Bevezetés a számításelméletbe II.
1. pótzárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2014. május 12.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Egy egyszerű gráf fokszámsorozata 7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,2. Mutassuk meg, hogy van a gráfban 12 csúcsú kör.

* * * * *

Ha töröljük a gráfból a 2 fokú csúcsot, (2 pont)
akkor minden csúcs foka legfeljebb eggyel csökken, (1 pont)
hiszen a gráf egyszerű. (1 pont)
A törlés után tehát minden megmaradt csúcs foka legalább 6. (1 pont)
Mivel ez a gráf is egyszerű, (1 pont)
és 12 csúcsa van, Dirac tétele szerint van benne Hamilton-kör, (2 pont)
ami az eredeti gráf egy 12 csúcsú köre. (2 pont)

2. Egy egyszerű gráf fokszámsorozata 6,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4. Mutassuk meg, hogy van a gráfban páratlan kör.

* * * * *

Egy gráfban pontosan akkor van páratlan kör, ha a gráf nem páros, (2 pont)
ezért elég azt megmutatnunk, hogy a kérdéses gráf nem páros. (1 pont)
Tegyük fel indirekten, hogy ez nem így van. Ekkor a gráf csúcshalmaza két részre osztható úgy, hogy az egyes részeken belül nem megy él. (1 pont)
A két részből kimenő élek száma ekkor azonos (és persze azonos a gráf éleinek számával). (1 pont)
Az egyes részekből kimenő élek száma nem más, mint a részben szereplő csúcsok fokszámainak összege. (1 pont)
A gráfunk fokszámösszege 50, tehát 25 éle van, (1 pont)
így a kérdéses két részre osztás nem lehetséges, hiszen a gráfban minden fok páros, tehát a csúcsok semelyik részhalmazának sem lehet páratlan (így speciálisan 25 sem) a fokszámösszege. (3 pont)

Megjegyzés. Azt, hogy a kérdéses kettéosztás nem lehetséges, természetesen számos más módon is meg lehet mutatni. Pl. egy kivételével minden fokszám osztható 4-gyel, így az egyik oldali fokszám-összeg osztható kéne legyen néggyel, de lehet nagyságrendi megfontolásokra is hivatkozni (6 darab 4-es nem elég a 25 élhez, stb.).

3. Egy páros gráf két pontosztálya $\{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$ és $\{b_1, b_2, \ldots, b_8\}$. Az a_i és b_j csúcsok közt pontosan akkor van él, ha az alábbi táblázat i-edik sorának j-edik eleme 1. Döntsük el, hogy van-e G-ben teljes párosítás.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A mátrixból látható, hogy az a_3, a_4, a_5, a_8 csúcsok minden szomszédja a b_2, b_5, b_8 csúcsok közül kerül ki, azaz $N(\{a_3, a_4, a_5, a_8\}) \subseteq \{b_2, b_5, b_8\}$. (5 pont)
Így nem létezhet a gráfban az összes a_i-t fedő párosítás, hiszen a felsorolt 4 csúcs mindegyike nem kaphat párt a 3 rendelkezésre álló lehetőségből. (4 pont)
Ezek szerint teljes párosítás sem létezik a gráfban. (1 pont)

Megjegyzés. Természetesen lehet a Hall- vagy Frobenius-tétellel is érvelni, de itt csak a könnyen belátható irányra van szükség. Jó megoldás az is, ha futtatjuk (és dokumentáljuk) a javítóutas algoritmust és az nem talál teljes párosítást.

4. Egy 20 csúcsú teljes gráfból töröljük

(a) egy háromszög

(b) egy 3 élű párosítás

éleit. Határozzuk meg mindkét esetben a kapott gráf kromatikus számát.

* * * * *

(a) A háromszög csúcsai kaphatják ugyanazt a színt, hiszen semelyik kettő sincs összekötve a gráfban, a többi csúcsot pedig színezzük egy-egy új színnel. (1 pont)
Ekkor a gráf egy 18-színezését kapjuk, így a kromatikus szám legfeljebb 18. (1 pont)
A háromszög egyik csúcsa és a háromszögön kívüli csúcsok egy 18 csúcsú klikket alkotnak, (1 pont)
így a kromatikus szám legalább 18. (1 pont)
Ezek szerint a kromatikus szám pontosan 18. (1 pont)

(b) A párosítás egy-egy élének két végpontja színezhető ugyanazzal a színnel, a párosítás által nem fedett pontokhoz pedig használjunk egy-egy új színt. (1 pont)
Ekkor a gráf egy 17-színezését kapjuk, így a kromatikus szám legfeljebb 17. (1 pont)
A három él egy-egy végpontja és a párosítás által nem fedett csúcsok egy 17 csúcsú klikket alkotnak, (1 pont)
így a kromatikus szám legalább 17. (1 pont)
Ezek szerint a kromatikus szám pontosan 17. (1 pont)

5. Egy G gráf csúcsai legyenek a 100-nál nem nagyobb pozitív egészek. Két különböző csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a megfelelő egészek relatív prímek (vagyis legnagyobb közös osztójuk 1). Határozzuk meg $\nu(G)$-t (a független élek maximális számát), $\rho(G)$-t (a lefogó élek minimális számát), $\alpha(G)$-t (a független pontok maximális számát) és $\tau(G)$-t (a lefogó pontok minimális számát).

* * * * *

A szomszédos egészek mindig relatív prímek (hiszen minden közös osztójuk osztja a különbségüket, azaz az 1-et is), (1 pont)
így a gráfban könnyű megadni egy teljes párosítást $(1-2, 3-4, \ldots, 99-100)$, (1 pont)
tehát $\nu(G) = 50$. (1 pont)
A második Gallai-tétel szerint így $\rho(G) = 50$. (1 pont)
A páros számok független halmazt alkotnak, hiszen semelyik kettő sem relatív prím, (1 pont)
így $\alpha(G) \geq 50$. (1 pont)
Az első Gallai-tétel szerint így $\tau(G) \leq 50$. (1 pont)
Másrészt mivel $\tau(G) \geq \nu(G)$ minden G gráfra teljesül, (1 pont)
$\tau(G) = 50$ (1 pont)
és így persze $\alpha(G) = 50$. (1 pont)

$\alpha \leq 50$ mellett persze lehet úgy is érvelni, hogy 51 darab 1 és 100 közti szám közt lesz két szomszédos (pl. a skatulya-elv miatt), ezek pedig relatív prímek lesznek.

6. Egy hat élből álló C kört tartalmazó gráf élkromatikus száma 10. Mutassuk meg, hogy ha töröljük a gráfból C éleit, akkor a kapott gráf élkromatikus száma legalább 8.

* * * * *

Tegyük fel indirekten, hogy a kapott gráf élkromatikus száma legfeljebb 7 (1 pont)
és használjuk e gráf élszínezését az eredeti gráf éleinek színezéséhez. (2 pont)
Ekkor C élei kivételével minden élt megszíneztünk. (1 pont)
Mivel C egy páros kör, az éleit meg lehet színezni két színnel. (2 pont)
Az eredeti gráfot ekkor tehát legfeljebb 9 színnel meg tudnánk színezni (legfeljebb 7 a törlés utáni gráf éleire és két új C éleire), (3 pont)
ami ellentmondás. (1 pont)