061 \cdot H(j\omega) = -0,1061 \cdot \frac{4,1935 \cdot j^2 \cdot 8,9757^2 + 1,5992 \cdot j \cdot 8,9757 + 0,2779}{j^2 \cdot 8,9757^2 + 0,4609 \cdot j \cdot 8,9757 + 0,0804} = 0,4448 \cdot e^{-179,49^\circ}$$

$$\omega = 4\omega_0 = 11,9676 \text{ Mrad/s}$$

$$-0,0795 \cdot H(j\omega) = -0,0795 \cdot \frac{4,1935 \cdot j^2 \cdot 11,9676^2 + 1,5992 \cdot j \cdot 11,9676 + 0,2779}{j^2 \cdot 11,9676^2 + 0,4609 \cdot j \cdot 11,9676 + 0,0804} = 0,3333 \cdot e^{-179,62^\circ}$$

a) vektor tért:

$$u_1(t) = 1,73 + 1,3318 \cdot \cos(\omega_0 t - 178,48^\circ) + 0,6668 \cdot \cos(2\omega_0 t - 179,23^\circ) + 0,4448 \cdot \cos(3\omega_0 t - 179,49^\circ) + 0,3333 \cdot \cos(4\omega_0 t - 179,62^\circ) \quad [V]$$

a) vektor effektív értéke:

$$u_{1\text{eff}} = \sqrt{1,73^2 + \left(\frac{1,3318}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0,6668}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0,4448}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0,3333}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1,9961 \approx 2 [V]$$

2. feladat

2.1) tr aperiodikus, gerjesztés jel komplex spektruma:

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \left(A_0 \cdot \frac{t}{T}\right) \cdot (\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)) \\
 \mathcal{F}\{i(t)\} &= \int_0^T i(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^T \left(A_0 \cdot \frac{t}{T}\right) \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{A_0}{T} \cdot \int_0^T t \cdot e^{-j\omega t} dt = \\
 &= \frac{A_0}{T} \cdot \left\{ \left[t \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_0^T - \int_0^T \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} dt \right\} = \frac{A_0}{T} \cdot \left\{ -T \cdot \frac{e^{-j\omega T}}{j\omega} + \frac{1}{j\omega} \int_0^T e^{-j\omega t} dt \right\} = \\
 &= \frac{A_0}{T} \cdot \left\{ -T \cdot \frac{e^{-j\omega T}}{j\omega} + \frac{1}{j\omega} \cdot \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_0^T \right\} = \frac{A_0}{T} \cdot \left\{ -T \cdot \frac{e^{-j\omega T}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega T} - 1}{(j\omega)^2} \right\} = \\
 &= A_0 \cdot \left\{ -\frac{e^{-j\omega T}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega T} - 1}{(j\omega)^2 T} \right\}
 \end{aligned}$$

$$A_0 = 1 \text{ A}$$

$$T = 2,1 \mu\text{s}$$

$$\mathcal{F}\{i(t)\} = -\frac{e^{-2,1j\omega}}{j\omega} - \frac{0,4761 e^{-j\omega \cdot 2,1} - 0,4761}{(j\omega)^2}$$

* Fourier-transzformáció definíciója:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

* feladat viszont megadta nekünk, hogy a gerjesztés az I. feladatban megadott jel első periódusa; a $(0, T)$ intervallumon kívül zérus a jel értéke.

Vagyis:

$$x(t) = \begin{cases} A_0 \cdot \frac{t}{T} & \text{ha } 0 < t < T \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ezek alapján oldottam meg fentebb a feladatot.

2.2

Matlab kód:

$$\Rightarrow \omega_m = -29.9199 : 0.01 : 29.9199;$$

a körfrekvencia bl. 10%-ig eltérő

$$\Rightarrow I_{om} = (-\exp(-2.1 * j * \omega_m) ./ (j * \omega_m) - (\exp(-2.1 * j * \omega_m) - 1) ./ (2.1 * (j * \omega_m)^2));$$

$$\Rightarrow \text{plot}(\omega_m, \text{abs}(I_{om}), \omega_m, 0.05 * \max(\text{abs}(I_{om})) * \text{ones}(\text{size}(\omega_m)))$$

$$\Rightarrow \text{grid}$$

$$\Rightarrow \text{title}('t_1 \text{ amplitúdóspektrum}')$$

$$\Rightarrow \text{xlabel}(' \omega_m [\text{Mrad/s}]')$$

$$\Rightarrow \text{ylabel}(' |I(j\omega)|')$$

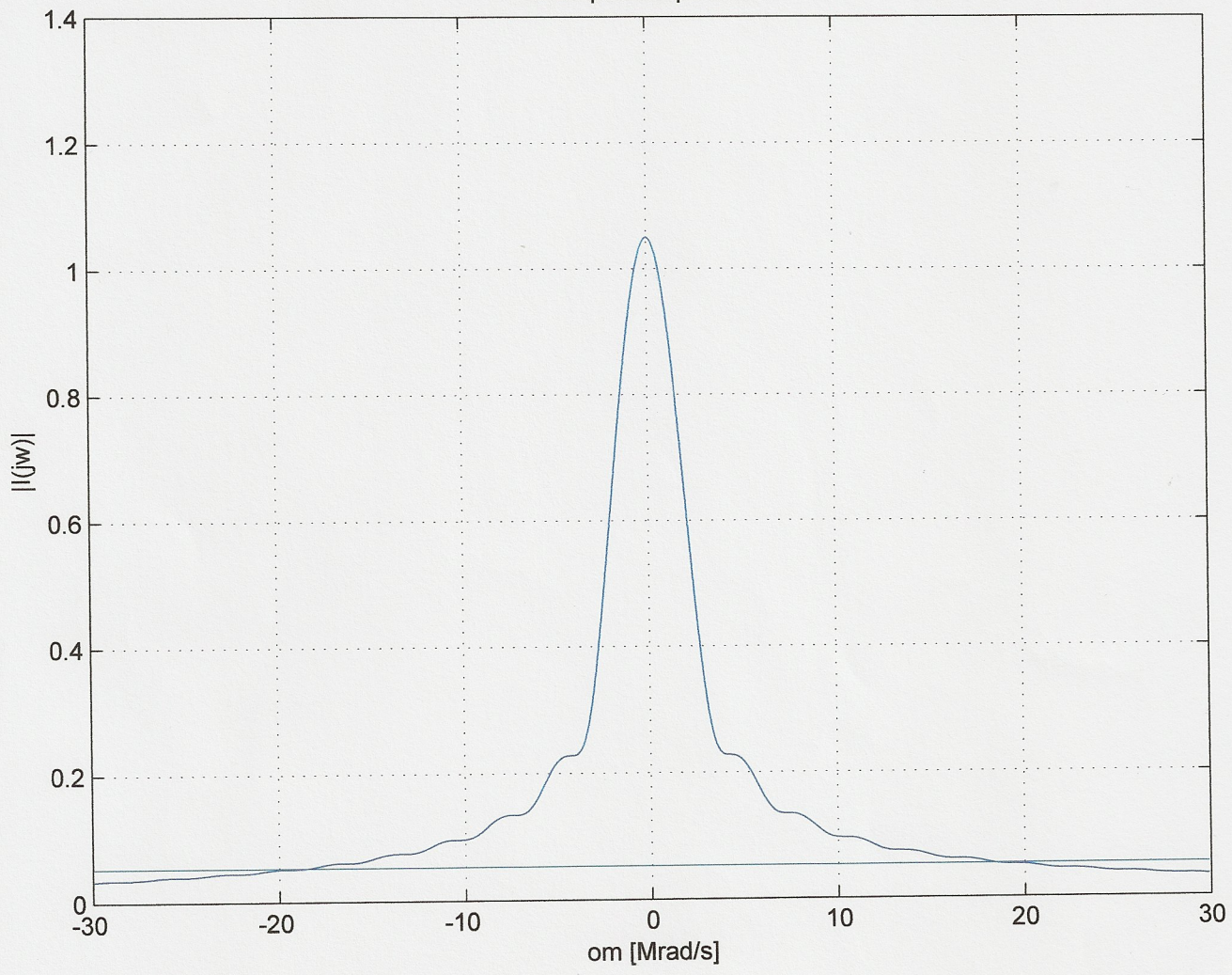
t_1 amplitúdóspektrum maximuma $\omega_1 = 0 \text{ Mrad/s}$ -nál található, értéke $1,05 \text{ A}$.

MATLAB segítségével, kellő nagysággal leolvasható, hogy a jel $\omega_2 = 18,5787 \frac{\text{Mrad}}{\text{s}}$ érték felett kerül a maximumának 5%-a alá.

Így a jel sávzélessége: $(\epsilon = 0,05)$

$$\underline{\underline{\Delta \omega_x = \omega_2 - \omega_1 = 18,5787 \text{ Mrad/s}}}$$

Az amplitúdóspektrum



2.3) a) nilai kompleks spektruma:

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot I(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = \frac{4,1935(j\omega)^2 + 1,5992(j\omega) + 0,2779}{(j\omega)^2 + 0,4609(j\omega) + 0,0804} \cdot \frac{-e^{-j\omega T} T j\omega - e^{-j\omega T} + 1}{(j\omega)^2 \cdot T}$$

$$Y(j\omega) = \frac{-e^{-j\omega T} T j\omega \cdot (4,1935(j\omega)^2 + 1,5992(j\omega) + 0,2779)}{(j\omega)^2 \cdot T \cdot ((j\omega)^2 + 0,4609(j\omega) + 0,0804)} +$$

$$+ \frac{-e^{-j\omega T} \cdot (4,1935(j\omega)^2 + 1,5992(j\omega) + 0,2779)}{(j\omega)^2 \cdot T \cdot ((j\omega)^2 + 0,4609(j\omega) + 0,0804)} +$$

$$+ \frac{1 \cdot (4,1935(j\omega)^2 + 1,5992(j\omega) + 0,2779)}{(j\omega)^2 \cdot T \cdot ((j\omega)^2 + 0,4609(j\omega) + 0,0804)}$$

$$Y(j\omega) = \frac{1,9969(j\omega)^2 + 0,7615(j\omega) + 0,1323}{(j\omega)^4 + 0,4609(j\omega)^3 + 0,0804(j\omega)^2} -$$

$$- \frac{1,9969(j\omega)^2 + 0,7615(j\omega) + 0,1323}{(j\omega)^4 + 0,4609(j\omega)^3 + 0,0804(j\omega)^2} \cdot e^{-2,1j\omega} -$$

$$- \frac{4,1935(j\omega)^2 + 1,5992(j\omega) + 0,2779}{(j\omega)^3 + 0,4609(j\omega)^2 + 0,0804(j\omega)} \cdot e^{-2,1j\omega}$$

3. feladat

3.1 Átviteli függvény:

Mivel a rendszer kauszális, ezért az átviteli karakterisztikából adódik az átviteli függvény, $j\omega = s$ helyettesítéssel. (A rendszer G-V stabilis)

$$H(s) = \frac{4,19s^2 + 1,599s + 0,2779}{s^2 + 0,46s + 0,0804}$$

Pólusok: ahol az átviteli függvény értéke ∞ , tehát a nevező 0.

$$s^2 + 0,46s + 0,08 = 0$$

Zérusok: ahol az átviteli függvény értéke 0, tehát a számláló 0.

$$4,19s^2 + 1,59s + 0,27 = 0$$

Ezek meghatározása MATLAB segítségével:

$$\Rightarrow \text{num} = [4.1935 \quad 1.5992 \quad 0.2779];$$

$$\Rightarrow \text{den} = [1.0000 \quad 0.4609 \quad 0.0804];$$

$$\Rightarrow [\text{pole}, \text{zero}] = \text{pzmap}(\text{num}, \text{den})$$

$$\text{pole} = \begin{array}{l} -0.2304 + 0.1653i \\ -0.2304 - 0.1653i \end{array}$$

$$\text{zero} = \begin{array}{l} -0.1907 + 0.1730i \\ -0.1907 - 0.1730i \end{array}$$

Ábrázolás MATLAB -val:

$$\Rightarrow \text{pzmap}(\text{num}, \text{den})$$

$$\Rightarrow \text{grid}$$



3.2) Az impulzusválaszt az átviteli függvény inverz Laplace transzformálásával kaphatjuk meg.

Parciális törtre bontás MATLAB segítségével:

$$\Rightarrow [r, p, k] = \text{residue}(num, den)$$

$$r = \begin{matrix} -0,1668 - 0,0530i \\ -0,1668 + 0,0530i \end{matrix}$$

$$p = \begin{matrix} -0,2304 + 0,1653i \\ -0,2304 - 0,1653i \end{matrix}$$

$$k = 4,1935$$

$$H(s) = \frac{4,19s^2 + 1,59s + 0,27}{s^2 + 0,46s + 0,08} = A + \frac{B}{s-p} + \frac{B^*}{s-p^*} = 4,1935 + \frac{-0,1668 - 0,053i}{s - (-0,2304 + 0,1653i)} + \frac{-0,1668 + 0,053i}{s - (-0,2304 - 0,1653i)}$$

Az impulzusválasz alakja:

$$R(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = k \cdot \delta(t) + r_1 e^{p_1 t} \varepsilon(t) + r_2 e^{p_2 t} \varepsilon(t)$$

$$R(t) = 4,1935 \delta(t) + [(-0,1668 - 0,053j) \cdot e^{-(0,2304 - 0,1653j)t} + (-0,1668 + 0,053j) \cdot e^{-(0,2304 + 0,1653j)t}] \cdot \varepsilon(t)$$

Zárójelfelbontásként és az Euler formulát alkalmazva:

$$R(t) = 4,1935 \cdot \delta(t) + [-0,1668 \cdot e^{-(0,2304 - 0,1653j)t} - 0,053j \cdot e^{-(0,2304 - 0,1653j)t} - 0,1668 \cdot e^{-(0,2304 + 0,1653j)t} + 0,053j \cdot e^{-(0,2304 + 0,1653j)t}] \cdot \varepsilon(t)$$

$$R(t) = 4,1935 \cdot \delta(t) + [-0,1668 \cdot e^{-0,2304t} \cdot e^{0,1653jt} - 0,053j \cdot e^{-0,2304t} \cdot e^{0,1653jt} - 0,1668 \cdot e^{-0,2304t} \cdot e^{-0,1653jt} + 0,053j \cdot e^{-0,2304t} \cdot e^{-0,1653jt}] \cdot \varepsilon(t)$$

$$R(t) = 4,1935 \cdot \delta(t) + 2 \cdot e^{-0,2304t} \cdot \left[-0,1668 \cdot \left(\frac{e^{0,1653jt} + e^{-0,1653jt}}{2} \right) - 0,053j \cdot \left(\frac{e^{0,1653jt} - e^{-0,1653jt}}{2j} \right) \right] \cdot \varepsilon(t)$$

$$R(t) = 4,1935 \cdot \delta(t) + 2 \cdot e^{-0,2304t} \cdot \left[-0,1668 \cdot \left(\frac{e^{0,1653jt} + e^{-0,1653jt}}{2} \right) + 0,053 \cdot \left(\frac{e^{0,1653jt} - e^{-0,1653jt}}{2j} \right) \right] \cdot \varepsilon(t)$$

$$R(t) = 4,1935 \cdot \delta(t) + 2 \cdot e^{-0,2304t} \cdot [-0,1668 \cdot \cos(0,1653t) + 0,053 \cdot \sin(0,1653t)] \cdot \varepsilon(t)$$

az impulzusválasz időfüggvénye:

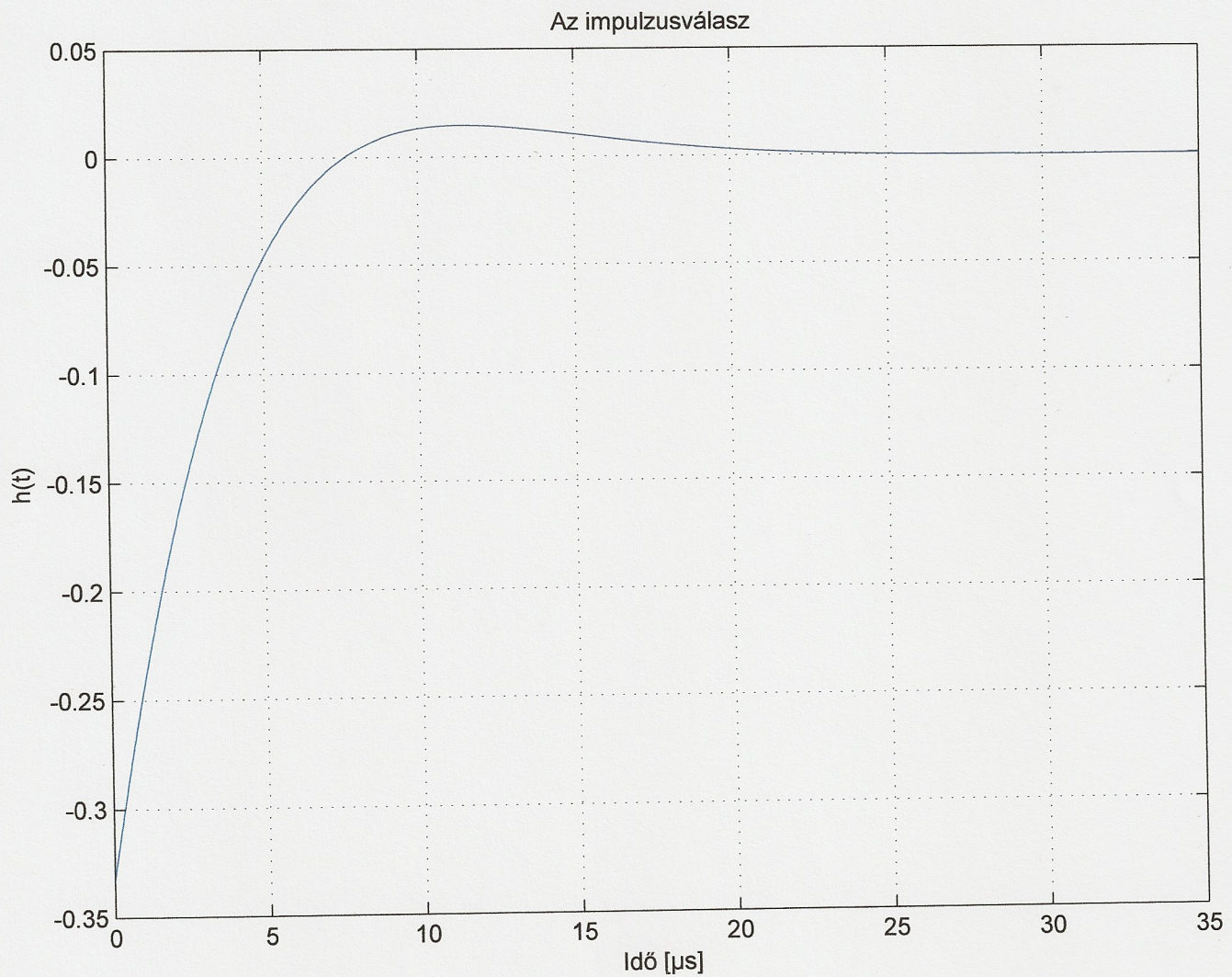
Előírása MATLAB segítségével:

⇒ $t = 0:0.001:35$;

⇒ $Rt = 4.1935 \cdot \text{dirac}(t) + 2 \cdot \exp(-0.2304 \cdot t) \cdot (-0.1668 \cdot \cos(0.1653 \cdot t) + 0.053 \cdot \sin(0.1653 \cdot t))$;

⇒ $\text{plot}(t, Rt)$

⇒ grid



$$Y(s) = H(s) \cdot \bar{I}(s)$$

$$Y(s) = \frac{4,1935s^2 + 1,5992s + 0,2779}{s^2 + 0,4609s + 0,0804} \cdot \frac{-e^{-sT}}{s^2T} = \frac{-e^{-sT}}{s^2T} \cdot \frac{4,1935s^2 + 1,5992s + 0,2779}{s^2 + 0,4609s + 0,0804}$$

$$Y(s) = \textcircled{I} + \textcircled{II} + \textcircled{III}$$

$$\textcircled{I} \quad \frac{4,1935s^2 + 1,5992s + 0,2779}{s^2 + 0,4609s + 0,0804} \cdot \frac{1}{s^2T} = \frac{1,9969s^2 + 0,7615s + 0,1323}{s^4 + 0,4609s^3 + 0,0804s^2}$$

$$\textcircled{II} \quad \frac{4,1935s^2 + 1,5992s + 0,2779}{s^2 + 0,4609s + 0,0804} \cdot \frac{e^{-sT} \cdot sT}{s^2T} = \frac{-4,1935s^2 - 1,5992s - 0,2779}{s^3 + 0,4609s^2 + 0,0804s} \cdot e^{-sT}$$

$$\textcircled{III} \quad \frac{4,1935s^2 + 1,5992s + 0,2779}{s^2 + 0,4609s + 0,0804} \cdot \frac{-e^{-sT}}{s^2T} = \frac{-1,9969s^2 - 0,7615s - 0,1323}{s^4 + 0,4609s^3 + 0,0804s^2} \cdot e^{-sT}$$

Jól látható hogy a $\textcircled{III}$ megegyezik a $[-\textcircled{I}]$ -vel, de T -vel el lesz tolva időben. ($T=2,1$)

Párciális törtekre bontás külön:

$$\textcircled{I} \quad \frac{1,6455}{s^2} + \frac{0,0383}{s} + \frac{-0,0192 - 1,0367i}{s - (-0,2304 + 0,1652i)} + \frac{-0,0192 + 1,0367i}{s - (-0,2304 - 0,1652i)}$$

$$\textcircled{II} \quad -\frac{3,4565}{s} + \frac{-0,3685 - 0,4956i}{s - (-0,2304 + 0,1652i)} + \frac{-0,3685 + 0,4956i}{s - (-0,2304 - 0,1652i)}$$

$$\textcircled{III} \quad -\frac{1,6455}{s^2} - \frac{0,0383}{s} + \frac{0,0192 + 1,0367i}{s - (-0,2304 + 0,1652i)} + \frac{0,0192 - 1,0367i}{s - (-0,2304 - 0,1652i)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 1,6455 \cdot t \cdot \varepsilon(t) + 0,0383 \cdot \varepsilon(t) +$$

$$\textcircled{I} \quad + 2 \cdot e^{-0,2304 \cdot t} \cdot [-0,0192 \cdot \cos(0,1652 \cdot t) + 1,0367 \cdot \sin(0,1652 \cdot t)] \cdot \varepsilon(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = -3,4565 \cdot \varepsilon(t - 2,1) +$$

$$\textcircled{II} \quad + 2 \cdot e^{-0,2304 \cdot (t-2,1)} \cdot [-0,3685 \cdot \cos(0,1652 \cdot (t-2,1)) + 0,4956 \cdot \sin(0,1652 \cdot (t-2,1))] \cdot \varepsilon(t-2,1)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = -1,6455 \cdot (t-2,1) \cdot \varepsilon(t-2,1) - 0,0383 \cdot \varepsilon(t-2,1) +$$

$$\textcircled{III} \quad + 2 \cdot e^{-0,2304 \cdot (t-2,1)} \cdot [0,0192 \cdot \cos(0,1652 \cdot (t-2,1)) - 1,0367 \cdot \sin(0,1652 \cdot (t-2,1))] \cdot \varepsilon(t-2,1)$$

3.3 a rendszer válaszának meghatározása

$$Y(t) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}}_{\text{I}} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}}_{\text{II}} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}}_{\text{III}}$$

$$\begin{aligned} Y(t) = & 1,6455 \cdot t \cdot \varepsilon(t) + 0,0383 \cdot \varepsilon(t) + \\ & + 2 \cdot e^{-0,2304 \cdot t} \cdot [-0,0192 \cdot \cos(0,1652 \cdot t) + 1,0367 \cdot \sin(0,1652 \cdot t)] \cdot \varepsilon(t) - \\ & - 3,4565 \cdot \varepsilon(t-2,1) + \\ & + 2 \cdot e^{-0,2304 \cdot (t-2,1)} \cdot [-0,3685 \cdot \cos(0,1652 \cdot (t-2,1)) + 0,4956 \cdot \sin(0,1652 \cdot (t-2,1))] \cdot \varepsilon(t-2,1) - \\ & - 1,6455 \cdot (t-2,1) \cdot \varepsilon(t-2,1) - 0,0383 \cdot \varepsilon(t-2,1) + \\ & + 2 \cdot e^{-0,2304 \cdot (t-2,1)} \cdot [0,0192 \cdot \cos(0,1652 \cdot (t-2,1)) - 1,0367 \cdot \sin(0,1652 \cdot (t-2,1))] \cdot \varepsilon(t-2,1) \end{aligned}$$

Ábrákészítés MATLAB segítségével:

$$\Rightarrow t = 0:0.001:12;$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Yt = & 0,0383 + 1,6455 \cdot t + 2 \cdot \exp(-0,2304 \cdot t) \cdot (-0,0192 \cdot \cos(0,1652 \cdot t) + \\ & + 1,0367 \cdot \sin(0,1652 \cdot t)) + (-3,4565 + 2 \cdot \exp(-0,2304 \cdot (t-2,1))) \cdot (-0,3685 \cdot \cos(0,1652 \cdot (t-2,1)) + \\ & + 1,0367 \cdot \sin(0,1652 \cdot (t-2,1))) + (-3,4565 + 2 \cdot \exp(-0,2304 \cdot (t-2,1))) \cdot (-0,3685 \cdot \cos(0,1652 \cdot (t-2,1)) + \\ & + 1,0367 \cdot \sin(0,1652 \cdot (t-2,1))) - 1,6455 \cdot (t-2,1) - 0,0383 + \\ & + 2 \cdot \exp(-0,2304 \cdot (t-2,1)) \cdot (0,0192 \cdot \cos(0,1652 \cdot (t-2,1)) - 1,0367 \cdot \sin(0,1652 \cdot (t-2,1))) \cdot \text{heaviside}(t-2,1); \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{plot}(t, Yt)$$

$$\Rightarrow \text{grid}$$

