Jelek és rendszerek összefoglaló

A dokumentumot készítette:
Molnár Gábor
Kiegészítések, javítások:
Nagy Máté

BME-VIK

2009. május 20.

1. ZH

1.1. Lineáris, invariáns, kauzális rendszer állapotváltozós leírása (Tk.93-95.)

$$\underline{\mathbf{x}}[k+1] = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{x}}[k] + \underline{\underline{\mathbf{B}}}\,\underline{\mathbf{u}}[k] \qquad \underline{\mathbf{x}}'(t) = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\underline{\mathbf{B}}}\,\underline{\mathbf{u}}(t)$$

$$\underline{\mathbf{y}}[k] = \underline{\underline{\mathbf{C}}}\,\underline{\mathbf{x}}[k] + \underline{\underline{\mathbf{D}}}\,\underline{\mathbf{u}}[k] \qquad \underline{\mathbf{y}}(t) = \underline{\underline{\mathbf{C}}}\,\underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\underline{\mathbf{D}}}\,\underline{\mathbf{u}}(t)$$

1.2. Egy-gerjesztésű és egy-válaszú rendszer állapotváltozós leírása (Tk.93-95.)

$$\underline{\mathbf{x}}[k+1] = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{x}}[k] + \underline{\mathbf{B}}\,u[k] \qquad \underline{\mathbf{x}}'(t) = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{B}}\,u(t)$$

$$y[k] = \underline{\mathbf{C}}^T\,\underline{\mathbf{x}}[k] + Du[k] \qquad y(t) = \underline{\mathbf{C}}^T\,\underline{\mathbf{x}}(t) + Du(t)$$

Jelölés: $P(\lambda) = |\,\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda\,\underline{\underline{\mathbf{E}}}\,| = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ karakterisztikus polinomja

$\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ különböző egyszeres sajátértékei (a karakterisztikus polinom gyökei)

$\underline{\mathbf{m_1}}, \underline{\mathbf{m_2}} \ldots \underline{\mathbf{m_n}}$: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ sajátértékeihez tartozó sajátvektorok

1.3. Impulzusválasz számítása (Tk.110-113.)

$$h[k] = D\delta[k] + \varepsilon[k-1]\,\underline{\mathbf{C}}^T\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{k-1}\,\underline{\mathbf{B}} \qquad h(t) = D\delta(t) + \varepsilon(t)\,\underline{\mathbf{C}}^T e^{\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,t}\,\underline{\mathbf{B}}$$

$$h[k] = D\delta[k] + \varepsilon[k-1]\sum_{i=1}^{N} \underline{\mathbf{C}}^T\,\underline{\mathbf{m_i}}\,P_i\,\lambda_i^{k-1} \qquad h(t) = D\delta(t) + \varepsilon(t)\sum_{i=1}^{N} \underline{\mathbf{C}}^T\,\underline{\mathbf{m_i}}\,P_i\,e^{\lambda_i t}$$

ahol P_i a következő egyenletrendszer megoldása: $\underline{\mathbf{x}}[k] = \sum_{i=1}^{N} \underline{\mathbf{m_i}}\,P_i = \underline{\mathbf{B}}$

1.4. Gerjesztés-válasz stabilitás feltételei (Tk.46.,55.,86.)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \iff \text{GV-stabilitás} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty \iff \text{GV-stabilitás}$$

Jury-kritérium: $P(1) = 1 + a_1 + a_2 > 0,\ P(-1) = 1 - a_1 + a_2 > 0,\ |a_2| < 1$

Hurwitz-kritérium: $a_1 > 0, \quad a_2 > 0$

1.5. Válasz számítása az impulzusválasz felhasználásával (Tk.42.,52.)

$$y[k] = h[k] * u[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[k-i]u[i], \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$y(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad t \in \mathbf{R}$$

1.6. Az állapotváltozós leírás megoldása mátrixfüggvényekkel (Tk.118-119.)

$$\underline{\mathbf{x}}\,[k] = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\,k}\,\underline{\mathbf{x}}\,[0] + \sum_{i=0}^{k-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\,k-1-i}\,\underline{\mathbf{B}}\,u[i], \quad k \in \mathbf{Z}_+$$

$$\underline{\mathbf{x}}\,(t) = e^{\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,t}\,\underline{\mathbf{x}}\,(-0) + \int_{-0}^{t} e^{\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,(t-\tau)}\,\underline{\mathbf{B}}\,u(\tau)d\tau, \quad t \in \mathbf{R}_+$$

$$y[k] = \begin{cases} \underline{\mathbf{C}}^{\,T}\,\underline{\mathbf{x}}\,[0] + Du[0], & k = 0 \\ \underline{\mathbf{C}}^{\,T}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\,k}\,\underline{\mathbf{x}}\,[0] + \underline{\mathbf{C}}^{\,T}\sum_{i=0}^{k-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\,k-1-i}\,\underline{\mathbf{B}}\,u[i] + Du[k], & k \in \mathbf{Z}_+ \end{cases}$$

$$y(t) = \underline{\mathbf{C}}\,e^{\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,t}\,\underline{\mathbf{x}}\,(-0) + \underline{\mathbf{C}}^{\,T}e^{\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,t}\,\underline{\mathbf{x}}\,(-0) + \int_{-0}^{t} e^{\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,(t-\tau)}\,\underline{\mathbf{B}}\,u(\tau)d\tau + Du(t), \quad t \in \mathbf{R}_+$$

1.7. Mátrixok hatványozása (Tk.122.)

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}}_{\,i} = \prod_{\substack{p=1 \\ p\neq i}}^{n} \frac{\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda_p\,\underline{\underline{\mathbf{E}}}}{\lambda_i - \lambda_p},$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\,k} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k\,\underline{\underline{\mathbf{L}}}_{\,i}$$

$$e^{\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,t} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t}\,\underline{\underline{\mathbf{L}}}_{\,i}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\,2x2}: \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\,k} = \lambda_1^k \frac{\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda_2\,\underline{\underline{\mathbf{E}}}}{\lambda_1 - \lambda_2} + \lambda_2^k \frac{\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda_1\,\underline{\underline{\mathbf{E}}}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\,2x2}: \quad e^{\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,t} = e^{\lambda_1 t} \frac{\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda_2\,\underline{\underline{\mathbf{E}}}}{\lambda_1 - \lambda_2} + e^{\lambda_2 t} \frac{\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda_1\,\underline{\underline{\mathbf{E}}}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

1.8. Aszimptotikus stabilitás (Tk.134-135.)

minden $|\lambda_i| < 1$

minden $\mathfrak{Re}\{\lambda_i\} < 0$

Aszimptotikus stabilitás $\Longrightarrow$ GV-stabilitás

2. ZH

3. ZH

3.1. Fourier-transzformáció definíciója (Tk.231-232.)

$$X(e^{j\vartheta}) = \mathscr{F}\Big\{x[k]\Big\}$$

$$X(j\omega) = \mathscr{F}\Big\{x(t)\Big\}$$

$$x[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\vartheta})e^{j\vartheta k}d\vartheta$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}dt$$

3.2. Fourier-transzformált számítása (Tk.232.)

$$X(e^{j\vartheta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\vartheta k}, \quad \text{ha } x[k] \text{ abszolút összegezhető}$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt, \quad \text{ha } x(t) \text{ abszolút integrálható}$$

3.3. Transzfer karakterisztika számítása az impulzusválasz felhasználásával (Tk.265.)

$$H(e^{j\vartheta}) = \mathscr{F}\Big\{h[k]\Big\}, \quad h[k] = \mathscr{F}^{-1}\Big\{H(e^{j\vartheta})\Big\}$$

$$H(j\omega) = \mathscr{F}\Big\{h(t)\Big\}, \quad h(t) = \mathscr{F}^{-1}\Big\{H(j\omega)\Big\}$$

3.4. Válasz számítása Fourier-transzformáció felhasználásával (Tk.264.)

$$y[k] = \mathscr{F}^{-1}\Big\{Y(e^{j\vartheta})\Big\}$$

$$y(t) = \mathscr{F}^{-1}\Big\{Y(j\omega)\Big\}$$

$$Y(e^{j\vartheta}) = H(e^{j\vartheta})U(e^{j\vartheta}) = \mathscr{F}\Big\{h[k]\Big\}\mathscr{F}\Big\{u[k]\Big\}$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)U(j\omega) = \mathscr{F}\Big\{h(t)\Big\}\mathscr{F}\Big\{u(t)\Big\}$$

3.5. A Fourier-transzformáció tulajdonságai, nevezetes Fourier-transzformáltak (Tk.234-244.)

$$\mathscr{F}\Big\{\delta[k]\Big\} = 1$$

$$\mathscr{F}\Big\{\delta(t)\Big\} = 1$$

$$\mathscr{F}\Big\{\varepsilon[k]q^k\Big\} = \frac{1}{1-qe^{-j\vartheta}}, \quad |q| < 1$$

$$\mathscr{F}\Big\{\varepsilon(t)e^{-\alpha t}\Big\} = \frac{1}{j\omega+\alpha}, \quad \mathfrak{Re}\left\{\alpha\right\} > 0$$

$$\mathscr{F}\Big\{C_1x_1[k] + C_2x_2[k]\Big\} = \mathscr{F}\Big\{C_1x_1[k]\Big\} + \mathscr{F}\Big\{C_2x_2[k]\Big\}$$

$$\mathscr{F}\Big\{C_1x_1(t) + C_2x_2(t)\Big\} = \mathscr{F}\Big\{C_1x_1(t)\Big\} + \mathscr{F}\Big\{C_2x_2(t)\Big\}$$

$$\mathscr{F}\left\{x[k-r]\right\} = e^{-j\vartheta r}\mathscr{F}\left\{x[k]\right\} \implies \mathscr{F}\left\{\delta[k-r]\right\} = e^{-j\vartheta r}$$

$$\mathscr{F}\left\{x[k]e^{j\vartheta_0 k}\right\} = X(e^{j(\vartheta-\vartheta_0)})$$

$$\mathscr{F}\left\{x(t-\tau)\right\} = e^{-j\omega\tau}\mathscr{F}\left\{x(t)\right\} \implies \mathscr{F}\left\{\delta(t-\tau)\right\} = e^{-j\omega\tau}$$

$$\mathscr{F}\left\{x(t)e^{j\omega t}\right\} = X(j(\omega-\omega_0))$$

$$\mathscr{F}\left\{x'(t)\right\} = j\omega\mathscr{F}\left\{x(t)\right\}$$

4. ZH

4.1. Mindentáteresztő rendszer (Tk. 376.)

$$H_{MA}(z) = K_A z^{-r} \frac{(z-\frac{1}{q_1^*})(z-\frac{1}{q_2^*})\cdots(z-\frac{1}{q_n^*})}{(z-q_1)(z-q_2)\cdots(z-q_n)}, \quad r \in \mathbf{N}, |q_i| < 1$$

$$H_{MA}(s) = K_A e^{-sT} \frac{(s-p_1^*)(s-p_2^*)\cdots(s-p_n^*)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}, \quad T \in \mathbf{R}^+, \mathfrak{Re}\{p_i\} < 0$$

4.2. Minimálfázisú rendszer (Tk. 378.)

$$H_{MF}(z) = K \frac{(z-s_1)(z-s_2)\cdots(z-s_m)}{(z-q_1)(z-q_2)\cdots(z-q_n)}, \quad r \in \mathbf{N}, 0 < |q_i| < 1, 0 < |s_i| < 1$$

$$H_{MF}(s) = K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-ps_n)}, \quad m \le n, \mathfrak{Re}\{p_i\} < 0, \mathfrak{Re}\{z_i\} < 0$$

4.3. A Laplace-transzformáció (Z-transzformáció) definíciója (Tk. 303.)

$$\mathscr{Z}\left\{x[t]\right\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k}$$

$$\mathscr{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_{-0}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

4.4. Az átviteli függvény és az átviteli karakterisztika közötti kapcsolat (Tk.349.)

Átviteli függvény definíciója: $H(z) = \mathscr{Z}\left\{h[k]\right\}$

Átviteli függvény definíciója: $H(s) = \mathscr{L}\{h(t)\}$

A rendszer GV stabilis és kauzális $\implies H(e^{j\vartheta}) = H(z)|_{z=e^{j\vartheta}}$

A rendszer GV stabilis és kauzális $\implies H(j\omega) = H(z)|_{z=j\omega}$

4.5. A Laplace-transzformáció tulajdonságai, nevezetes Laplace-transzformáltak (Tk. 306-315.)

$$\mathscr{Z}\left\{C_1x_1[k] + C_2x_2[k]\right\} = \mathscr{Z}\left\{C_1x_1[k]\right\} + \mathscr{Z}\left\{C_2x_2[k]\right\}$$

$$\mathscr{L}\{C_1x_1(t) + C_2x_2(t)\} = \mathscr{L}\{C_1x_1(t)\} + \mathscr{L}\{C_2x_2(t)\}, \quad \mathscr{L}\left\{\int_{-0}^{t} x(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}X($$

$$\mathscr{Z}\left\{\delta[k]\right\} = 1, \quad \mathscr{Z}\left\{\varepsilon[k]\right\} = \frac{z}{z-1}$$

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1, \quad \mathscr{L}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s}$$

$$\mathscr{Z}\left\{x[k]q^k\right\} = X(\frac{z}{q}) \implies \mathscr{Z}\left\{\varepsilon[k]q^k\right\} = \frac{z}{z-q}$$

$$\mathscr{L}\left\{x(t)e^{pt}\right\} = X(s-p) \implies \mathscr{L}\left\{\varepsilon(t)e^{pt}\right\} = \frac{1}{s-p}$$

$$\mathscr{Z}\left\{\frac{\partial x[k,q]}{\partial q}\right\} = \frac{\partial X(z,q)}{\partial q} \implies \mathscr{Z}\left\{\varepsilon[k]kq^{k-1}\right\} = \frac{z}{(z-q)^2}$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial x(t,p)}{\partial p}\right\} = \frac{\partial X(s,p)}{\partial p} \implies \mathscr{L}\left\{\varepsilon(t)te^{pt}\right\} = \frac{1}{(s-p)^2}$$

$$\mathscr{Z}\left\{\varepsilon[k]\binom{k}{n}q^{k-n}\right\} = \frac{z^{-n}}{(1-qz^{-1})^{n+1}} = \frac{z}{(z-q)^{n+1}}$$

$$\mathscr{L}\left\{\varepsilon(t)\frac{1}{n!}t^n\right\} = \frac{1}{s^{n+1}} \implies \mathscr{L}\left\{\varepsilon(t)\frac{1}{n!}t^n e^{\alpha t}\right\} = \frac{1}{(s-\alpha)^{n+1}}$$

$$\mathscr{Z}\left\{\varepsilon[k]k(k-1)q^{k-2}\right\} = \frac{2z}{(z-q)^3}$$

$$\mathscr{L}\left\{\varepsilon(t)t\right\} = \frac{1}{s^2}, \quad \mathscr{L}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon(t)t^2\right\} = \frac{1}{s^3}$$

$$\mathscr{Z}\left\{\varepsilon[k-r]x[k-r]\right\} = z^{-r}X(z), \quad r \in \mathbb{N}$$

$$\mathscr{L}\left\{\varepsilon(t-T)x(t-T)\right\} = e^{-sT}X(s), \quad T \in \mathbb{R}_+$$

$$\mathscr{Z}\left\{\varepsilon[k+1]\right\} = zX(z) - x[0]z$$

$$\mathscr{L}\left\{x'(t)\right\} = sX(s) - x(-0)$$

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

$$x(+0) = \lim_{\substack{z\to\infty \\ \mathfrak{Re}\{s\}>0}} sX(s)$$

$$\mathscr{Z}\left\{x[k]*y[k]\right\} = X(z)Y(z)$$

$$\mathscr{L}\left\{x(t)*y(t)\right\} = X(s)Y(s)$$

$$\mathscr{Z}\left\{\varepsilon[k]\,cos\vartheta k\right\} = \frac{z^2-2z\,cos\vartheta}{z^2-2z\,cos\vartheta+1}, \quad \mathscr{Z}\left\{\varepsilon[k]\,sin\vartheta k\right\} = \frac{z\,sin\vartheta}{z^2-2z\,cos\vartheta+1}$$

$$\mathscr{L}\left\{\varepsilon(t)\,cos\omega t\right\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad \mathscr{L}\left\{\varepsilon(t)\,sin\omega t\right\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

4.6. A Laplace transzformáció felhasználása válasz számításánál (Tk. 344.)

$Y(z) = H(z)U(z), \quad h[k], u[k]$ belépő jelek

$Y(s) = H(s)U(s), \quad h(t), u(t)$ belépő jelek

$$h[k] = \mathscr{Z}^{-1}\left\{H(z)\right\}, \quad H(z) = \mathscr{Z}\left\{h[k]\right\}$$

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{H(s)\right\}, \quad H(s) = \mathscr{L}\left\{h(t)\right\}$$

4.7. Folytonos idejű rendszer átviteli függvényének szimulációja diszkrét idejű rendszerrel (Tk. 417.)

$H_D(z) = H_C(\frac{p}{T}\frac{z-1}{z+1}), 0 < p \leq 2$ (általában p=2)