

Tájékoztató a szóbeli vizsgáról

(Elektromágneses terek alapjai, 2013-2014 / 2. félév)

A sikeres írásbeli beugrót követően a hallgató szóbeli vizsgán vesz részt, amelynek kezdetén egy elméleti kérdést, valamint egy példát kell húznia (külön halmazból). Ezek átgondolására kb. 10-15 perc áll rendelkezésére, azután megkezdődik a vizsga, amely általában kb. 5-15 percet vesz igénybe. További tudnivalók:

- A felkészüléshez papír és íróeszköz használható; számológép nem kell. A tétel és a példa részletes, írásos kidolgozáshoz általában kevés az idő, de vázlat írására elegendő. Bár a vizsga szóbeli, a tétel ismertetése során további írásra (rajzolásra) lehet szükség.
- A példát számszerűen megoldani nem kell: a lényeg csupán a megoldás elvi menetének ismertetése.
- A szóbeli vizsgáztatás kötetlen abban az értelemben, hogy a kihúzott kérdés csupán a kezdeti irányt adja meg; a vizsgáztató – ha szükségét látja – belekérdezhet más anyagrészekbe is.
- A példasort nem adjuk ki előre. Az elméleti kérdések aktuális listája alább olvasható. A tárgy oktatói azonban mindenkor fenntartják a jogot a példák és kérdések halmazának bővítésére vagy szűkítésére, illetve azok átfogalmazására.

Az elméleti kérdések aktuális listája :

1. Mutassa be az elektromágneses tér forrásmennyiségeit, valamint azok megjelenési formáit és matematikai leírását!
2. Mutassa be a folytonossági egyenlet különböző alakjait!
3. Mutassa be az elektromágneses tér intenzitásvektorait, és kapcsolatukat az erőhatással!
4. Mutassa be az elektromágneses tér „gerjesztett” vektorait, és kapcsolatukat a forrásmennyiségekkel!
5. Mutassa be röviden a makroszkopikus elektromos és mágneses anyagjellemzők bevezetésének módját és anyag szerkezeti hátterét! *Ezt külön megnevezni!*
6. Ismertesse a Maxwell-egyenletek integrális és differenciális alakját, valamint a köztük lévő kapcsolatot!
7. Ismertesse az elektromágneses vektormezők anyaghatáron teljesülő folytonossági feltételeit!
8. Hogyan változnak a térjellemzők az anyaghatáron, ha ott felületi töltéssűrűség, illetve felületi áram van jelen? Mondjon példát arra, hogy a gyakorlatban milyen körülmények között valósulhatnak meg ezek!
9. Ismertesse az elektromágneses térben az energiasűrűsége és az energiaáramlásra vonatkozó általános összefüggéseket!
10. Ismertesse az elektromágneses térben az erőhatással kapcsolatos összefüggéseket!
11. Ismertesse az Ohm-törvény differenciális alakját, valamint a nem elektromágneses eredetű töltésmozgató hatás figyelembevételének módjait (példával is illusztrálva)!
12. Ismertesse a Maxwell-egyenletek teljes rendszerét (csak differenciális alakban, de kiegészítve a konstitúciós egyenletekkel, folytonossági feltételekkel, valamint az erőhatást és az energiaviszonyokat leíró egyenletekkel)!
13. Ismertesse az elektrodinamika felosztását!
14. Ismertesse és értelmezze az elektrosztatika alapegyenleteit, és jelölje meg néhány alkalmazási területét!
15. Ismertesse az elektrosztatikus skalárpotenciál fogalmát, bevezetésének módját, valamint kapcsolatát a feszültséggel és a térerősséggel!

~~✗~~ Írja fel és értelmezze az elektrosztatika Poisson-egyenletét, és adja meg a homogén közegben érvényes, általános megoldását! Miért körülményes ennek a formulának a használata a gyakorlati esetek nagy részében?

gyakori volt jól ~~✗~~ Mutassa be néhány egyszerű töltéselrendezés (ponttöltés, egyenes vonaltöltés, töltött síkfelület) sztatikus elektromos terét és potenciálterét! Milyen módszerrel lehet, illetve célszerű ezeket számolni?

~~✗~~ Mutassa be a sztatikus töltésdipólus elektromos terét és potenciálterét!

~~✗~~ Fogalmazza meg az elektrosztatika peremérték-feladatát, és illusztrálja példákkal a vonatkozó peremfeltételeket!

~~✗~~ Ismertesse a helyettesítő töltések módszerét és a töltéstükrözés elvét! Hogyan épül ez a módszer a Poisson-egyenlet egyértelmű megoldhatóságára?

~~✗~~ Fogalmazza meg az elektromos teret leíró vektormezők anyaghatáron érvényes folytonossági feltételeit a skalárpotenciál segítségével!

~~✗~~ Ismertesse a vezető anyagok viselkedését elektrosztatikus térben, valamint a vezető-szigetelő határon érvényes folytonossági feltételeket; definiálja az elektróda fogalmát!

~~✗~~ Ismertesse a kapacitás fogalmát és energetikai hátterét; fejezze ki a kapacitást a térjellemző mennyiségekkel! Térjen ki az „önmagában álló elektróda” esetére is!

~~✗~~ Ismertesse az elektróda-rendszert jellemző együttthatókat, különös tekintettel a részkapacitásokra! Adjon az utóbbiakra szemléletes értelmezést!

~~✗~~ Hogyan számítható ki a sztatikus elektromos térben tárolt energia? Ismertesse az elektróda-rendszer energiájára vonatkozó formulákat is!

~~✗~~ Ismertesse és értelmezze a stacionárius áramlási tér alapösszefüggéseit! Mely területeken alkalmazható ez a problémátípus?

~~✗~~ Ismertesse a stacionárius áramlási tér Laplace-egyenletét! Sorolja fel, és illusztrálja példával az egyenlet egyértelmű megoldhatóságát biztosító peremfeltételeket!

~~✗~~ Ismertesse az ellenállás fogalmát, és fejezze ki a térjellemző mennyiségekkel!

~~✗~~ Hogyan számítható a térbeli áramlás által vezető anyagban keltett hőteljesítmény (Joule-vesztesség)?

~~✗~~ Miben áll, és meddig terjed a stacionárius áramlás és az elektrosztatika analógiája? Mikor és hogyan alkalmazható a tükrözés módszere áramlási tereknel?

~~✗~~ Ismertesse a stacionárius áram mágneses terére vonatkozó alapegyenleteket, és a problémátípus főbb alkalmazási területeit!

~~✗~~ Ismertesse és értelmezze a Biot-Savart-törvényt! Illusztrálja egy egyszerű példával!

~~✗~~ Ismertesse az ön- és kölcsönös indukció fogalmát és energetikai hátterét! Térjen ki a külső és belső induktivitás fogalmára!

~~✗~~ Hogyan számítható a stacionárius mágneses térben tárolt energia? Ismertesse a tekercsrendszer energiájára vonatkozó formulát is!

~~✗~~ Mutassa be az indukálási jelenségeket (nyugalmi és mozgási), valamint az indukált feszültség számítását! Mondjon példákat gyakorlati alkalmazásra!

~~✗~~ Ismertesse a távvezeték elosztott paraméterű modelljét és a távíró egyenleteket! Meddig terjed a modell érvényességi köre, azaz milyen feltételek mellett írható le egy hullámvezető viselkedése az ismertetett modellel?

~~✗~~ Mutasson be néhány gyakori távvezeték-konstrukciót, jellemezze azok elektromos és mágneses terét! Hogyan befolyásolja a távvezeték geometriája a vezetékparamétereket?

~~✗~~ Ismertesse a távvezeték-re vonatkozó Helmholtz-egyenletet; mutassa be és értelmezze annak általános megoldását!

~~✗~~ Mutassa be a távvezeték hullámparamétereit, ill. kapcsolatukat a fázissebességgel és a hullámhosszal! Térjen ki az ideális távvezeték speciális esetére is!

- ~~40.~~ Definiálja a reflexiós tényezőt; ismertesse speciális lezárások (illesztett, nyitott végű, rövidre zárt) esetén az ideális távvezetéken kialakuló áram- és feszültségviszonyokat!
- ~~41.~~ Ismertesse a tetszőleges impedanciával lezárt ideális távvezeték feszültség- és áramviszonyait, valamint az állóhullám-haladóhullám felbontást! Mi az energetikai tartalma a reaktanciával lezárt ideális távvezetéken kialakuló hullámképnek?
- ~~42.~~ Hogyan határozhatók meg a feszültségamplitúdó minimum- és maximumhelyei a távvezeték mentén, a lezárás ismeretében?
- ~~43.~~ Definiálja az állóhullámarányt, és ismertesse számítását! Hogyan használható ez a mennyiség nagyfrekvenciás impedancia-mérésre?
- ~~44.~~ Ismertesse a távvezeték kétkapuként történő leírását, a láncparamétereket, valamint a T- és Π -helyettesítőképeket! Tekinthetők-e ez utóbbiak koncentrált paraméterű hálózati megvalósításnak?
- ~~45.~~ Ismertesse a bemeneti impedancia fogalmát és számítási módját! Hogyan használható ez a mennyiség illesztési feladat megoldására?
- ~~46.~~ Írja fel a homogén hullámegyenletet az elektromos, illetve a mágneses térerősségre!
- ~~47.~~ Értelmezze a térerősség-vektor komplex amplitúdójának fogalmát (szinuszos állandósult állapot), és írja fel az elektromágneses hullámok Helmholtz-egyenletét az elektromos térerősségre vonatkozóan!
- ~~48.~~ Definiálja a síkhullám fogalmát, és írja fel a síkhullám egydimenziós Helmholtz-egyenletét! Mit jelent a TEM-típusú hullámterjedés?
- ~~49.~~ Ismertesse, hogy miben áll a síkhullám-távvezeték analógia, és meddig terjed az érvényességi köre, azaz mikor nem alkalmazható!
- ~~50.~~ Ismertesse a síkhullám viselkedését ideális szigetelőben! Térjen ki a hullámparaméterek, a fázissebesség és a hullámhossz számítására!
- ~~51.~~ Ismertesse, hogy miként terjed az energia a síkhullámban! Vezesse be és értelmezze a komplex Poynting-vektort!
- ~~52.~~ Ismertesse a síkhullám viselkedését vezető anyagban! Térjen ki a hullámparaméterek számítására, valamint a behatolási mélység fogalmára! Hogyan alkalmazható ez a jelenség nagyfrekvenciás terek árnyékolására?
- ~~53.~~ Ismertesse az áramkiszorítás jelenségét, a váltakozó áramú ellenállás fogalmát és közelítő számítását hengeres vezetőre!
- ~~54.~~ Ismertesse a polarizáció fogalmát síkhullámra vonatkozóan! Alkalmazható-e itt a távvezeték-analógia?
- ~~55.~~ Ismertesse a síkhullám viselkedését anyaghatáron, különös tekintettel a merőleges beesésre. Alkalmazható-e itt a távvezeték analógia?
- ~~56.~~ Ismertesse a Hertz-dipólus fogalmát valamint elektromos és mágneses terének fő jellemzőit! Mit jelent a közeltér és a távotér?
- ~~57.~~ Ismertesse a Hertz-dipólus távolterének jellemzőit! Térjen ki a teljesítményáramlásra is!
- ~~58.~~ Ismertesse az alapvető antennajellemzőket (iránykarakterisztika, sugárzási ellenállás, irányhatás, antennanyereség, hatásos felület), és adja meg ezek értékét a Hertz-dipólusra!
- ~~59.~~ Ismertesse az antennákra vonatkozó átviteli egyenletet, és értelmezze annak összetevőit!

2014.05.12.

31. tétel

$$\frac{\partial}{\partial t} = \phi$$

↓

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$$

$$\left(+ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

Stacionárius mágneses tér
peremfeltételek:

$$H_{zt} = H_{nt}$$

$$B_{zn} = B_{zn}$$

$$\text{div } \vec{B} = \phi$$

(ferrásmentes → nincs mágneses töltés)

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$$

→ többnyire nincs jelen ferrom. közeg → μ_0

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M})$$

→ A mágneses tér ferrásknál szöbba jöhet
permanens mágnes is.

Mivel $\vec{H}$ nem rotációmentes, itt nem tudunk bevezetni skalár-
potenciált.

Viszont bármely ferrásmentes tér leírható egy vektorpotenciállal.

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

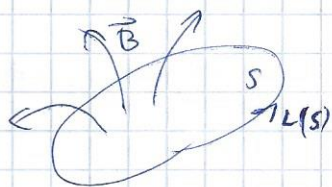
$$\rightarrow \text{div } \vec{B} = \text{div rot } \vec{A} = \phi$$

vektorpotenciál - nem egyértelmű

$\vec{A}$ értékét megadhatjuk div-vel, ez a Coulomb-mérték.

$$\boxed{\text{div } \vec{A} = \phi}$$

A fluxus is kifejezhető vele.



$$\psi_s \triangleq \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$



$$= \int_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

Stokes

$$\oint_{L(S)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \psi_s$$

Tehát $\vec{A}$ cirkulációja megadja a fluxust.

~~W_m~~

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot \vec{j} \, dV$$

Vektoriális Laplace-egyenlet:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \vec{j} \rightarrow \text{rot } \vec{B} = \mu \cdot \vec{j} \\ \vec{B} &= \text{rot } \vec{A} \end{aligned} \right\} \text{rot rot } \vec{A} = \mu \cdot \vec{j}$$

matek:

$$\Delta \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \text{rot rot } \vec{A}$$

 $\Downarrow$

$$\Delta \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \mu \cdot \vec{j}$$

általános megoldása:

retardált potenciálokkal

A vektorteret a rotációja és a divergenciája együtt határozza meg!

Legyen $\text{div } \vec{A} = \phi$ (Coulomb-mérték)

$$\Delta \vec{A} = -\mu \cdot \vec{j}$$

(elektrosztatika: $\Delta \phi = \frac{-\rho}{\epsilon}$)

Főbb alkalmazási területek:

- áramjárta vezető körüli mágneses tér számítása
- NYAK mágneses környezete
- kábelek ömágneses együtthatója
- transzformátor számítása
↳ villamosenergia - átalakító

fogalmak:

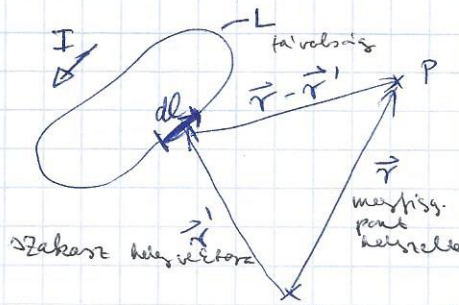
induktivitás, vektorpotenciál, mágneses
vonalak

+ egyirányú csatlakozásban van a stat.
áramlási térfogat, de nincs mágneses tér

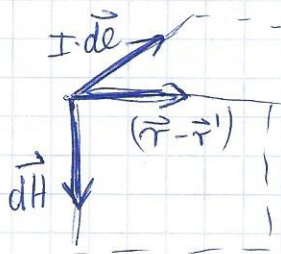
Levezethető a Maxwell-egyenletekből a vektoriális Laplace - Poisson egyenlet általános megoldása, $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ és $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$ felhasználásával.

Példa

Zárt áramkörben folyó tetszőleges áram esetén a tér tetszőleges pontjában meghatározható a $\vec{H}$. (Vonalas Biot-Savart Vezetőre érvényes formula.)



$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



dl által létrehozott tér:

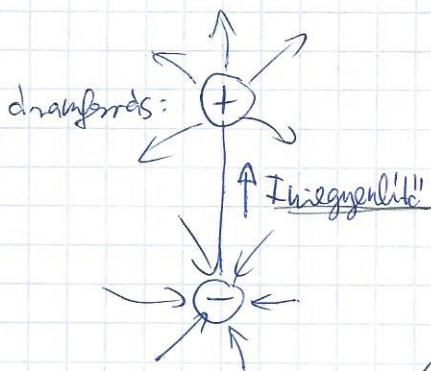
$$d\vec{H} = \frac{I \cdot d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

infinitesimális alak

Nem egy áramelem által okozott térerősség a $d\vec{H}$!

$d\vec{l} \times \vec{r}$ minos ilyen!

Helyesen: $\text{rot } d\vec{H} = d\vec{j}$ áramdipólus



Az egymás után helyezett áramdipólusok hatásai kioltják egymást és csak a kiegyenlítő köráram marad.

Csak homogén anyagok esetén használható!
ha nincs a rendszerben ferromágneses anyag.

Vezetékek mágneses térerőssége de csak azért számítjuk, hogy ennek alapján meghatározzassuk például egy tekercs öninduktivitását, vagy egy transzformátor tekercsei között fellépő kölcsönös induktivitást.

33. tétel

1)



$$\psi_s \sim I$$

Definíció szerint:

$$\psi_s = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad \text{fluxus}$$

$$L \triangleq \frac{\psi_s}{I}$$

$$[L] = H \quad (\text{Henry}) \quad (\text{pszi})$$

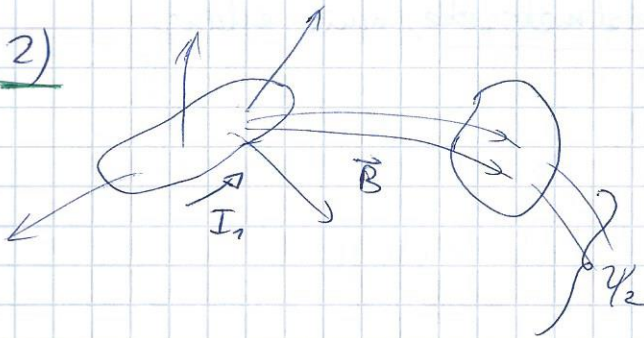
L := - induktivitás

- önindukciós együtthatóAz eredmény vékony vezető esetére értelmezett.

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \psi_s = \frac{1}{2} \cdot I \cdot L \cdot I = \boxed{\frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 = W_m}$$

$$L = \frac{2 \cdot W_m}{I^2}$$

2)



- Az egyik tekercsben (I_1) létrejövő mágneses tér hatással van a másik tekercsre és mágneses fluxust hoz létre benne.

$$L_{21} \triangleq \frac{\psi_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}$$

$$L_{12} = \frac{\psi_1}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$

→ kölcsönös indukciós együttd.A reciprocitás miatt: $L_{21} = L_{12} = M$ Csak lineáris esetben áll fenn.Például a transzformátor vasmagja nem lineáris → $L_{12} \neq L_{21}$

Superpozíció:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= L_1 \cdot I_1 + M \cdot I_2 \\ \psi_2 &= L_2 \cdot I_2 + M \cdot I_1 \end{aligned} \right\} \text{energia}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot I_1 \cdot \psi_1 + \frac{1}{2} \cdot I_2 \cdot \psi_2 = \dots =$$

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot I_1^2 + \frac{1}{2} \cdot L_2 \cdot I_2^2 + M \cdot I_1 \cdot I_2 \quad \text{csatolt tekercs energiája}$$

Általánosan: (n tekercs)

$L_{kk} = L_k$ önindukciós együttható (a tekercs)

$L_{ki} = L_{ik}$ kölcsönös indukciós $\rightarrow$ ($i \neq k$)

$$\psi_k = \sum_{i=1}^n L_{ki} \cdot I_i$$

↑
tekercs ↑
külső mág. ↑
mág. k

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n \psi_k \cdot I_k = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n L_{ki} \cdot I_k \cdot I_i = W_m$$

3) külső és belső indukтивitás

A valóságban egy vezetéknek van keresztmetszete, amit eddig figyelmen kívül hagytunk.

$$L_{\text{on}} = L_k + L_B$$

L_k a külső mágneses térből származik (áramvezeték kívül)

L_B az energiából számítható.

$$W_m = \frac{1}{2} L_B \cdot I^2 = \int_V \frac{1}{2} \mu \cdot H^2 dV = W_m$$

$$L_B = \frac{1}{I^2} \cdot \int_V \mu \cdot H^2 dV$$

34. tétel

$$W_m = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{H}^2 = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{A}$$

$$(\text{div}(\vec{A} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{H}) \text{ mndek}$$

$$\vec{H} \cdot \text{rot} \vec{A} = \text{div}(\vec{A} \times \vec{H}) + \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{H}$$

teljes tér:

$$W = \int_V w dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{H} dV + \frac{1}{2} \int_V \text{div}(\vec{A} \times \vec{H}) dV =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_V \vec{A} \cdot \vec{j} dV + \frac{1}{2} \oint_A (\vec{A} \times \vec{H}) \cdot d\vec{A} \quad \text{Gauss-ösztv.}$$

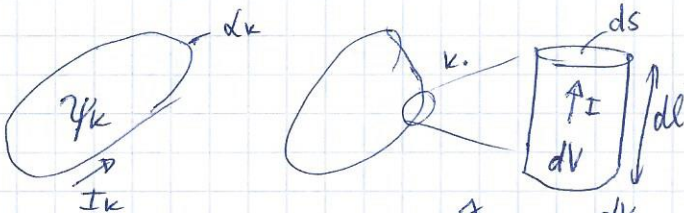
$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$$

ϕ -hoz tart, mert az A felületet a végtelenben vettük fel. $r \rightarrow \infty$

$$\left. \begin{array}{l} A \sim r^2 \\ H \sim 1/r^3 \text{ (Biot-Savart)} \end{array} \right\} \sim \frac{1}{r}$$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot \vec{j} dV$$

Az integrált csak a vezető térfogatra kell számítani.



$$j \cdot dV = \frac{j}{ds} \cdot ds \cdot dl = I \cdot dl$$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot \vec{j} dV = \frac{1}{2} \cdot \sum_k \oint_{\alpha_k} \vec{A} \cdot I d\vec{l} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_k I_k \cdot \oint_{\alpha_k} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

$\text{rot} \vec{A} \rightarrow \text{Stokes}$
 $\Psi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$
 fluxus ($\vec{A}$ cirkulációjának a fluxus)

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_k I_k \cdot \Psi_k \quad \text{tekercsszűrő rendszer energiája}$$

pótlás: $W_e = \frac{1}{2} \cdot \sum_k Q_k \cdot \Phi_k$

Egy tekercsre: $W_m = \frac{1}{2} I \cdot \psi = \frac{1}{2} L \cdot I^2$!

$L = \frac{\psi}{I}$

Két tekercsre:

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 \cdot I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \cdot I_2^2 + M \cdot I_1 \cdot I_2$$
 !

csatolt
tekercs
energiaja

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= L_1 \cdot I_1 + \overset{M}{L_{12}} \cdot I_2 \\ \psi_2 &= L_2 \cdot I_2 + \overset{M}{L_{12}} \cdot I_1 \end{aligned} \right\}$$

35. tétel1) Nyugalmi indukció

- Sem a vezető, sem a mágneses tér nem mozog, az indukciót az időben változó fluxus hozza létre (Faraday), amit az időben változó áram gerjeszt. (Ampère)

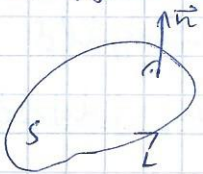
$$U_i = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{s}$$

2) Mozgási indukció

- Egy időben állandó mágneses teret és egy benne elhelyezkedő ~~vezető~~ vezetőt egymáshoz képest elmozdítunk, akkor a vezető két végpontja között feszültség mérhető!

$$\Delta s = \Delta l \cdot \Delta t \cdot v \cdot \sin \alpha = (\vec{v} \times \Delta \vec{l}) \cdot \Delta \vec{s}$$

$$U_i = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\Delta s \cdot \vec{B}}{\Delta t} = -\frac{(\vec{v} \times \Delta \vec{l}) \cdot \Delta \vec{s}}{\Delta t} = -(\vec{v} \times \Delta \vec{l}) \cdot \vec{B} = (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot \Delta \vec{l}$$

3) Egysített indukciótörvény (Faraday, Maxwell II)

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{s} \quad (\text{Maxwell II. - Faraday})$$

kétféle változás lehet: - B indukció
- S felület

Az integrálsíki görbe változása:



$$U_i = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = \dots = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} - \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l}$$

nyugalmi indukció

mozgási indukció

Átrendezve:

$$\oint_L [\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})] d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} = U_i$$

elektromos térerősségnek a mozgó k. rendszerhez rögzített vektor nagysága

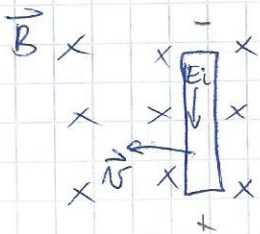
$$U_i = U_i^{ny} + U_i^m, \text{ vagyis (még egyszer):}$$

$$U_i = \underbrace{- \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}}_{U_i^{ny}} - \underbrace{\oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}}_{U_i^m}$$

4) Példák

- **Generátor:** Mechanikai energiát elektromos energiává átalakító eszköz, a mozgási indukció gyakorlati alkalmazását jelenti. (forog)
- **Transzformátor:** Elektromos áram átalakítására szolgáló eszköz, működési elve a nyugalmi indukció.

EXTRA - Mozgási indukció



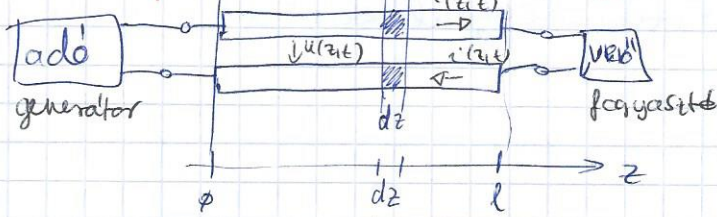
A vezetőben lévő töltések a vezetőszállal együtt, $\vec{B}$ -re merőlegesen mozognak, így hat rájuk a Lorentz-erő. Ennek következtében a töltések szétválasztódnak és a vezető két vége között feszültség mérhető.

$$\int_e \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_e \vec{B} \times \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

36. tétel

Elosztott paraméterű

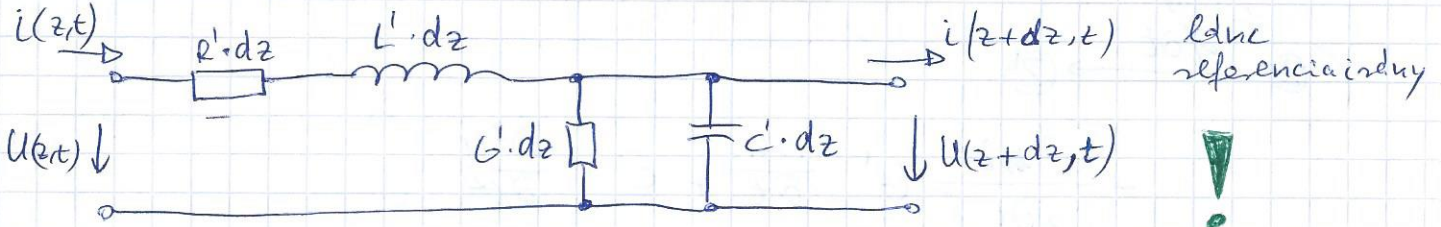
modell



TV-en hullám terjed,
 & pontból pontra változik
 energia / információátvitel

Δz rövid, nincs más
 rajta hullámjelenség
 $\Delta z \rightarrow 0, \Delta z \ll \lambda$

szekciónként koncentrált paraméter



TEK modellben a visszafolyó áram = bef. áram

Hosszraépítés: ez...

Kapacitás: A térfogatok adott pontján az elektromos térben tárolt energiát jelenti.

$$[C'] = F/m \quad C = C' \cdot dz \quad C \sim U^2 \rightarrow \text{párh. kapcsolás}$$

Induktancia:

$$[L'] = H/m$$

$$L = L' \cdot dz$$

$$L \sim I^2$$

soros

mágneses

$$L', C' = \mu_0 \cdot \epsilon$$

Ellenállások: veszteségek $\rightarrow$ ideális vezetéknel $R' = G' = 0$

$$[R'] = \Omega/m$$

$$R' \cdot dz$$

$\rightarrow$ disszipáció a felületen $\rightarrow \sim I^2$ soros

$$[G'] = S/m$$

$$G' \cdot dz$$

$\rightarrow$ szigetelés átvezetése, vesztesége
 referencia iránt veszteség fel

áramokra

$$G' \neq \frac{1}{R'}$$

Teljesítményegyenletek

$$U(z+dz, t) = U(z, t) - \underbrace{R' \cdot dz \cdot i(z, t)}_{\text{ell. vesz. es}} - \underbrace{L' \cdot dz \cdot \frac{\partial}{\partial t} i(z, t)}_{\text{ind. vesz. es}}$$

$$i(z+dz, t) = i(z, t) - \underbrace{G' \cdot dz \cdot U(z+dz, t)}_{G' \text{ árama}} - \underbrace{C' \cdot dz \cdot \frac{\partial}{\partial t} U(z+dz, t)}_{C' \text{ árama}}$$

Rendezés, osztás dz -vel, majd dz tart 0 -hoz utol:

$$\left. \begin{aligned} ① \quad -\frac{\partial u}{\partial z} &= R' \cdot i + L' \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \\ ② \quad -\frac{\partial i}{\partial z} &= G' \cdot u + C' \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \right\} \text{ tévindégyenletek}$$

levezethető a hullámgyenlet

$$② \xrightarrow{\partial/\partial t} ②'$$

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = G' \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + C' \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$① \xrightarrow{\partial/\partial z} ①'$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R' \cdot \left(\frac{\partial i}{\partial z} \right) + L' \cdot \left(\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R' \cdot G' \cdot u + (R' \cdot C' + L' \cdot G') \frac{\partial u}{\partial t} + L' \cdot C' \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Ideális esetben $R' = G' = 0 \Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = L' \cdot C' \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Megoldása: $u(z, t) = f\left(t \pm \frac{z}{v}\right)$

Modell érvényessége:

1D skálár hullámgyenlet

$$v = \frac{1}{\sqrt{L' C'}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

$\neq 1$ polt. diff. lehet

$$- \quad l \gg d \quad \text{és} \quad d \ll \lambda$$



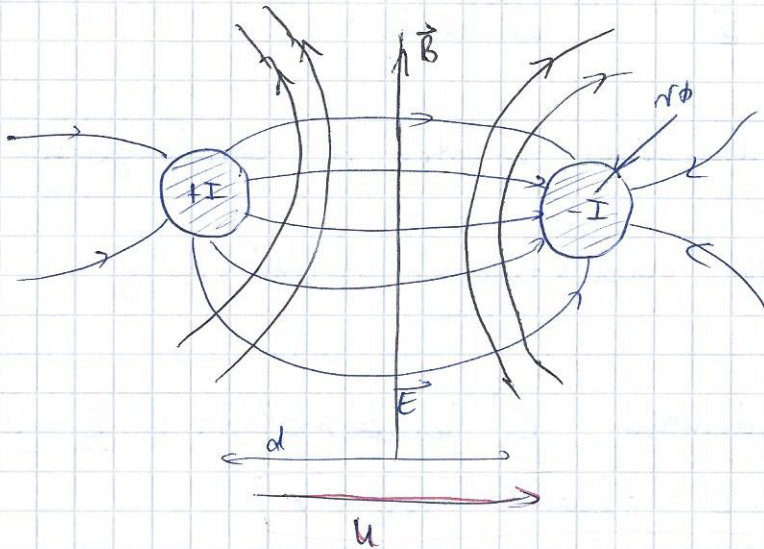
A kábel keresztmetszetében elhanyagolható a hullámterjedés,

- $\vec{E}$ és $\vec{B}$ merőleges egymásra és a terjedési irányra (TEM)

$$\Delta z \rightarrow 0 \quad \text{feltétel:} \quad \Delta z \ll \lambda$$

37. fejelet

1) Lecher-vezeték (kétlős-vezeték / párh.)



$\sigma = \emptyset$ (levegő) $\epsilon = \epsilon_0$

levegőben G' elhanyagolható

$$G' \approx \emptyset$$

! $\left(R' = 2 \cdot \frac{1}{\sigma \cdot A} \right)$

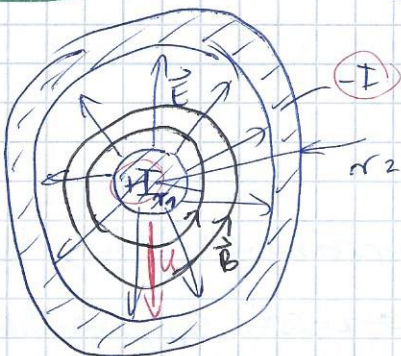
$$L' = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{d}{r_0}\right)$$

$$C' = \frac{\pi \cdot \epsilon_0}{\ln\left(\frac{d}{r_0}\right)}$$

2) koax

belső vezeték és külső anyagtól védve
 $\rightarrow$ u fesz. mérhető köztük

nem vesztesétkes
 az energia nem elvész



$$\left(R' = \frac{1}{\sigma_1 \cdot A_1} + \frac{1}{\sigma_2 \cdot A_2} \right) \Leftarrow R'$$

erősen hővezető
 függő

$$L' \cong \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

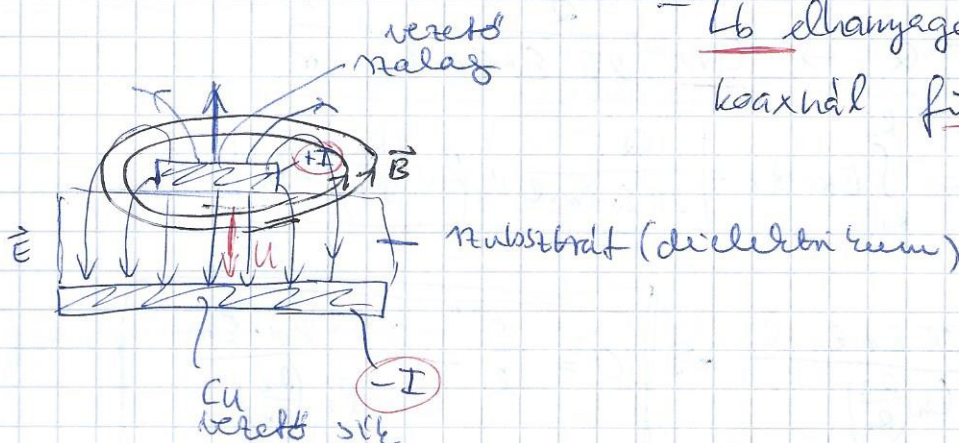
$$C' = \frac{2\pi \cdot \epsilon_0}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

G' számolható
 C' -ből

$$G' \Leftarrow C' = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

- Áramkiszorítás jelensége

3) Microstrip (szalagvonal)



- L_b elhanyagolható Lecher-nél,
 koaxnál figyelembe vehető.

Koax: A belső vezető és a külső árnyékoló réteg közt U feszültség mérhető.

$$\begin{aligned} U &\rightarrow \vec{E} && \text{sugaras} \\ I &\rightarrow \vec{B} && \text{körkörös} \end{aligned}$$

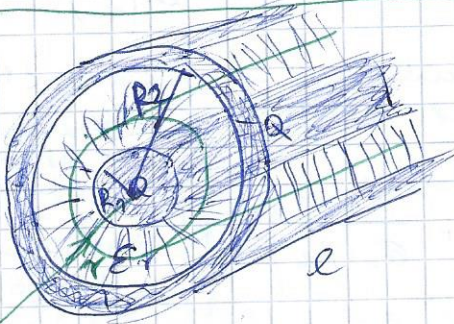
Lecher-vezeték: két párhuzamos vezeték d távolságban

Microstrip: vezető sík - dielektrikum - vezető szelvény

R' kiszámolása nyilvánvaló, C' kiszámolása: $E \rightarrow U \rightarrow C = \frac{Q}{U}$

L' kiszámolása: $L' \cdot C' = \text{állandó} = \mu_0 \cdot \epsilon_0$

Koax-kábel C' kiszámolása: Biliicz 2.20-as példa



$$R_2 > R_1 \gg l$$

Gauss-tétel:

Az $\vec{E}$ tér henger-szimmetrikus, tehát a palástán szerzősség egyenletesedik, mivel $l \ll R_1, R_2$, ezért a végek hatása elhanyagolható.

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho \, dV \quad / \cdot \epsilon_0$$

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \cdot Q$$

$$\underbrace{2 \cdot \pi \cdot l \cdot E(r)}_{\text{palást}} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \cdot Q \rightarrow \underline{E(r)} = \frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot l} \cdot \frac{1}{r}$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E(r) \, dr = \left[\frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r l} \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = U \right]$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{U}} = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r \cdot l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \Rightarrow \boxed{C' = \frac{C}{l} = \frac{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}}$$

38. tétel

A törvényszerűket leírhatjuk frekvenciatarományban is.

Szinuszos változást feltételezve:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$$

$$u(z,t) = \operatorname{Re} \{ \bar{u}(z) \cdot e^{j\omega t} \}$$

$$\hookrightarrow \bar{u}(t) = \bar{u}(z) \cdot e^{j\omega t}$$

$$i(z,t) = \operatorname{Re} \{ \bar{I}(z) \cdot e^{j\omega t} \}$$

$$\hookrightarrow \bar{I}(t) = \bar{I}(z) \cdot e^{j\omega t}$$

Felírjuk a törvényegyenleteket $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$ helyettesítéssel (Fourier):

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} - \frac{\partial \bar{u}(z)}{\partial z} = (R' + j\omega L') \bar{I}(z) \\ \textcircled{2} - \frac{\partial \bar{I}(z)}{\partial z} = (G' + j\omega C') \bar{u}(z) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \textcircled{1} \rightarrow \bar{I}(z) = - \frac{1}{R' + j\omega L'} \cdot \frac{\partial \bar{u}(z)}{\partial z} \\ \downarrow \\ \textcircled{2} \end{array}$$

$$\frac{1}{R' + j\omega L'} \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}(z)}{\partial z^2} = (G' + j\omega C') \bar{u}(z) \quad / \cdot (R' + j\omega L')$$

$$\frac{d^2 \bar{u}(z)}{dz^2} = \underbrace{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}_{\bar{\sigma}^2} \cdot \bar{u}(z)$$

$\bar{\sigma}^2$ terjedési együttható

$$\bar{\sigma} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta$$

csillapítási
tényező

$$[\alpha] = \frac{1}{m}$$

fázistényező

$$[\beta] = \frac{\text{rad}}{m}$$

Egydimenziós Helmholtz-egyenlet:

$$\frac{d^2 \bar{u}(z)}{dz^2} - \bar{\sigma}^2 \cdot \bar{u}(z) = 0$$

általános megoldása:

$$\bar{u}(z) = \bar{u}^+ \cdot e^{-\bar{\gamma}z} + \bar{u}^- \cdot e^{+\bar{\gamma}z}$$

$$\bar{I}(z) = -\frac{1}{R' + j\omega L'} \frac{\partial \bar{u}(z)}{\partial z}$$

$$\bar{I}(z) = -\frac{1}{R' + j\omega L'} \cdot (-\bar{\gamma} \cdot \bar{u}^+ \cdot e^{-\bar{\gamma}z} + \bar{\gamma} \cdot \bar{u}^- \cdot e^{+\bar{\gamma}z})$$

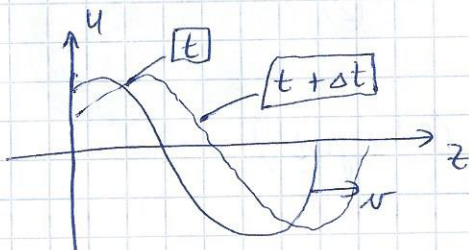
hullámimpedancia bevezethető: $\bar{Z}_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$!

$$\bar{I}(z) = \frac{\bar{u}^+}{\bar{Z}_0} \cdot e^{-\bar{\gamma}z} - \frac{\bar{u}^-}{\bar{Z}_0} \cdot e^{+\bar{\gamma}z} \quad \bar{Z}_0 = \frac{\bar{u}^+}{\bar{I}^+} = -\frac{\bar{u}^-}{\bar{I}^-}$$

Az értelmezés során egyszerűsítésekkel élünk:

$$\left. \begin{array}{l} u(z) = u^+ \cdot e^{-\gamma z} - u^- = \phi \\ u^+ \cdot e^{-\gamma z} \cdot \cos(\omega t - \beta z) - u^- \text{ valós} \\ - \gamma = \phi \end{array} \right\} u(z, t) = u^+ \cdot \cos\left[\omega\left(t - \frac{\beta}{\omega} z\right)\right]$$

z -vel arányos késleltetés



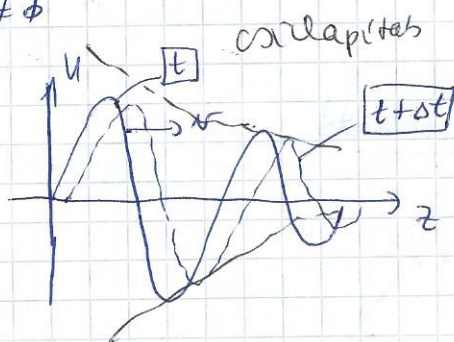
haladó hullám

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

fázis sebesség
(energia seb.)

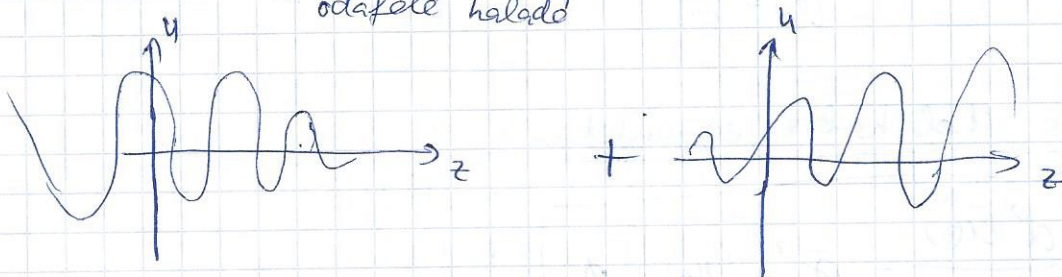
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \tau = \frac{2\pi}{\beta}$$

$\gamma \neq \phi$



$u^- \neq \phi \rightarrow$ szuperpozíció
odafelé haladó

visszafelé haladó



39. tétel

1) Terjedési együttható ($\bar{\gamma}$)

A Helmholtz-egyenlet levezetéséből jön ki.

$$\bar{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}$$



$$\bar{\gamma} = \alpha + j\beta$$

csillapítási
tényező

$$[\alpha] = \frac{1}{m}$$

fázistényező

$$[\beta] = \frac{\text{rad}}{m}$$

A feszültség/áram amplitúdója
időben exponenciálisan csökken

A feszültség egy z helyen
fáziskésésben van $z = \phi$ -hoz
képest.

$$U^{\oplus}(z,t) = U_0^{\oplus} \cdot e^{-\alpha z} \cdot \cos\left[\omega\left(t - \frac{\beta}{\omega} z\right)\right] \rightarrow U^- = \phi \quad U^+ \text{ valós}$$

késleltetés z -vel arányos

$$N_f = \frac{\omega}{\beta}$$

szinusz setén:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

2) Hullámmimpedancia

A Helmholtz-egyenlet általános megoldásából jön ki.

$$Z_{\phi} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \quad [Z_{\phi}] = \Omega$$

$$\bar{I}(z) = \frac{\bar{U}^{\oplus}}{Z_{\phi}} \cdot e^{-\bar{\gamma}z} - \frac{\bar{U}^{\ominus}}{Z_{\phi}} \cdot e^{\bar{\gamma}z}$$

$$Z_{\phi} \triangleq \frac{\bar{U}^{\oplus}}{\bar{I}^{\oplus}} = - \frac{\bar{U}^{\ominus}}{\bar{I}^{\ominus}}$$

Z_{ϕ} frekvenciafüggetlen!
(és hosszfüggetlen)

ideálisnak

3) Ideális távvezeték

↳ veszteségmentes $\rightarrow R' = G' = 0$

↳ csillapításmentes $\rightarrow \alpha = 0$

↳ diszperziómentes (diszperzió = frekvenciafüggő sebesség)
↳ *frekvenciafüggetlen v*

$$\bar{Z} = \sqrt{j\omega L' \cdot j\omega C'} = j\omega \sqrt{L' \cdot C'} = j/\beta$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{L' \cdot C'}$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{L' \cdot C'}} = \frac{1}{\sqrt{L' \cdot C'}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = v$$

Lecher, koax
frekvenciafüggetlen

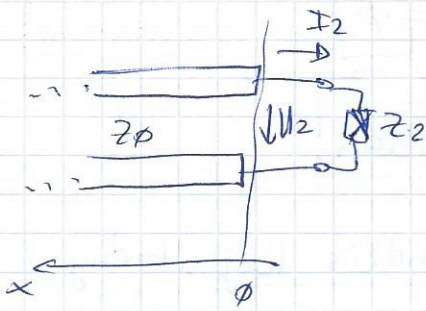
ideális légrizigetelésű TV: $\epsilon_r = 1$ $v = c$

$$\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi \cdot f}{c}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega L'}{j\omega C'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

tiszta valós $\rightarrow$ hullámellenállás

40. feladat



$$x = l - z \rightarrow z = l - x$$

$$U(x) = U_2^+ e^{\gamma x} + U_2^- e^{-\gamma x}$$

$$U(z) = U^+ \cdot e^{-\gamma z} + U^- \cdot e^{\gamma z} = U^+ \cdot e^{-\gamma(l-x)} + U^- \cdot e^{\gamma(l-x)}$$

$$= \underbrace{U^+ \cdot e^{-\gamma l}}_{U_2^+} \cdot e^{\gamma x} + \underbrace{U^- \cdot e^{\gamma l}}_{U_2^-} \cdot e^{-\gamma x} = U(x)$$

$$U(x) = U_2^+ \cdot e^{\gamma x} + U_2^- \cdot e^{-\gamma x}$$

$$I(x) = \frac{U_2^+}{Z_0} \cdot e^{\gamma x} - \frac{U_2^-}{Z_0} \cdot e^{-\gamma x}$$

beeső hullámkomponens reflektált hullámkomponens



$$\Gamma \triangleq \frac{U_{\text{reflektált}}}{U_{\text{beeső}}}$$

TV végén

$$\Gamma_2 = \frac{U_2^- \cdot e^{-\gamma \phi}}{U_2^+ \cdot e^{\gamma \phi}} = \frac{U_2^-}{U_2^+} = \Gamma_2(x=\phi)$$

A reflexió tényező a szembe haladó hullámok komplex értékeinek arányát határozzák meg.

$$\underline{Z_2} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{U(x=\phi)}{I(x=\phi)} = \frac{U_2^+ \cdot (1 + \Gamma_2)}{\frac{U_2^+}{Z_0} \cdot (1 - \Gamma_2)} = Z_0 \cdot \frac{1 + \Gamma_2}{1 - \Gamma_2}$$

$U_2^- = \Gamma_2 \cdot U_2^+$
 $U(x) = U_2^+ (e^{\gamma x} + \Gamma_2 e^{-\gamma x})$
 $I(x) = \frac{U_2^+}{Z_0} (e^{\gamma x} - \Gamma_2 e^{-\gamma x})$

$$\Gamma_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} \quad \text{reflexió a } Z_2 \text{ terhelésen}$$

Ha passzív a terhelés, akkor: $\text{Re}\{Z_2\} \geq 0$

$$\downarrow$$

$$| \Gamma_2 | \leq 1 \quad \text{egységkörön belül}$$



1) Illesztett terhelés

$$Z_L = Z_0$$

$$\Gamma_2 = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{\phi}{2Z_0} = \boxed{\phi}$$

nincs reflektált hullám!

$$U(z) = U^+ \cdot e^{-\gamma z}$$

$$I(z) = \frac{U^+}{Z_0} \cdot e^{-\gamma z}$$

↓
dörvithető maximális teljesítmény

$$Z_{be} = Z_0$$

$$Z_{max} = |U(x)| = |U_2^+| \cdot |e^{\gamma x}|$$

$$U(x) = U_2^+ \cdot e^{\gamma x}$$

$$I(x) = \frac{U_2^+}{Z_0} \cdot e^{\gamma x}$$



primer oldalról olyan, mintha ∞ hosszú lenne a vezeték

2) Szakadással történő terhelés $Z_L \rightarrow \infty$

↳ Nyitott végű

$$\Gamma_2 = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \lim_{Z_L \rightarrow \infty} \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{1-0}{1+0} = \boxed{1}$$

$$|U^-| = |U^+|$$

$$|U_2^-| = |U_2^+|$$

$$|\Gamma_2| = 1$$

teljes visszaverődés, totálreflexió

$$\alpha = \phi \text{ esetén: } U(x) = U_2^+ \cdot (e^{j\beta x} + 1 \cdot e^{-j\beta x}) = 2 \cdot U_2^+ \cdot \cos(\beta x)$$

$$U(x, t) = 2 \cdot U_2^+ \cdot \cos(\beta x) \cdot \cos(\omega t)$$

helyük az időben nem vált.

↳ állóhullám

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$\exists x \quad U(x, t) = 0 \quad \forall t$$

$$x = \frac{\pi}{2\beta} (2k+1) = \frac{\lambda}{4} (2k+1)$$

$$\cos(\beta x) = 0 \rightarrow \beta x = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{2} (2k+1)$$

↳ kialsztási hely

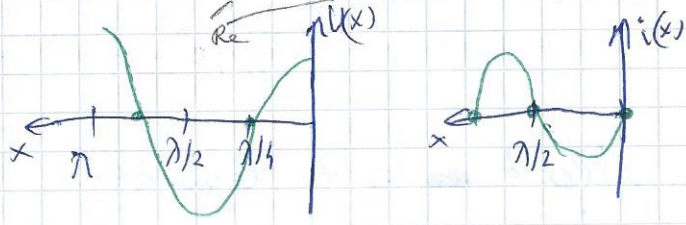
vannak kialsztási helyek
= csomópontok

$$I(x) = \frac{U_2^+}{Z_0} \cdot (e^{j\beta x} - 1 \cdot e^{-j\beta x}) = 2j \cdot \frac{U_2^+}{Z_0} \sin \beta x$$

$$i(x, t) = \text{Re} \left\{ 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{U_2^+}{Z_0} \sin \beta x \cdot e^{j\omega t} \right\} = 2 \frac{U_2^+}{Z_0} \sin \beta x \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$x = k \cdot \frac{\lambda}{2} \text{ kialsztási helyek}$$

$$\sin \beta x = 0 \quad \beta x = k \cdot \pi$$



Időben $\frac{1}{2}$ periódusonként az $\Rightarrow$
E és a H mező egymásba alakul,
hatásos teljesítményt nem szállít.
↳ az állóhullám

Bármely hullám leírható egy haladó és egy állóhullám szuperpozíciójaként

3) Rövidzárral terhelés TV

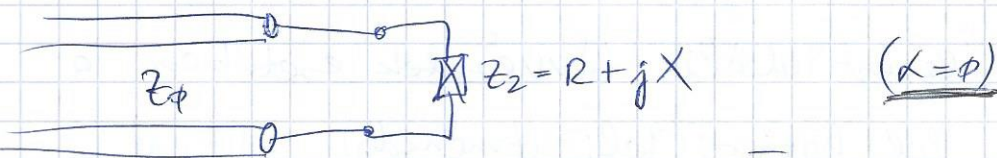
$$Z_L = \phi \quad (\alpha = \phi)$$

$$\Gamma_2 = \boxed{-1}$$

$$u: x = k \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$i: x = (2k+1) \frac{\lambda}{4}$$

kialsztási helyek
Rögzítési pont fordított!

4.1. tétel

$$\bar{\Gamma}_2 = \frac{\bar{Z}_2 - Z_0}{\bar{Z}_2 + Z_0} = \frac{r \cdot e^{-j2\varphi}}{\downarrow}$$

($I(x)$ ugyanaz, csak $1/Z_0$)

$$r = |\bar{\Gamma}_2| \in \mathbb{R} \geq 0$$

$$\varphi \in [0, \pi]$$

$$U(x) = U_2^+ \cdot \left(e^{j\beta x} + \left[r \cdot \bar{\Gamma}_2 \right] e^{-j\beta x} \right)$$

$$= U_2^+ \cdot e^{j\beta x} - U_2^+ \cdot r \cdot e^{j\beta x} + U_2^+ \cdot r \cdot e^{j\beta x} + r \cdot U_2^+ \cdot \bar{\Gamma}_2 \cdot e^{-j\beta x}$$

$$U_2^+ \cdot e^{j\beta x} (1-r) + U_2^+ \cdot r \cdot e^{-j\varphi} \cdot \left[e^{j\beta x} \cdot e^{j\varphi} + e^{-j\beta x} \cdot e^{-j\varphi} \right]$$

$$2 \cdot \cos(\beta x + \varphi)$$

$$U(x) = U_2^+ \cdot \underbrace{(1-r)}_{\text{haladó}} \cdot e^{j\beta x} + 2 \cdot U_2^+ \cdot r \cdot e^{-j\varphi} \cdot \underbrace{(\cos \beta x + \varphi)}_{\text{álló}}$$

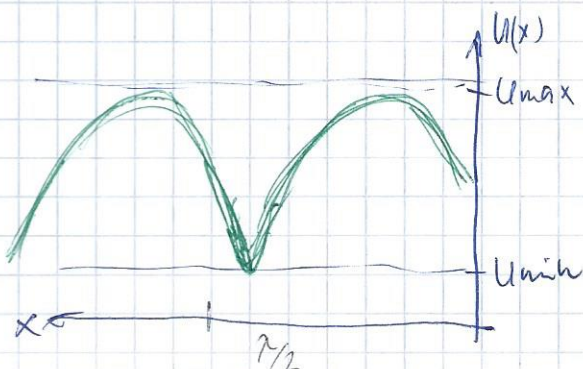
Ez az állóhullám-haladóhullám felbontás !

$$U(x) = U_{\text{haladó}}(x) + U_{\text{álló}}(x)$$

$$|U_{\text{haladó}}(x)| = U_2^+ \cdot (1-r) \text{ konstans}$$

A tisztán haladó hullám amplitúdója konstans

$$\bullet \text{ Létezik } x, \text{ hogy } \cos(\beta x + \varphi) = \phi \xrightarrow{\forall t} \text{csomópont} \rightarrow \text{állóhullám (időtől függetlenül)}$$



Cikloisz-görbe

absz. értéke $\neq$ a fegye absz. értékeinek összegével !

Energetikai tartalom

A reaktanciával lezáró ideális térvvezeték esetében a lezárás nem vesz fel határos teljesítményt.

Az időbeli átlaga Φ .

- Az oda és visszahaladó hullám teljesítményt szállít oda-vissza.
- A határos teljesítményt a haladó hullám viszi, az állóhullám nem szállít határos teljesítményt.

Tisztán állóhullámmal lengő teljesítmény van, negyed-
periódusanként oda-vissza „hintázik”
(állóhullámkép)

E és H tér egymásba alakul - időbeli periodicitás

42. tétel $(\varphi = \phi)$

$$\bar{z}_2 \text{ ismert} \rightarrow \bar{r}_2 = \frac{\bar{z}_2 - z_0}{z_2 + z_0} = r \cdot e^{-j2\beta x + \varphi} \quad 0 \leq r \leq 1$$

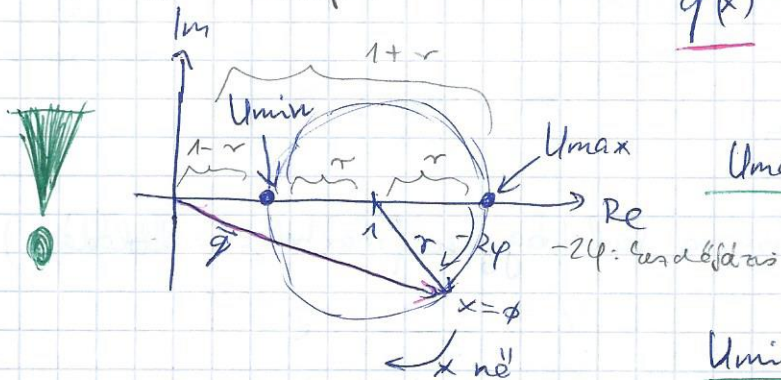
$$\varphi \in [0, \pi]$$

$$U(x) = U_2^+ \cdot (e^{j\beta x} + r \cdot e^{-j2\beta x + \varphi} \cdot e^{j\beta x})$$

$$U(x) = U_2^+ \cdot e^{j\beta x} (1 + r \cdot e^{-j(2\beta x + \varphi)})$$

$$|U(x)| = |U_2^+| \cdot 1 \cdot \underbrace{|1 + r \cdot e^{-j(2\beta x + \varphi)}|}_{\bar{q}(x)}$$

interferenciadiagram:



$$U_{\max} = |U_2^+| \cdot (1+r)$$

$$2\beta x + 2\varphi = 0 + k\pi$$

$$\beta x + \varphi = k \cdot \pi \quad / :2 \text{ után}$$

$$U_{\min} = |U_2^+| \cdot (1-r)$$

$$\beta x + \varphi = (2k+1) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

maximumhelyek:
($\cos=1$)

$$\beta x + \varphi = k\pi$$

$$U(x) = \frac{k \cdot \pi - \varphi}{\beta} = \frac{k \cdot \pi + \varphi}{\beta}$$

$$\beta x + \varphi = k\pi \quad (\varphi = \phi)$$

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) x = k\pi \rightarrow x = \frac{k \cdot \pi \cdot \lambda}{2\pi} = \boxed{\frac{k \cdot \lambda}{2}}$$

minimumhelyek:
($\cos=\phi$)

$$\beta x + \varphi = (2k+1) \frac{\pi}{2} \quad (\varphi = \phi)$$

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \boxed{\frac{(2k+1) \cdot \lambda}{4}}$$

Definiálható az állók hullámarány:

$$Z_2 \rightarrow r_2 \rightarrow \sigma \rightarrow \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \boxed{\frac{1 + |r_2|}{1 - |r_2|} = \sigma} \quad \sigma \in [1, +\infty]$$

Alkalmazása:

- impedanciamezre
 σ könnyen mérhető $\left(\frac{U_{\max}}{U_{\min}} \right)$



$|r_2|$ -et tudjuk

+ φ -t meghatározva valahogyan (max helyek eltolódása)



$$r_2 = \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} \cdot e^{j2\varphi}$$

$\bar{Z}_2$ leszó impedancia ismert, ha tudjuk a hullámellenállást.

$$\bar{r}_2 = \frac{\bar{Z}_2 - Z_0}{\bar{Z}_2 + Z_0}$$

$$Z_2 = \frac{1 + r_2}{1 - r_2} \cdot Z_0$$

- Nagyfrekvencián alkalmas anyagjellemzők mérésére.

43. tétel

Az amplitúdó „hullámosságot” az állóhullámarány jellemzi,

Ha nincs állóhullám: $U_{\max} = U_{\min}$

$$\sigma = 1$$

Ha tisztán állóhullám van: $U_{\min} = 0$

$$\sigma = \infty$$

VSWR =
Voltage
Standing
Wave Ratio

$$\sigma = \frac{U_{\max}}{U_{\min}}$$

A tápvezeték mentén mérhető maximális és minimális feszültség hányadosa.

$$1 \leq \sigma < \infty$$

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{Z_0} \rightarrow U_{\max} = Z_0 \cdot I_{\max}$$

$$Z_{\min} = \frac{U_{\min}}{I_{\max}} = \frac{U_{\max}}{\sigma} \cdot \frac{Z_0}{U_{\max}} = \frac{Z_0}{\sigma}$$

$(U_{\max})$ -nél $(I_{\min})$ és $(U_{\min})$ -nél $(I_{\max})$ van.

$$|I_{\min}| = \frac{|U_{\min}|}{Z_0} \rightarrow U_{\min} = Z_0 \cdot I_{\min}$$

$$\sigma = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} \rightarrow U_{\min} = \frac{U_{\max}}{\sigma}$$

$$Z_{\max} = Z_0 \cdot \sigma$$

$$Z_{\min} = \frac{Z_0}{\sigma}$$

$$\sqrt{\frac{Z_{\max}}{Z_{\min}}} = \sqrt{\frac{Z_0 \cdot \sigma}{Z_0 / \sigma}} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$$

$$\sqrt{\frac{Z_{\max}}{Z_{\min}}} = \sigma$$

előző tételből:

$$Z_0 \cdot I_{\min} = \frac{U_{\max}}{\sigma} \rightarrow I_{\min} = \frac{U_{\max}}{\sigma \cdot Z_0}$$

$$Z_{\max} = U_{\max} \cdot \frac{\sigma \cdot Z_0}{U_{\max}}$$

$$\sigma = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{|U_2^+| \cdot (1 + \Gamma)}{|U_2^+| (1 - \Gamma)} = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$$

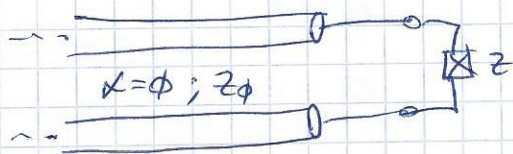
$\Downarrow$

$$\sigma = \frac{1 + |\Gamma_2|}{1 - |\Gamma_2|}$$

$$\Gamma = |\Gamma_2|$$

Nagyfrekvenciás impedanciámérés

- hagyományos módszerekkel nehéz kivitelezhető
- módszer:

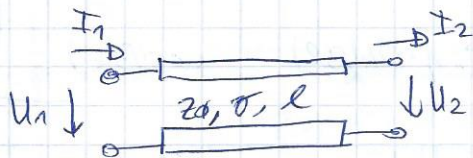


- 1) Mériük meg σ -t ($\frac{U_{\max}}{U_{\min}}$), jegyezzük fel a feszültségmaximumok helyét.
 - 2) Z helyére rövidzárát kapcsolunk és megmérjük a feszültségmaximumok eltolódását. (ϕ -hoz kell)
 - 3) A mért paraméterekből $\bar{\Gamma}_2$ meghatározható
- $$\sigma = \frac{1 + |\Gamma_2|}{1 - |\Gamma_2|} ; \quad \bar{\Gamma}_2 = |\Gamma_2| \cdot e^{i\phi} ?$$
- 4) $\bar{\Gamma}_2$ ismeretében $\bar{Z}$ meghatározható,

$$\bar{\Gamma}_2 = \frac{\bar{Z} - Z_0}{\bar{Z} + Z_0}$$

Az állóhullámarányt használják még nagyfrekvencián anyagjellemzők mérésére is.

Nagyfeken a hosszávezetések (szórt L, C) meghamisítandók a más módszerekkel történő mérések.

4.4. feladat

$$U(z) = U^+ \cdot e^{-\gamma z} + U^- \cdot e^{+\gamma z}$$

$$I(z) = U^+ / Z_0 \cdot e^{-\gamma z} - U^- / Z_0 \cdot e^{+\gamma z}$$

TV végén

 $z=0$

$$U_1 = U^+ + U^-$$

$$I_1 = \frac{U^+}{Z_0} - \frac{U^-}{Z_0}$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/Z_0 & -1/Z_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U^+ \\ U^- \end{bmatrix} \quad \textcircled{\text{I}}$$

TV végén

 $z=l$

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\gamma l} & e^{\gamma l} \\ e^{-\gamma l}/Z_0 & -e^{\gamma l}/Z_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U^+ \\ U^- \end{bmatrix} \quad \textcircled{\text{II}}$$

$\textcircled{\text{II}} \rightarrow U^+ \text{ és } U^- \text{ kifejezése, majd } \rightarrow \textcircled{\text{I}}$

mátrixinvertálás után ($\det = -\frac{2}{Z_0}$), egyszerűsítve:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{A}} =$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_0 \cdot \sinh(\gamma l) \\ \frac{1}{Z_0} \cdot \sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix}$$

$$U_1 = A_{11} \cdot U_2 + A_{12} \cdot I_2 = \cosh(\gamma l) \cdot U_2 + Z_0 \sinh(\gamma l) \cdot I_2$$

$$I_1 = A_{21} \cdot U_2 + A_{22} \cdot I_2 = \frac{1}{Z_0} \sinh(\gamma l) \cdot U_2 + \cosh(\gamma l) \cdot I_2$$

transzfer-mátrixlencsparaméteres leírásJellemzők:

- reciproka, mert $\cosh^2(\gamma l) - \sinh^2(\gamma l) \equiv 1 = \det \underline{\underline{A}}$
- szimmetrikus, mert reciproka és $A_{11} = A_{22}$
- passzív, mert $A_{11}, A_{22} \geq 0$ és $4 \cdot A_{11} \cdot A_{22} \geq (A_{12} + A_{21})^2$

Hullámparaméterek $\underline{\underline{A}}$ -ból:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}}$$

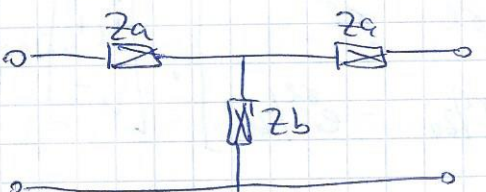
$$e^{\gamma l} = A_{11} + \sqrt{A_{12} \cdot A_{21}}$$

Ideális TV: $\alpha = \phi \Rightarrow \underline{A} = \begin{bmatrix} \cos(\beta l) & j \cdot Z_0 \cdot \sin(\beta l) \\ \frac{1}{Z_0} \cdot j \cdot \sin(\beta l) & \cos(\beta l) \end{bmatrix}$
 $\gamma = j\beta$

Impedancia-paraméterek, T helyettesítés

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \frac{Z_0}{\sinh(\gamma l)} \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & -1 \\ 1 & -\cosh(\gamma l) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} \text{recept,} & \text{minimum,} & \text{passzív} \end{matrix}$

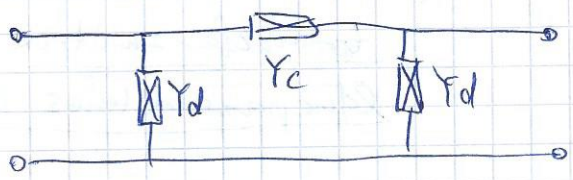


$$\begin{cases} Z_a = Z_0 \cdot \frac{\cosh(\gamma l) - 1}{\sinh(\gamma l)} \\ Z_b = \frac{Z_0}{\sinh(\gamma l)} \end{cases}$$

Nem realizálható, mert γ frekvenciafüggő. $(j\omega\sqrt{L'C'}) = j\beta$

Admittancia paraméterek, Π helyettesítés

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_0 \cdot \sinh(\gamma l)} \cdot \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & 1 \\ -1 & -\cosh(\gamma l) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$



$$Y_c = \frac{1}{Z_0 \cdot \sinh(\gamma l)}$$

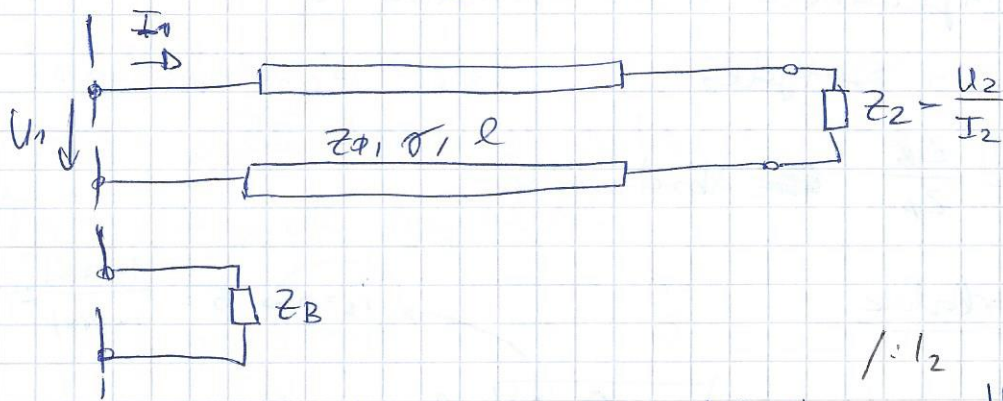
$$Y_d = \frac{1}{Z_0} \cdot \frac{\cosh(\gamma l) - 1}{\sinh(\gamma l)}$$

Nem tekinthető a TV koncentrált paraméterű helyettesítésnek,
 mert γ frekvenciafüggő, ezért a karakterisztika nem
 racionális törtfüggvény, hanem ^{ahhoz} hiperbolikus.

A koncentrált paraméterekből felépített rendszer átviteli
 karakterisztikája azonban mindig ω racionális tört-
 függvénye (Bode-diagram például) lásd: felek 1-2

Nem realizálható!

Számadni azonban jó vele, hálózatanalízisére alkalmas.

45. tétel

$$Z_B = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2 \cdot \text{ch}(\alpha l) + Z_0 \cdot I_2 \cdot \text{sh}(\alpha l)}{\frac{U_2}{Z_0} \cdot \text{sh}(\alpha l) + I_2 \cdot \text{ch}(\alpha l)} \quad \because I_2 = \frac{U_2}{Z_2}$$

$$= Z_0 \cdot \frac{\frac{U_2}{Z_2} \cdot \text{ch}(\alpha l) + Z_0 \cdot \text{sh}(\alpha l)}{\frac{U_2}{Z_2} \cdot \text{sh}(\alpha l) + Z_0 \cdot \text{ch}(\alpha l)}$$

$$Z_B = Z_0 \cdot \frac{Z_2 \cdot \text{ch}(\alpha l) + Z_0 \cdot \text{sh}(\alpha l)}{Z_2 \cdot \text{sh}(\alpha l) + Z_0 \cdot \text{ch}(\alpha l)}$$

↓ ideális TV ($\alpha = 0$)

$$Z_B = Z_0 \cdot \frac{Z_2 \cdot \cos(\beta l) + j \cdot Z_0 \cdot \sin(\beta l)}{j \cdot Z_2 \cdot \sin(\beta l) + Z_0 \cdot \cos(\beta l)} \quad \because \cos \beta l$$

$$= Z_B = Z_0 \cdot \frac{Z_2 + j \cdot Z_0 \cdot \tan(\beta l)}{Z_0 + j \cdot Z_2 \cdot \tan(\beta l)}$$

Speciális esetek:

- $Z_2 = Z_0 \rightarrow Z_B = Z_0$
- $Z_2 = \phi \rightarrow Z_{Bnr} = j Z_0 \cdot \tan(\beta l)$
- $Z_2 = \infty \rightarrow Z_{Buj} = -j Z_0 \cdot \cot(\beta l)$

} HANGOLHATÓ

$$\lim_{Z_2 \rightarrow \infty} Z_0 \cdot \frac{Z_2 + j Z_0 \tan \beta l}{Z_0 + j Z_2 \tan \beta l} \stackrel{\cdot 1/Z_2}{=} \frac{1 + \frac{j Z_0 \tan \beta l}{Z_2}}{\frac{Z_0}{Z_2} + j \tan \beta l} \xrightarrow{Z_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{j \tan \beta l} = -j \cot \beta l$$

l függvényében
lehetőleg rezisztancia
megvalósítható

$$Z_0 = \sqrt{Z_{Bnr} \cdot Z_{Buj}} = \sqrt{\frac{Z_{Bnr}}{-j \cot \beta l}}$$

$$\tan(\beta l) = \sqrt{\frac{Z_{Bnr}}{Z_{Buj}}}$$

A bemeneti impedancia ábrázolása a Smith-diagram segítségével.

$$z = \frac{Z_B}{Z_\phi} \quad \text{normalizálás ábrázolása}$$

egyes paraméterekről

↳ Re-1 albr. értékek
amelyek értéke 1-nél kisebb

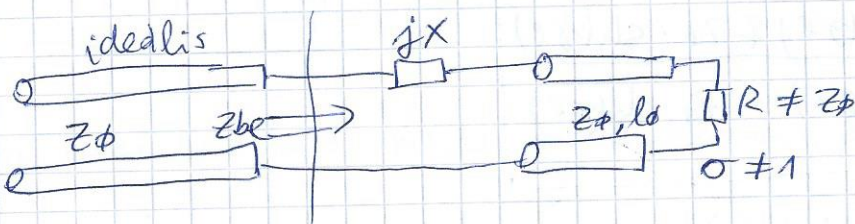
$$\Gamma_m = \frac{1 - |\Gamma_r|}{1 + |\Gamma_r|} = 1$$

Illesztési feladatok

A célunk, hogy $\Gamma \approx 1$ legyen!

$$\downarrow$$

$$Z_{be} \approx Z_\phi$$



$$Z_{be} = jX + Z_\phi \cdot \frac{R + jZ_\phi \tan(\beta l)}{Z_\phi + jR \tan(\beta l)} \approx Z_\phi \text{ legyen}$$

X, l : ismeretlenek

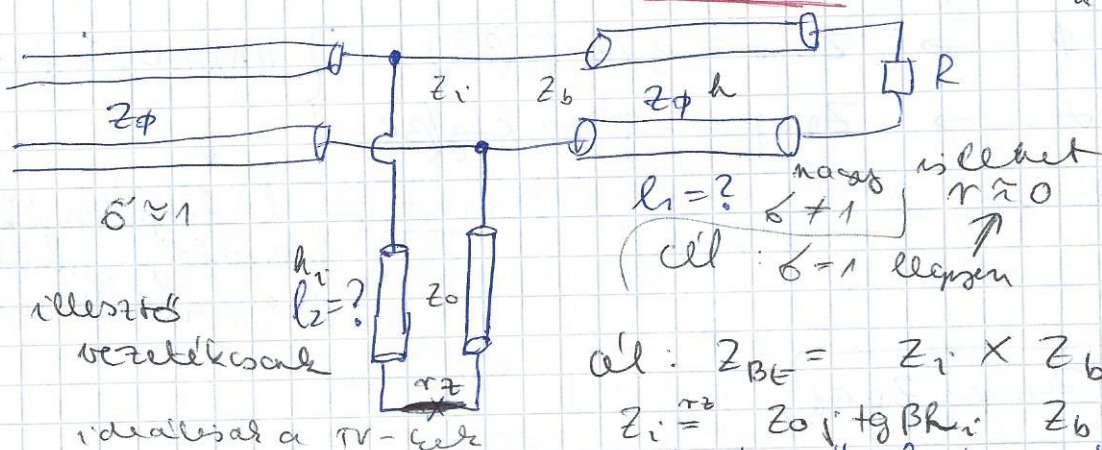
$$\text{Re}\{Z_{be}\} = Z_\phi \Rightarrow l \text{ kiszámolható}$$

$$\text{Im}\{Z_{be}\} = -X \Rightarrow X \text{ kiszámolható}$$

$$X + \text{Im}\left\{Z_\phi \cdot \frac{R + jZ_\phi \tan(\beta l)}{Z_\phi + jR \tan(\beta l)}\right\} = 0$$

adott: Z_ϕ, R, β, l

2)



illesztés
vezetékcsatlakozás

ideális a $\Gamma = 0$ cél

$$\text{cél: } Z_{be} = Z_i \times Z_b$$

$$Z_i = Z_\phi \tan(\beta l) \quad Z_b = Z_\phi \frac{R + jZ_\phi \tan(\beta l)}{Z_\phi + jR \tan(\beta l)}$$

A hossz változtatásával különböző frekvenciákon beállítható az illesztettség.

bevezetéses, ábrándozás, valós és képzetes részre

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \dots$$

Könnyebb párhuzamosan kapcsolni valamit $\rightarrow$ 2) alkalmasabb h_i, h_o kijön

46. tétel

tételeként
Feltételazzuk, hogy az anyag homogén: μ, ϵ, σ állandó

lin. + izotrop tér

irányított
elektromágneses
jelenség

— feltételezzük a ter: $\rho = \phi, (\vec{j} = \vec{\phi})$

E_0 nincs

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon \cdot \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \cdot \vec{H} \\ \vec{j} &= \sigma \cdot \vec{E}\end{aligned}$$

Igy a Maxwell-egyenletek: $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$$\text{I. } \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \epsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{II. } \text{rot } \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\text{III. } \text{div } \vec{H} = \phi$$

$$\text{IV. } \text{div } \vec{E} = \phi$$

$$-\frac{\partial B}{\partial t} = \text{rot } E \quad B = \mu H$$

$$\left(\text{div } \vec{B} = \phi \right)$$

$$(\text{div } \vec{D} = \rho = \phi)$$

1) Elektromos térsűrűsége

$$\begin{aligned}\text{II} \rightarrow \text{rot}(\text{rot } \vec{E}) &= -\mu \cdot \text{rot } \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu \cdot \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H} \stackrel{\text{I}}{=} \\ &= -\mu \sigma \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

matek!

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \underbrace{\text{grad}(\text{div } \vec{E})}_{\phi} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

$$\text{Tehát: } \Delta \vec{E} - \mu \sigma \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \phi$$

homogén

vektoriális, homogén hullám-egyenlet

2) Mágneses térsűrűsége

$$\begin{aligned}\text{I} \rightarrow \text{rot}(\text{rot } \vec{H}) &= \sigma \cdot \text{rot } \vec{E} + \epsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E} \stackrel{\text{II}}{=} \\ &= -\sigma \mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

matek!

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{H}) = \underbrace{\text{grad}(\text{div } \vec{H})}_{\phi} - \Delta \vec{H} = -\Delta \vec{H}$$

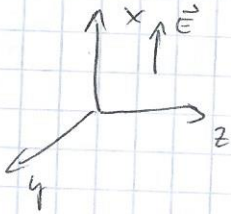
$$\text{Tehát: } \Delta \vec{H} - \mu \sigma \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \phi$$

47. tétel

Tiszta szinuszos időbeli változás esetén komplex számítási technikát alkalmazunk. A szinuszos jeleket komplex, exponenciális függvények valós részeként értelmezzük.

Megkötések:

- $\vec{E}$ az xy síkban nem változik. terbéli, csak megadott irányba mutat



$$\vec{E}(x, y, z, t) = E_x(z, t) \cdot \vec{e}_x \quad (\underline{z \text{ irányú terjedés}})$$

- Szinuszos változás

$$E_x(z, t) = \hat{E}_x(z) \cdot \cos(\omega t + \varphi(z))$$

$$= \operatorname{Re}\{ \bar{E}_x(z) \cdot e^{j\omega t} \}$$

$$\hookrightarrow \bar{E}_x(z) = \hat{E}_x(z) \cdot e^{j\varphi(z)}$$



A Helmholtz-egyenlet levezetése $\vec{E}$ -re

46-os tételből tudjuk, hogy a homogén hulláregyenlet:

$$\Delta \vec{E} - \mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{\phi}$$

↓ frekvenciatartományban $\left[\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega \right]$

$$\Delta \vec{E} = \Delta E_x \cdot \vec{e}_x + \Delta E_y \cdot \vec{e}_y + \Delta E_z \cdot \vec{e}_z = \Delta E_x \cdot \vec{e}_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \vec{e}_x$$

$\hookrightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$

Tehát: $\left[\Delta \vec{E} \rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \vec{e}_x \right]$ (csak z irányú terjedés)

Ezek után:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \vec{e}_x - \mu \sigma \cdot \frac{\partial E_x}{\partial t} \vec{e}_x - \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \vec{e}_x = \vec{\phi}$$

↓ $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$

$$\frac{\partial^2 \bar{E}_x}{\partial z^2} - \mu \cdot \sigma \cdot j\omega \cdot \bar{E}_x - \mu \cdot \epsilon \cdot (j\omega)^2 \cdot \bar{E}_x = \phi$$

Legyen

$$\bar{\gamma} = \sqrt{j\omega\mu \cdot (\sigma + j\omega\epsilon)}$$

$$\bar{\gamma} = \alpha + j\beta$$

csillapítási
együttható

fázistényező

terjedési
együttható

$$\frac{\partial^2 \bar{E}_x}{\partial z^2} - \bar{\gamma}^2 \bar{E}_x = \phi$$

Egydimenziós
Helmholtz-egyenlet

Általános megoldása TV analógiából következik:

$$\bar{E}_x(z) = \bar{E}^+ \cdot e^{-\bar{\gamma}z} + \bar{E}^- \cdot e^{\bar{\gamma}z}$$

48. tétel

Az időtérlet gerjesztő forrásoktól kelően távol és kelően kis tartományban a legtöbb szabadon terjedő hullám sík hullámként jól kezelhető.

$$\text{I. } \operatorname{rot} \vec{H} = \sigma \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \left(\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

$$\text{II. } \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \left(\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$



hullámegyenlet:

$$\Delta \vec{E} - \mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \phi$$



$$\vec{E}(x, y, z, t) = E_x(z, t) \cdot \vec{e}_x \quad (z \text{ irányba terjed})$$



$$E_x(z, t) = \hat{E}_x(z) \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= \operatorname{Re} \{ \bar{E}_x(z) \cdot e^{j\omega t} \}$$

$$\Delta \vec{E} - \mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \phi$$

↓ frekvencia tartományban $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$ és $\Delta \vec{E} \rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \cdot \vec{e}_x$

$$\frac{\partial^2 \bar{E}_x}{\partial z^2} - \mu \cdot \sigma \cdot j\omega \cdot \bar{E}_x - \mu \cdot \varepsilon \cdot (j\omega)^2 \cdot \bar{E}_x = \phi$$

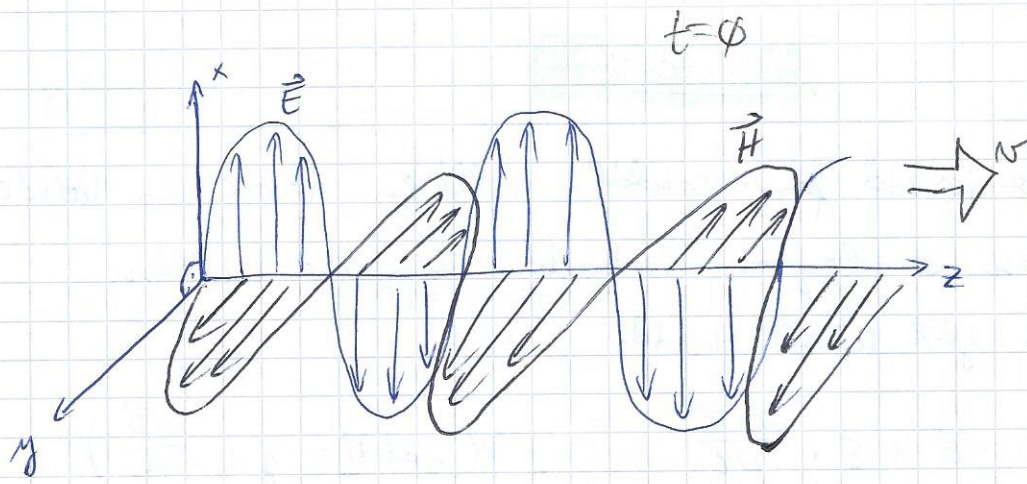
Legyen $\bar{\sigma} = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$!

$$\boxed{\frac{\partial^2 \bar{E}_x}{\partial z^2} - \bar{\sigma}^2 \bar{E}_x = \phi}$$

$$\text{és } \frac{\partial^2 \bar{H}_y}{\partial z^2} - \bar{\sigma}^2 \bar{H}_y = \phi$$

Általános megoldása: TV analógia

$$\bar{E}_x(z) = \bar{E}^+ \cdot e^{-\bar{\sigma}z} + \bar{E}^- \cdot e^{\bar{\sigma}z}$$



TEM:

terben $\vec{E}$ és $\vec{H}$ minden pillanatban merőlegesek egymásra és mindkettő merőleges a terjedés irányára (z).

$$\left. \begin{aligned} E_x(z,t) &= E^+ \cdot \cos(\omega t - \beta z) \\ H_y(z,t) &= \frac{E^+}{Z_0} \cdot \cos(\omega t - \beta z) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{időben fázisban} \\ \text{vannak} \end{array}$$

49. tétel

Maxwell I-II:

(SH):

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu' \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \sigma \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\downarrow \quad \vec{E} = E_x \cdot \vec{e}_x; \quad \vec{H} = H_y \cdot \vec{e}_y \quad \downarrow$$

$$\boxed{\text{rot } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z}}$$

$$\boxed{\text{rot } \vec{H} = -\frac{\partial H_y}{\partial z}}$$

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_y & 0 \end{array}$$

mennyiség előjel!!!

$$\boxed{-\frac{\partial E_x}{\partial z} = +\mu' \cdot \frac{\partial H_y}{\partial t}}$$

$$\boxed{-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \sigma \cdot E_x + \varepsilon \cdot \frac{\partial E_x}{\partial t}}$$

(TV):

$$\boxed{-\frac{\partial u}{\partial z} = R' \cdot i + L' \cdot \frac{\partial i}{\partial t}}$$

$$\boxed{-\frac{\partial i}{\partial z} = G' \cdot u + C' \cdot \frac{\partial u}{\partial t}}$$

lárvind-
egyenletek

Tehát:

→ síkhullámnak nincs ellendőlése

TV	u	i	R'	G'	L'	C'
SH	E _x	H _y	(-)	σ	μ	ε

↳ Maxwell-egyenletek aszimmetri-
Eusak



Analógiánál fontos, hogy a peremfeltételek is megegyezzenek!

- rövidzár → $u = \phi \leftarrow E_t = \phi \Rightarrow$ ideális fémsík
- szakadás → $i = \phi \leftarrow H_t = \phi \Rightarrow$ mágneses fal

Hullámparaméterek analógiája

$$\bar{Z} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} \Rightarrow \sqrt{j\omega \mu \cdot (\sigma + j\omega \varepsilon)}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \Rightarrow \sqrt{\frac{j\omega \mu}{\sigma + j\omega \varepsilon}}$$



A Helmholtz - egyenlet megoldásának analógiája:

$$U(x) = U^+ \cdot e^{-\gamma z} + U^- \cdot e^{+\gamma z} \Rightarrow E_x(z) = E_x^+ \cdot e^{-\gamma z} + E_x^- \cdot e^{+\gamma z}$$

$$I(x) = \frac{U^+}{Z_0} \cdot e^{-\gamma z} - \frac{U^-}{Z_0} \cdot e^{+\gamma z} \Rightarrow H_y(z) = \frac{E_x^+}{Z_0} \cdot e^{-\gamma z} - \frac{E_x^-}{Z_0} \cdot e^{+\gamma z}$$

Fázissebesség analógiája

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\swarrow \text{TV ideális } L=\phi$$

$$\beta = \omega \sqrt{L' \cdot C'}$$

$$\Downarrow$$

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{L' \cdot C'}}$$

$$\nearrow \text{ideális vezeték}$$

$$\sigma=0 \rightarrow$$

$$L=\phi$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \epsilon}$$

$$\Downarrow$$

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}}$$

Az analógia kerületei

– Nem érvényes az analógia, ha nem teljesülnek.

- az anyag homogén (μ, ϵ, σ állandó)
- a mezőben nincs töltés ($\rho = \phi$), (se áramszűrő ($\vec{j} = \phi$))
- a közeghatárok a hullámfrontokkal párhuzamos síkok legyenek
- A síkhullám merőlegesen ^{essen} terjedjen a közeghatárra
- Lineáris polarizáció legyen

Hullámfront: Az a felület, amelyben a hullámok egy ^{adott} pillanatban azonos irányban haladnak.
(azonos fázis)

50. tétel

A síkhullámot leíró képletekben kell egyszerűsítéseket végezniük, mivel a közegünk most ideális szigetelő, tehát: $\sigma = 0$. $\Rightarrow$

A közegünk csillapításmentes: $\alpha = 0$

$$\left. \begin{aligned} E_x(z) &= E_x^+ \cdot e^{-\gamma z} + E_x^- \cdot e^{\gamma z} \\ H_y(z) &= \frac{E_x^+}{Z_0} \cdot e^{-\gamma z} - \frac{E_x^-}{Z_0} \cdot e^{\gamma z} \end{aligned} \right\} \text{fázisban vannak}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = 0 + j\beta$$

$$\boxed{\gamma = \sqrt{j\omega\mu \cdot (\sigma + j\omega\epsilon)} = \sqrt{j\omega^2 \cdot \mu \cdot \epsilon} = j\omega\sqrt{\mu \cdot \epsilon} = j\beta}$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \epsilon}$$

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}} = v_f = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}}}_{\Rightarrow \mu_r = 1 \text{ felt.}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = \boxed{\frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}}$$

A sebesség ~~frekvenciafüggő~~ frekvenciafüggetlen

$\hookrightarrow$ diszperziómentes

$$\boxed{\lambda = \frac{v_f}{f} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r} \cdot f}}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \boxed{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} = Z_0 = \underbrace{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}_{\substack{\text{vákuum hullámimp.} \\ \eta_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

szabadtéri hullámimpedancia: $\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \Omega \approx \boxed{377 \Omega}$

$$\hookrightarrow Z_{er} = \frac{377 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

51. feladat

$\chi = \phi$ és csak egyirányú hullámterjedés van (E^+)
 $\vec{E}^+ = E^+ \cdot e^{j\phi}$ lin. pol.

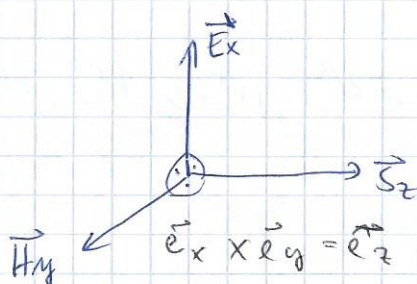
$$\vec{E}_x(z) = \vec{E}^+ \cdot e^{-j\beta z} = E^+ \cdot \cos(\omega t - \beta z + \phi)$$

$$\vec{H}_y(z) = \frac{\vec{E}^+}{Z_0} \cdot e^{-j\beta z} = \frac{E^+}{Z_0} \cdot \cos(\omega t - \beta z + \phi)$$

A teljesítményáramlást a Poynting-vektor jellemzi:

$$\vec{S}(x, y, z, t) = \vec{E} \times \vec{H} = E_x(z, t) \cdot \vec{e}_x \times H_y(z, t) \cdot \vec{e}_y = S_z(z, t) \cdot \vec{e}_z$$

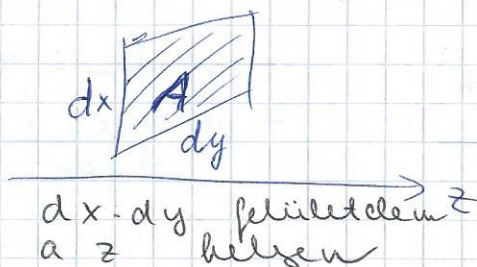
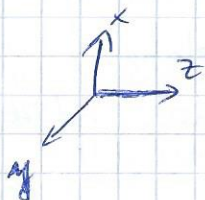
a terjedés irány-
 yalában mutat



$$\cos^2(\phi) = \frac{1}{2} \cdot \cos(2\phi) + \frac{1}{2}$$

$$S_z(z, t) = E^+ \cdot \frac{E^+}{Z_0} \cdot \cos^2(\omega t - \beta z + \phi) = \frac{E^{+2}}{Z_0} \cdot \cos^2(\omega t - \beta z + \phi)$$

$$= \frac{E^{+2}}{2Z_0} + \frac{E^{+2}}{2Z_0} \cdot \cos(2\omega t - 2\beta z + 2\phi)$$



$\vec{S}$ iránya megegyezik
 a terjedés irányával

A hatásos teljesítmény:

$$P(z) = dx \cdot dy \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_0^T S_z(z, t) dt$$

↓
 A cosinus-os tag 0

$$P(z) = dx \cdot dy \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{E^{+2}}{Z_0}$$

z-től független!

↓
 a teljesítmény időátlag
 allandó

Általánosan:

$$H^+ = \frac{E^+}{Z_0}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot E^+ \cdot H^+ \text{ (dxdy) } A \text{ felület}$$

$$\bar{E}_x = E^+ \cdot e^{-j\beta z}$$

$$\bar{H}_y = \frac{E^+}{Z_0} \cdot e^{-j\beta z}$$

} komplex amplitúdók

↓

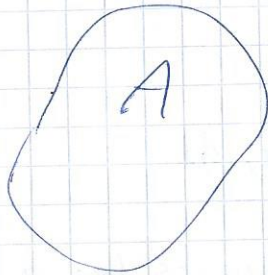
$$S = \frac{1}{2} \cdot \bar{E}_x(z) \cdot \bar{H}_y^*(z) = \frac{1}{2} \cdot E^+ \cdot \underbrace{e^{j\beta z}}_{E^+} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \underbrace{H^+ \cdot e^{-j\beta z} \cdot e^{j\beta z}}_{\text{const.}} \\ = \frac{1}{2} \cdot E^+ \cdot H^+$$

Síkhullámra: $P = \frac{1}{2} \int \bar{E}_x \cdot \bar{H}_y^* dx dy$

Komplex Poynting-vektor =

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \cdot \vec{E} \times \vec{H}^*$$

↓
időbeli
átlagolás
miatt



- rendezői komplexek
- valós és imaginárius része is vektor.
- 3 komplex számból / 6 valósból áll

$$P + jQ = \oint_A \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

$$P = \oint_A \operatorname{Re}\{\vec{S}\} \cdot d\vec{A}$$

A Poynting-vektor a teljesítmény áramlási sűrűséget jellemzi.

$$[\vec{S}] = \frac{W}{m^2}$$

52. tétel

$$\sigma \gg \omega \cdot \epsilon$$

$$\sqrt{j} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} \approx \sqrt{j\omega\mu\sigma} = \sqrt{j} \cdot \sqrt{\omega\mu\sigma} = \\ &= \frac{1+j}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\omega\mu\sigma} = (1+j) \cdot \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \end{aligned}$$

$$(\text{szkin-mélység}) = \delta \triangleq \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad \text{behatolási mélység}$$

A behatolási mélység egy frekvencia-
függő inényszám, mely alapján el tudjuk dönteni, hogy
kell-e foglalkoznunk a jelenséggel. (skin effect)

$$\gamma = \frac{1}{\delta} + j \cdot \frac{1}{\delta}$$

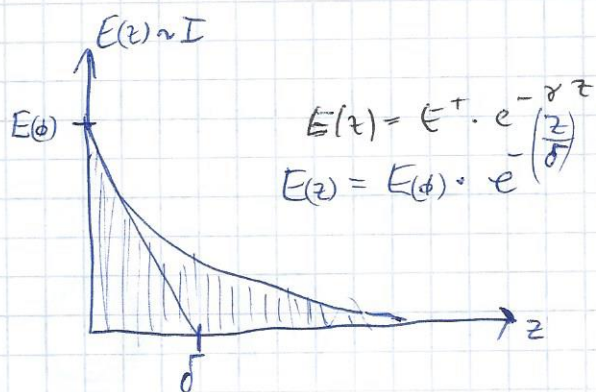
$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot f \cdot \mu \cdot \sigma}} = \frac{a}{\sqrt{f}} \rightarrow \text{anyagjellemzők}$$

$\hookrightarrow \omega = 2\pi f$

A behatolási mélység nem egyenlő az az távolsággal, amíg
a hullám behatol a vezetékbe!

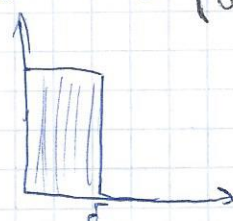
$$\begin{aligned} Z_{\phi} &= \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \approx \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma \cdot 2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1+j}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\delta} = \boxed{\frac{1+j}{\delta \cdot \sigma} = Z_{\phi} = \frac{\gamma}{\sigma}} \end{aligned}$$

$\nearrow$ bővítes 2δ -val



$$y(z) = \sigma \cdot E(z) = \sigma \cdot E^+ e^{-z/\delta} \cdot e^{-j z/\delta}$$

Veszteségszámítás szempontjából
olyan, mint ha az áram
csak δ keresztmetszeten
folyna egyenletes eloszlással.
(vesztés kívül lehet)



- fő vezetők σ frekvenciafüggetlen és megegyezik az egyensúlyi értékekkel

Árnyékterjedés $\rightarrow$ A jól vezetők anyagok, felület azon tul-t, hogy benne az em. hullám intenzitása igen gyorsan nő, felh. átvitelre. Az átv. egyenes elvezetése az em. károsítja.

- A töltéseknek nincs idejük elmozdulni a vezető bel-
sejében olyan mértékben, ami töltészetválást okozna
(nagy frekvencián)
Ezért lehetséges mo-a az átvitelre a terjedést követően a jól vezetők felületén. Az átv. károsítja a hullámot, amit a hullámok elvezetése nem old meg.
- Minél nagyobb a frekvencia, annál nagyobb lesz a vezető nagyfrequenciás ellenállása (lásd σ)

- Gyakorlatilag $\sigma \sigma$ területben már elhanyagolható a hullámterjedés

pl. alumínium (adott $h-n$: $\sigma \rightarrow \sigma \sigma$ vastagság $\rightarrow$ átv. $\sigma \sigma$)
~~Az árnyékterjedés károsítja a károsítást~~

$$R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{2r\pi \cdot \sigma}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0}}$$

nagyobb $\omega \rightarrow$ kisebb $\sigma \rightarrow$ nagyobb R

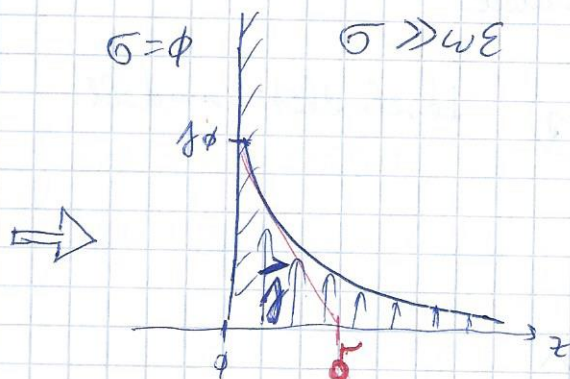
$$R = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \cdot \sigma \approx 6,28 \sigma \rightarrow \text{min. hullámhossz}$$

$$\beta = \frac{1}{\sigma}$$

$$| \gamma | \approx 0, \text{ ha } z \gg \sigma$$

53. tétel

Váltakozó áram esetén nagy frekvencián a töltéseknek nincs idejük rendeződni, ezért az áramcsűrűség a vezető felületétől a belseje felé exponenciálisan csökken el - orszelcsk.



$$E(z) = E^+ \cdot e^{-\sigma z}$$

$$J(z) = \sigma \cdot E(z) = \sigma \cdot E^+ \cdot e^{-\frac{z}{\delta}} \cdot e^{-j \frac{z}{\delta}}$$

↓

$$\frac{|J(z)|}{|J(0)|} = \underbrace{\sigma \cdot |E^+|}_{|J(0)|} \cdot e^{-\frac{z}{\delta}} \cdot 1$$

$$|J(z)| = |J(0)| \cdot e^{-\frac{z}{\delta}}$$

A behatoló hullám egy hullámhossza: $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \cdot \delta \approx \underline{\underline{6,28 \delta}}$

$$|J| \approx \phi \text{ ha } z > \underline{5\delta}$$

Nincs hullámjelenség már, mert egy hullám sem fér bele az első csillapítás miatt.

Áramviszonyításnál ott folyik a legnagyobb áram, ahol a szigetelőből a vezetőbe a legnagyobb teljesítmény áramlik.



közelségi effektus → R-et nem lehet
pl vezetőipárnál /
vezeték csatlakozásánál közel
δ-val számolni!



sarokeffektus

Ha egy hengeres vezető vastagsága elég nagy ($d \gg \delta$), akkor váltakozó áramú ellenállása számítható egy δ vastagságú henger ellenállásaként.

Veszteségek:

$l \times d$ felületen belépő komplex teljesítmény:

$$P + jQ = \frac{1}{2} Z \cdot |I_\phi|^2 \quad \text{hálózati modell}$$

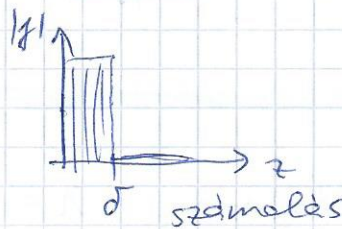
$$P + jQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{d \cdot \delta} \cdot |I_\phi|^2 \cdot (1 + j) \quad \text{lételmeleti modell}$$

$$16 \cdot EA$$

$$Z = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{d \cdot \delta} \cdot (1 + j) = R + jX$$



$\Rightarrow$



$$R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{d \cdot \delta}$$

Veszteség szempontjából olyan, mint ha az áram δ keresztmetszeten folyna homogén kitöltéssel térben.

$$R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{d} \cdot \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}$$

$$L = \frac{X}{\omega} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{d} \cdot \sqrt{\frac{\mu \sigma}{2 \omega}}$$

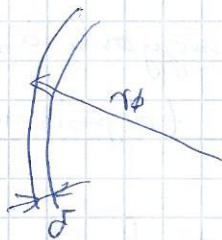
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} L = 0$$

a, $\delta \gg r_\phi \rightarrow$ szkin hatás d-homogénizálható

$\downarrow$
egyenáramú eset:

$$R' \approx \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{r_\phi^2 \cdot \pi}$$

b, $\delta \ll r_\phi \rightarrow$



A pereme síknak tekinthető lokálisan

$\downarrow$

Síkon terjedő beesés problémája

$$R' = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{2 r_\phi \cdot \pi \cdot \delta}$$

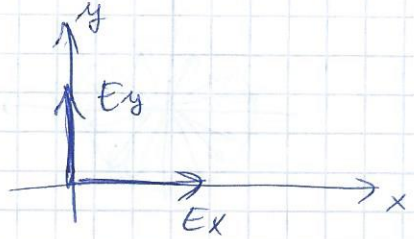
c, $\delta \sim r_\phi \rightarrow$ analitikus megoldás, Bessel-függvények

54. tétel

Vizsgáljunk két síkhullámot a $z=0$ síkban:



Tekintsük csak az elektromos teret:



Milyen pályát ír le az eredő $\vec{E}$ vektora?

$$\begin{cases} E_x(t) = E_{x0} \cdot \cos(\omega t) \\ E_y(t) = E_{y0} \cdot \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$\cos(\omega t) = \frac{E_x}{E_{x0}} \rightarrow \sin(\omega t) = \sqrt{1 - \frac{E_x^2}{E_{x0}^2}}$$

$$E_y(t) = E_{y0} \cdot [\cos(\omega t) \cdot \cos(\varphi) - \sin(\omega t) \cdot \sin(\varphi)]$$

$$\frac{E_y}{E_{y0}} = \frac{E_x}{E_{x0}} \cdot \cos(\varphi) - \underbrace{\sqrt{1 - \frac{E_x^2}{E_{x0}^2}}}_{\sin \omega t} \cdot \sin(\varphi) \quad ! \quad /^2$$

$$? \left\{ \frac{E_y^2}{E_{y0}^2} - \frac{2 \cdot E_x \cdot E_y}{E_{x0} \cdot E_{y0}} \cdot \cos(\varphi) + \frac{E_x^2}{E_{x0}^2} \cdot \cos^2(\varphi) = \sin^2(\varphi) - \frac{E_x^2}{E_{x0}^2} \cdot \sin^2(\varphi) \right.$$

$$\boxed{\frac{E_x^2}{E_{x0}^2} + \frac{E_y^2}{E_{y0}^2} - \frac{2 \cdot E_x \cdot E_y}{E_{x0} \cdot E_{y0}} \cdot \cos(\varphi) = \sin^2(\varphi)}$$



Ez egy általános helyzetű, origó középpontú ellipszis.

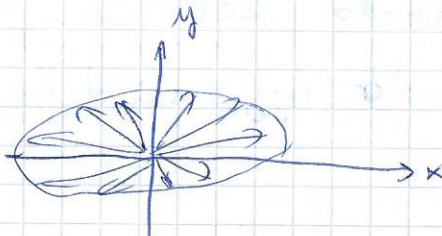
Az eredő terezhosszvektor elliptikus pályát ír le.

Például

$$a, \varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{E_x^2}{E_{x0}^2} + \frac{E_y^2}{E_{y0}^2} = 1 \rightarrow \text{ellipszis origó k-p-t.}$$

$$\rightarrow \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\rightarrow \sin \frac{\pi}{2} = 1$$



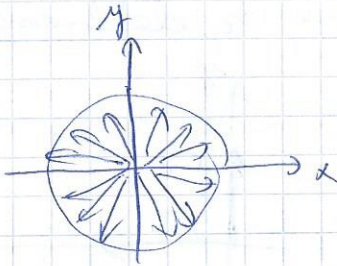
elliptikus polarizáció

b) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ és $E_{x\phi} = E_{y\phi} = E_\phi$

↓

$$\frac{E_x^2}{E_0^2} + \frac{E_y^2}{E_0^2} = 1 \quad | \cdot E_0^2$$

$$E_x^2 + E_y^2 = E_\phi^2 \rightarrow \text{kör, } r_0 \text{ sugarú}$$



cirkuláris polarizáció

c) $\varphi = \pi$

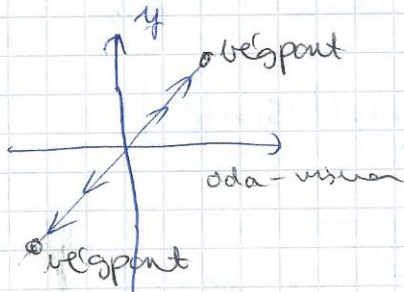
$$\cos \pi = -1$$

$$\sin \pi = 0$$

$$\frac{E_x}{E_{x\phi}} + \frac{E_y}{E_{y\phi}} = 0$$

→ egyenes $\left(\frac{E_x}{E_{x0}} + \frac{E_y}{E_{y0}} \right)^2 = 0 \quad | \sqrt{}$

$$\frac{E_x^2}{E_{x0}^2} + \frac{E_y^2}{E_{y0}^2} + \frac{2E_x E_y}{E_{x0} E_{y0}} = 0$$



lineáris polarizáció

Bármilyen elliptikusan polarizált síkhullám felbontható

- két lineáris
- két cirkuláris
- egy lineáris és egy cirkuláris polarizációjú síkhullám szuperpozíciójára.

A polarizáció alapja az elliptikus polarizáció.

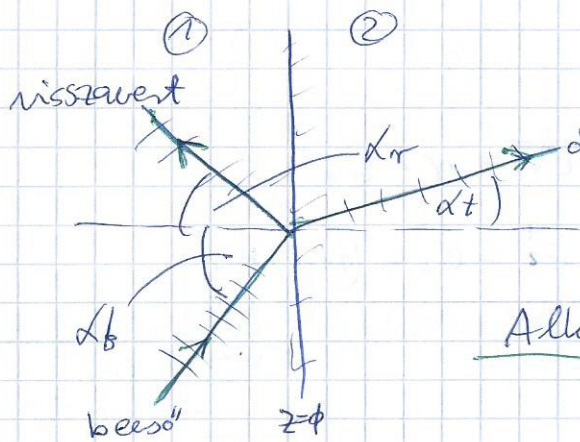
Távvezeték analógia csak lineáris polarizáció esetében használható, mert csak itt írható fel az eredő vektor mint egy haladó és visszavertő hullám szedője.

Nem lin. pol. esetén felbontható két lin. pol. szedőjére és TV analógiaként használható úgy, mint ha 2TV-t párhuzamosan kapcsolnánk.

55. feladat

1) Általános eset

- ferde beesés



a hullám felbontható a határfelületre merőleges komponensre és azaz párh. komponensre

 k_1 : beesés k_2 : behatolás

$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$

$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$

$n = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}}$

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

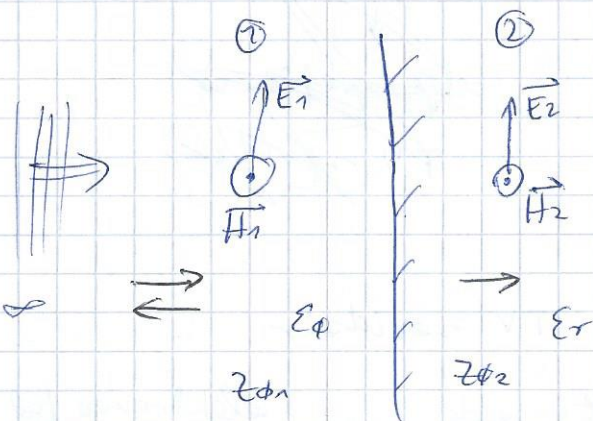
Alkalmazhatók: - Snellius-Descartes

- Fresnel tv.

2) Merőleges beesés

$\alpha_b, \alpha_r, \alpha_t = 0$

- lineáris polarizáció esetén használható TV analógia



elliptikus polarizáció felbontható két lineárisra

TV

2 párhuzamosan kapcsolt TV

$$\begin{cases} E_1(z) = E_1^+ \cdot e^{-\gamma_1 z} + E_1^- \cdot e^{\gamma_1 z} \\ H_1(z) = \frac{E_1^+}{Z_{01}} \cdot e^{-\gamma_1 z} - \frac{E_1^-}{Z_{01}} \cdot e^{\gamma_1 z} \end{cases}$$

$$\left(Z_{02} = \frac{Z_{01}}{\sqrt{\epsilon_r}} \right) = \frac{\sqrt{\epsilon_r} - 1}{\sqrt{\epsilon_r} + 1}$$

$\text{pl. } Z_{01} = 120\pi \Omega$

A második félter végtelen $\rightarrow$ nincs reflexió ($E_2^- = 0$)

Folytonossági feltétel:

$$\begin{cases} E_2(z) = E_2^+ \cdot e^{-\gamma_2 z} \\ H_2(z) = \frac{E_2^+}{Z_{02}} \cdot e^{-\gamma_2 z} \end{cases}$$

$E_1 = E_2 \Rightarrow E_1(z=0) = E_2(z=0)$

$H_1 = H_2 \Rightarrow H_1(z=0) = H_2(z=0)$

$\gamma_1 = \sqrt{j\omega\mu_1 \cdot (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)}$

$Z_{01} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_1}{\sigma_1 + j\omega\epsilon_1}}$

$z = \phi$ (töveghatár) $\rightarrow$ polystenossz

$$E_1^+ + E_1^- = E_1 = E_2 = E_2^+$$

Ha E_1^+ ismert, akkor E_1^- és E_2^+ is meghatározható

$$\frac{E_1^+}{z_{\phi 1}} - \frac{E_1^-}{z_{\phi 1}} = H_2^+ = \frac{E_2^+}{z_{\phi 2}}$$



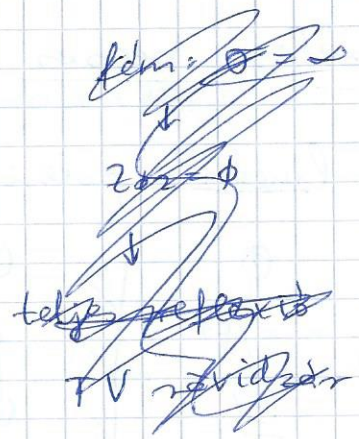
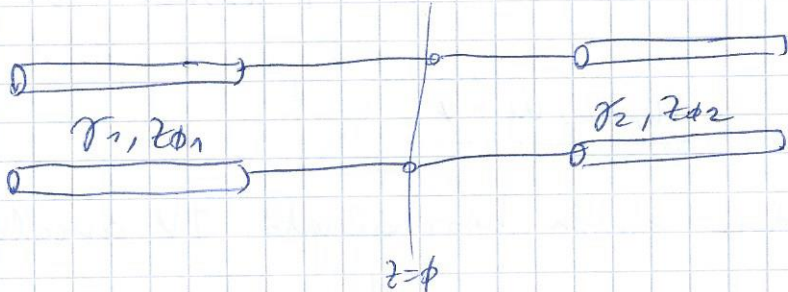
$$r = \frac{z_{\phi 2} - z_{\phi 1}}{z_{\phi 2} + z_{\phi 1}}$$

$$\begin{cases} E_1^- = r \cdot E_1^+ \\ E_2^+ = E_2 = (1+r) E_1^+ \end{cases}$$

$$H_1^- = -\frac{E_1^-}{z_{\phi 1}} = -r \cdot \frac{E_1^+}{z_{\phi 1}} = -r \cdot H_1^+$$

Alkalmazható a TV-analógia:

$$H_2^+ = \frac{E_2^+}{z_{\phi 2}} = \frac{1+r}{z_{\phi 2}} E_1^+ = \frac{1+r}{z_{\phi 1}} \cdot E_1^+ = (1+r) H_1^+$$



② fém: $\sigma = \infty \Rightarrow z_{\phi 2} = \phi \Rightarrow$ TV rövidzár teljes reflexió $r = -1$ ellentézesen $\mu_2 = \infty$ univerzális elektromos fal

$$z_{\phi 2} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}} = \phi$$

② felületén felületi áramok folynak. $\vec{K} = H_1 \times \vec{e}_z$

$E_1 = E_2 = 0$
 $H_2 = \phi \Rightarrow$ nincs hullám a 2. környben

② $\mu_2 = \infty \Rightarrow z_{\phi 2} = \infty \Rightarrow$ TV szakadás teljes reflexió $r = 1$

mágneses fal
relatív permeabilitás $\mu_r = \infty$ határfelület

② szigetelő $\Rightarrow \sigma_2 = \phi \Rightarrow$ $\vec{H}_t = 0$

$$r = \frac{z_{\phi 2} - z_{\phi 1}}{z_{\phi 2} + z_{\phi 1}} = \frac{\sqrt{\epsilon_r} - 1}{\sqrt{\epsilon_r} + 1}$$

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \rightarrow \beta = \frac{\omega}{v}$$

$$z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$\sqrt{\epsilon_r} = n$$

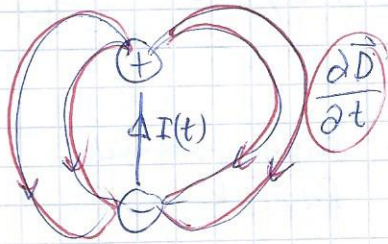
$$\frac{\omega}{\beta} = v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

$$\sqrt{\epsilon_r} = n, \text{ ha } \mu_r = 1$$

56. tétel

1) Hertz-dipólus

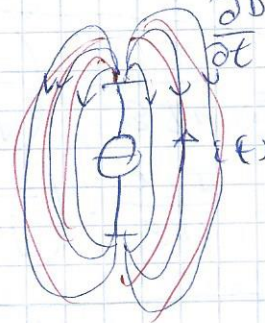
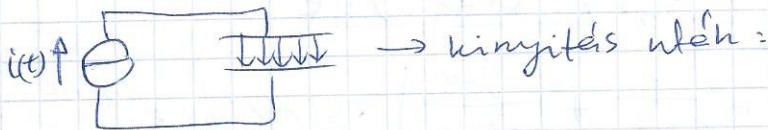
a, elméleti megközelítés
dipólus hosszalosszi



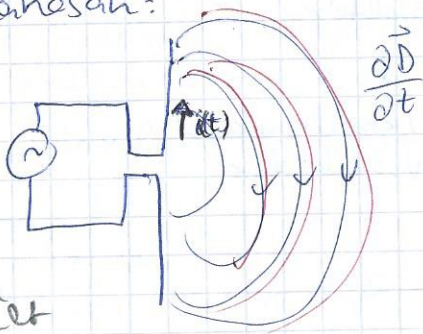
eltérési áram segítségével
záródik az áram útja

a töltés oda- vissza "folyik"
a töltésvált. hatására a 2 pont között
áram folyik, ami eltolási áram

b, gyakorlati megközelítés
áramforrással táplált csatlakozó



általában:



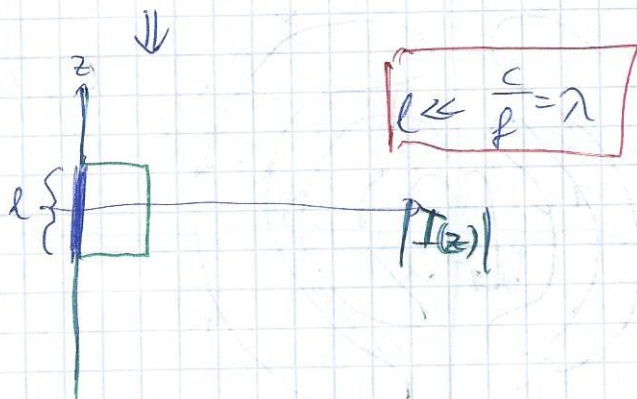
középen
táplált

nem állandó az áram,
hisz a kinyitást követően
de olyan rövid $l \ll \lambda = c/f \Rightarrow$
árama egész hosszánál állandó

$$i(z,t) = \operatorname{Re} \{ \bar{I}(z) \cdot e^{-j\omega t} \}$$

$$\bar{I}(z) = \bar{I} = \bar{I}_0 \cdot e^{jkz} \text{ konstans}$$

A Hertz-dipólus egy olyan
rövid antenna, ahol az an-
tenna árama a teljes hosszán
állandó, nincsenek közben
elválások.



Valóságban nem létezik, de
Hertz-dipólusból tetszőleges áramelosztású antenna összerak-
ható.

57. lehelA Hertz-dipólus teljes tere:

$$\vec{H}_\varphi(r, \varphi) = \frac{\vec{I} \cdot l}{4\pi} \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{j\omega}{c \cdot r} \right) \cdot \sin(\varphi) \cdot e^{-j\omega \frac{r}{c}}$$

$\vec{I} \cdot l$ áram a betáplálási ponton
 $\left(\frac{1}{r^2} + \frac{j\omega}{c \cdot r} \right)$ a dipólus hossza $l \ll \lambda$
 $e^{-j\omega \frac{r}{c}}$ sugárirányú fáziskésés

$$\vec{E}_r(r, \varphi) = \frac{\vec{I} \cdot l}{4\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{2}{j\omega r^3} + \frac{2}{c \cdot r^2} \right) \cdot \cos(\varphi) \cdot e^{-j\omega \frac{r}{c}}$$

$$\vec{E}_\varphi(r, \varphi) = \frac{\vec{I} \cdot l}{4\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{1}{j\omega r^3} + \frac{1}{c \cdot r^2} + \frac{j\omega}{c^2 \cdot r} \right) \cdot \sin(\varphi) \cdot e^{-j\omega \frac{r}{c}}$$

 $\frac{1}{r^3} \rightarrow$ kapacitív közelítés: A statikus dipólus tere

 $\frac{1}{r^2} \rightarrow$ induktív közelítés: $\vec{I} \cdot l$ áramelem tere (Biot-Savart)

 $\frac{1}{r} \rightarrow$ távolítás $\rightarrow$ sugárirányú tér ($r > 10\lambda$)
Tárolás

$$\left[\begin{aligned} \vec{H}_\varphi &= \frac{\vec{I} \cdot l}{4\pi} \cdot \frac{j\omega}{c \cdot r} \cdot \sin(\varphi) \cdot e^{-j\omega \frac{r}{c}} \\ \vec{E}_\varphi &= \frac{\vec{I} \cdot l}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{j\omega}{c \cdot r} \cdot \sin(\varphi) \cdot e^{-j\omega \frac{r}{c}} \end{aligned} \right] \quad \begin{aligned} \frac{1}{r} &\rightarrow \text{sugárirányú} \\ \sin(\varphi) &\rightarrow \text{elevációs szög} \\ &\text{szérinti változás} \end{aligned}$$

főbb komponens $\times$

Időfüggvény:

$$i(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t) \rightarrow \boxed{\vec{I} = -j \cdot I_0}$$

$$\boxed{\beta = \frac{\omega}{c}}$$

$$\vec{H}_\varphi(r, \varphi, t) = \frac{I_0 \cdot l \cdot \omega}{4\pi \cdot c} \cdot \frac{\sin \varphi}{r} \cdot \cos(\omega t - \beta r)$$

$$\vec{E}_\varphi(r, \varphi, t) = \frac{I_0 \cdot l \cdot \omega}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot c^2} \cdot \frac{\sin \varphi}{r} \cdot \cos(\omega t - \beta r)$$

$$\begin{aligned} -j \cdot j &= 1 \\ \omega \frac{\pi}{c} &= \beta \cdot r \end{aligned}$$

Az antenna távolterében a terjedést lokálisan síkhullámnak tekinthetjük. $\vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{e}_r$ és $\frac{\sin \varphi}{r}$ kis környezetben konstans.

↓
A cos előtti tag a E amplitúdó!

$$\frac{E_\varphi}{H_\varphi} = \eta = 120\pi \, \Omega \quad (= Z_0) = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot c} = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\epsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \eta \quad \text{hullámimp.}$$

Teljesítménydramlás

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \cdot \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2} \cdot (\vec{E}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi) \times (\vec{H}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi)$$

$\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_r$

$$\vec{S} = \vec{S}_r \cdot \vec{e}_r$$

A teljesítmény a terjedés irányába dramlik.

$$\vec{S}_r(r, \varphi) = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{(\vec{E}_\varphi \cdot \vec{H}_\varphi)}_{\vec{E}_\varphi \cdot \vec{H}_\varphi} \cdot \vec{H}_\varphi^* =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot Z_0 \cdot |\vec{H}_\varphi|^2$$

$$\vec{S}_r(r, \varphi) = \frac{|\vec{E}|^2 \cdot \omega^2 \cdot l^2 \cdot Z_0}{32 \cdot \pi^2 \cdot c^2} \cdot \frac{\sin^2(\varphi)}{r^2}$$

Észrevételek:

- tiszten valós $\rightarrow$ A térben csak hatásos teljesítmény terjed!
- radialis irányú
- $\frac{\sin^2(\varphi)}{r^2}$ helyfüggésű

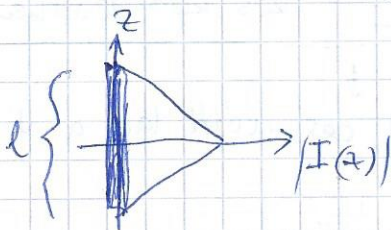


$\hookrightarrow$ a tengely irányába nem sugároz ($\sin 0^\circ = 0$)
 $\hookrightarrow$ a maximális teljesítmény a középpontnál sugároz ki ($\sin 90^\circ = 1$)

EXTRA

VDR – valódi rövid dipólus

$\hookrightarrow$ dramelazlása nem egyenletes



58. tétel

1) Iránykarakterisztika Ampl. irányfar = Sugárzási far.

[3D] A távolságot jellemzi

csak r-vel függ

$$h(r, \varphi) = \frac{E(r=R, \varphi)}{\max_{(\varphi', \varphi'')} [E(r=R, \varphi')]} \quad \text{rögzített sugár}$$

Relatív mennyiség, az adott irányban rögzített sugárra vett amplitúdó viszonyítjuk a maximális rögzített sugárú amplitúdéhoz.

[2D] vertikális iránykarakterisztika pl. egyenes antennákra

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$$

$$h(\varphi) = \frac{E(r=R, \varphi)}{\max_{(\varphi')} [E(r=R, \varphi')]} \quad \text{gyakran:}$$

gyakran:

$$h_{dB} = 20 \lg h$$

Hertz-dipólusra:

$$\varphi' = \frac{\pi}{2} \rightarrow$$

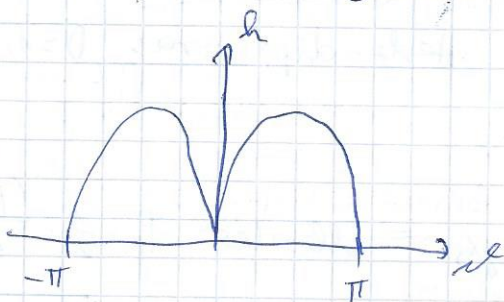
$$h(\varphi) = |\sin(\varphi)| = \frac{E(R, \varphi)}{E(R, \frac{\pi}{2})}$$

abs az ampl. minél
kiseb

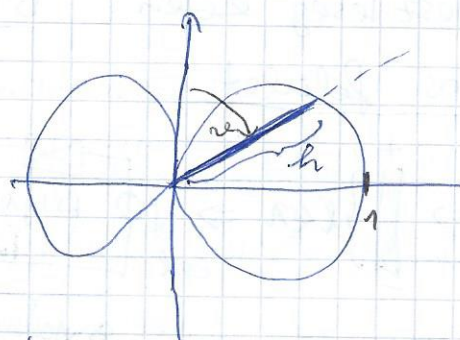
~~Ábrák~~

Ábrázolás:

• derékszögű



• polárdiagram



A maximális sugárzás a
felező'síkban van.

2) Sugárzási ellenállás

- kisugárzott határos teljesítmény

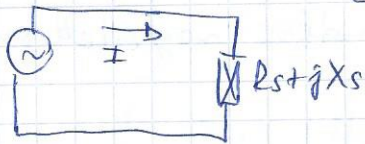
$$P_s = \operatorname{Re} \left\{ \oint_{\Gamma=R} \vec{S} \cdot d\vec{A} \right\}$$

Hertz-dipólusra:
(kettős integrál)

$$P_s = \frac{I^2 \cdot l^2 \cdot \beta^2 \cdot Z_0}{12\pi}$$

$\frac{A}{G}$ antennától
független konstans!
HD $\Rightarrow \frac{A}{G} = \frac{\lambda^2}{4\pi}$

- hálózati modell



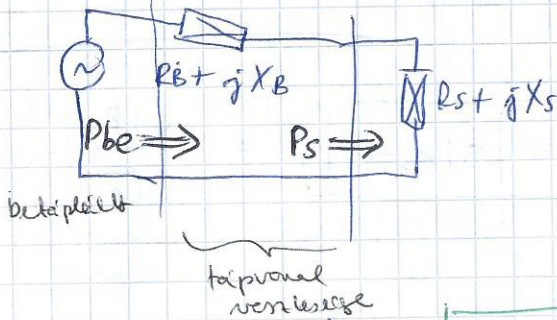
$$P_s = \frac{1}{2} \cdot |I|^2 \cdot R_s$$

$$R_s = \frac{2 \cdot P_s}{|I|^2} \quad \text{sugárzási ellenállás}$$

Hertz-dipólusra:

$$R_s = \frac{\beta^2 \cdot l^2 \cdot Z_0}{6\pi} = \frac{120\pi}{\beta^2} \cdot \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \Omega$$

3) Irányhatás, antennanyereség



nyereség (gain):

irányhatás (directivity):

$$D = \frac{S_{\max}}{S_{\text{átl.}}} = \frac{\max_{\theta, \varphi} [S(r=R, \theta, \varphi)]}{P_s / (4R^2\pi)}$$

↑
gömbfelületre

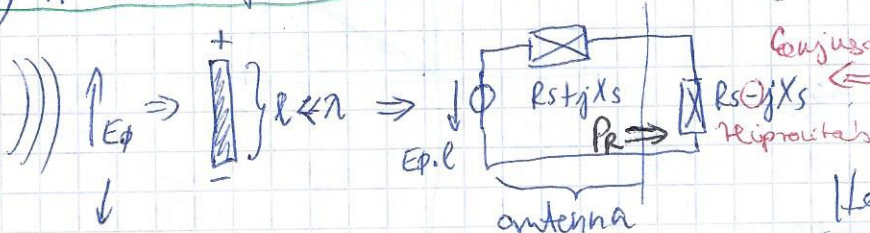
$$G = \frac{S_{\max}}{S_{\text{be}}} = \frac{\max [S(r=R, \theta, \varphi)]}{P_{\text{be}} / (4R^2\pi)}$$

kis veszteség esetén: $D \approx G$

Hertz-dipólusra: $D = 1,5$ (abszolút)

$$G \approx 10 \cdot \lg G \text{ (dB)}$$

4) Határos felület $\rightarrow$ nagyantenna vizsgálata



konjugált imp.

illesztés: $R_L = R_s$

maximális

$$P_R = \frac{1}{2} \cdot \frac{(E_0 \cdot l)^2}{R_s}$$

$$\text{Hertz-dipólus: } A = \frac{3\lambda^2}{8\pi}$$

$$R_s = 80\pi^2 \cdot \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \Omega$$

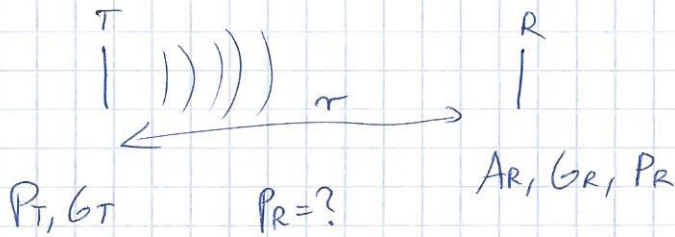
$$S_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{E_0^2}{120\pi \Omega}$$

$$A = \frac{P_R(\text{ell})}{S_0}$$

$U_{\text{eff}} \approx E_0 \cdot l$
(teljesítményváltakozás)

59. tétel

T: adó R: vevő



A vevő a maximális sugárzás irányába essen.
és párhuzamos a tárol-
tér villamos ténél

$$P_R = \underbrace{\frac{P_T}{4\pi^2 r^2}}_{S_\Phi} \cdot G_T \cdot A_R = \frac{P_T \cdot \lambda^2}{16\pi^2 r^2} \cdot G_T \cdot G_R = P_R$$

$$A_R = G_R \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

$$P_R = S_\Phi \cdot A_R$$

$$\downarrow$$

$$S_\Phi = G_T \cdot \frac{P_T}{4\pi^2 r^2} \quad (\text{térátlag} \cdot \text{adó antennanyeresége})$$

Az adó P_T teljesítményt kisugároz a térbe, ebből ténylegesen az antenna veszteségei miatt csak $P_T \cdot G_T$ jut ki. Ez egy gömbfelületen oszlik szét, tehát az átlagos teljesítmény a tér egy adott pontjában $\frac{P_T}{4\pi^2 r^2} \cdot G_T$.

A vevő csak a hatásos felületnek megfelelő mennyiséget tud belőle „befogni”, így

$$P_R = \frac{P_T}{4\pi^2 r^2} \cdot G_T \cdot A_R$$

$$A_R = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G_R, \quad \text{mert}$$

A állandó antennától függetlenül, Hertz-dipólussal ki tudjuk számolni:

$$\frac{A_R}{G_R} = \frac{\frac{3\lambda^2}{8\pi}}{11.5} = \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

KÉPLETEK

1) Fizikai alapok

- Coulomb-tör.

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2}$$

- Mágneses erőtv.
(Biot-Savart, Ampère)

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{|I_1 \cdot I_2| \cdot l}{d}$$

- töltésre vonatkozó folytonossági egyenlet

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

2) EM-teret leíró vektormezők

- $\vec{E}$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$$

ponttöltés:

$$E_r(r) = \vec{e}_r \cdot \frac{Q_p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

vonaltöltés:

$$E_r(r) = \vec{e}_r \cdot \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

felület:

$$E_z(r) = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \vec{e}_z$$

- $\vec{B}$

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad (\vec{E} = 0)$$

$$|B| = \frac{|F|}{q \cdot v}$$

vezető:

$$\vec{B}(r, \varphi, z) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r} \cdot \vec{e}_\varphi$$

- $\vec{D}$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_f$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_f$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_f$$

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

• $\vec{H}$

$$\vec{j} = \vec{j}_f + \vec{j}_b + \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}$$

$$\vec{j}_b = \text{rot } \vec{M}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

• Maxwell - egyenletek

integrális

differenciális

gerj:
(Ampère)

$$\oint_{L(s)} \vec{H} d\vec{s} = \int \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{s}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

ind:
(Faraday)

$$\oint_{L(s)} \vec{E} d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{s}$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Gauss:

$$\int_{S(v)} \vec{D} d\vec{s} = \int \rho dV$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

mágn. Gauss:

$$\int_{S(v)} \vec{B} d\vec{s} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

• folytonassági feltételek

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma$$

$$B_{2n} - B_{1n} = 0$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

$$H_{2t} - H_{1t} = \vec{k}$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{k}$$

$$E_{2t} - E_{1t} = 0$$

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) = - \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

• differenciális Ohm - törvény

$$\vec{j} = \sigma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_b) + \vec{j}_b$$

- Energiaátalakulások EM-térben

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m)$$

lokális E-ménleg:

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{j^2}{\sigma} - \vec{E}_b \cdot \vec{j} + \text{div}(\vec{E} \times \vec{H})$$

globális E-ménleg:
(Poynting-tétel)

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \frac{j^2}{\sigma} dV - \int_V \vec{E}_b \cdot \vec{j} dV + \oint_{A(V)} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{A}$$

Poynting-vektor:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

- EM-tér által kifejtett erő

pontoszerű objektum:

$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

erőssűrűség:

$$\vec{f} = \rho \cdot \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$$

virtuális munka:

$$-\frac{\partial W_{EM}}{\partial x} = F_x$$

3) Elektrodinamika felosztása

- elektrosztatika

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad \text{div } \vec{D} = \rho \quad \vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E}$$

- magnetosztatika

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad \vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M})$$

- stacioner áramlás

$$\text{div } \vec{j} = 0 \quad \text{rot } \vec{E} = 0 \quad \vec{j} = \sigma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_b) + \vec{j}_b$$

- stacioner mágneses tér

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$$

- áramnyáramok tere

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad \vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} + \vec{j}_b$$

- hullámterjedés

$$\text{rot } \vec{H} = \epsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{rot } \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

4) Elektrosztatika

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi$$

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

• dipólus tere:

$$\Phi_p = \frac{Q \cdot d}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos(\theta)}{r^2}$$

$$E_r = \frac{p}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos(\theta)}{r^3}$$

$$E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sin(\theta)}{r^3}$$

$$E_\phi = 0$$

• Laplace-Poisson

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

megoldása:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int \frac{\rho(\vec{r}') \cdot dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

• energija

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \Phi \rho dV + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{S(V)} \Phi \cdot \text{grad } \Phi \cdot d\vec{s}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_V \Phi \cdot \rho dV$$

• elektrodarendszer

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot \sum_k \Phi_k \cdot Q_k$$

kapacitás:

$$C = \frac{\oint \vec{D} \cdot d\vec{s}}{\int \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

$$C = \frac{2 \cdot W_e}{U^2}$$

kondi E:

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot U = \frac{1}{2} C \cdot U^2$$

• n sz kapacitások:

$$Q_i = C_{i0} \cdot \Phi_i + \sum_{k=1}^n C_{ik} \cdot (\Phi_i - \Phi_k)$$

$$\hookrightarrow C_{ik} = -\gamma_{ik} \text{ föld}$$

$$\hookrightarrow C_{i0} = \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} \text{ föld}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n \Phi_k \cdot Q_k$$

• peremértékek

$$\text{Neumann: } S_n: \frac{\partial \Phi}{\partial n} = g$$

$$\text{Dirichlet: } S_D: \Phi = f$$

5) Stacionárius áramlási té

- Laplace

$$\Delta \Phi = \rho$$

- határfeltételek:

$$\Phi \text{ folytonos, } \sigma \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n} \text{ folytonos}$$

- ellendülés

$$R = \frac{\int_V \vec{E} \cdot d\vec{e}}{\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s}}$$

- vesztesség

$$P = \frac{j^2}{\sigma} \quad P = \int_V p \, dV$$

- analógia

eset	$\vec{E}$	$\vec{B}$	ϵ	Φ	C
stac. dr	$\vec{E}$	$\vec{j}$	σ	Φ	G

6) Stacionárius áramlások mágneses tere

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\psi_s \triangleq \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_{L(S)} \vec{A} \cdot d\vec{e}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot \int_V \vec{A} \cdot \vec{j} \, dV$$

$$\Delta \vec{A} = -\mu \cdot \vec{j} \quad \text{Poisson (vektoriális)}$$

mágneses dipólus:

$$\vec{r} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$\vec{L}_m = I \cdot \vec{s}$$

megoldása:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, dV$$

- energia:

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot \sum_k I_k \cdot \psi_k$$

- Biot-Savart:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \cdot \oint \frac{d\vec{e} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

- indukció - eltek

$$L_{12} = L_{21} = M = \frac{\psi_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}$$

$$L = \frac{\psi_s}{I}$$

$$W_m = \frac{1}{2} L \cdot I^2 \rightarrow L = \frac{2 W_m}{I^2}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot I_1^2 + \frac{1}{2} \cdot L_2 \cdot I_2^2 + M \cdot I_1 \cdot I_2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 L_{kj} \cdot I_k \cdot I_j$$

- indukálási jelenségek

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} - \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad \text{egyesített indukáló tör.}$$

7) Tárvvezetők

- Lecher:

$$C' = \frac{\pi \cdot \epsilon_0}{\ln\left(\frac{d}{r_0}\right)}$$

$$L' = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{d}{r_0}\right)$$

$$G' \propto \phi$$

- koax:

$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

$$G' = \frac{2\pi\sigma}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

- távvezetők egyenletek

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = R' \cdot i + L' \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = G' \cdot u + C' \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

- hullámegyenlet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R' \cdot G' \cdot u + (R' \cdot C' + L' \cdot G') \frac{\partial u}{\partial t} + L' \cdot C' \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

id. TV
1D

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = L' \cdot C' \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

- 1D Helmholtz

$$\frac{d^2 \bar{u}(z)}{dz^2} - \bar{\gamma}^2 \cdot \bar{u}(z) = 0$$

alt. no.

$$\bar{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}$$

$$\bar{u}(z) = \bar{u}^+ \cdot e^{-\bar{\gamma}z} + \bar{u}^- \cdot e^{\bar{\gamma}z}$$

$$z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

$$\bar{I}(z) = \frac{\bar{u}^+}{z_0} \cdot e^{-\bar{\gamma}z} - \frac{\bar{u}^-}{z_0} \cdot e^{\bar{\gamma}z}$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} =$$

- ideális TV

$$\gamma = j\omega \sqrt{L' \cdot C'}$$

$$z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{L' \cdot C'}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot \mu_0}$$

- x-es koordináta-rendszer

$$U(x) = U_2^+ \cdot e^{\gamma x} + U_2^- \cdot e^{-\gamma x}$$

$$I(x) = \frac{U_2^+}{Z_0} \cdot e^{\gamma x} - \frac{U_2^-}{Z_0} \cdot e^{-\gamma x}$$

- reflexiótenyező

$$|r_2| \leq 1$$

$$\bar{r} \triangleq \frac{U_{\text{reflektált}}}{U_{\text{beeső}}} = \frac{U_2^-}{U_2^+} = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = r_2$$

- haladó hullám - állóhullám felbontás

$$U(x) = U_2^+ \cdot (1-r) \cdot e^{j\beta x} + 2 \cdot U_2^+ \cdot r \cdot e^{-j\varphi} \cdot \cos(\beta x + \varphi)$$

- állóhullámarány

$$\sigma \in [1, \infty[$$

$$\sigma = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{1+|r_2|}{1-|r_2|}$$

- Láncparaméterek

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \text{ch}(\gamma l) & Z_0 \cdot \text{sh}(\gamma l) \\ \frac{1}{Z_0} \cdot \text{sh}(\gamma l) & \text{ch}(\gamma l) \end{bmatrix} \stackrel{\text{id.}}{=} \begin{bmatrix} \cos(\beta l) & j \cdot Z_0 \cdot \sin(\beta l) \\ \frac{j}{Z_0} \cdot \sin(\beta l) & \cos(\beta l) \end{bmatrix}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}}$$

$$e^{\gamma l} = A_{11} + \sqrt{A_{12} \cdot A_{21}}$$

- T helyettesítés

$$Z_a = Z_0 \cdot \frac{\text{ch}(\gamma l) - 1}{\text{sh}(\gamma l)}$$

$$Z_b = \frac{Z_0}{\text{sh}(\gamma l)}$$

- Π helyettesítés

$$Y_c = \frac{1}{Z_0 \cdot \text{sh}(\gamma l)}$$

$$Y_d = \frac{1}{Z_0} \cdot \frac{\text{ch}(\gamma l) - 1}{\text{sh}(\gamma l)}$$

- Z_{BE}

$$Z_b \stackrel{\text{id.}}{=} Z_0 \cdot \frac{Z_2 + j Z_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + j Z_2 \tan(\beta l)}$$

$$Z_0 = \sqrt{Z_{Büj} \cdot Z_{Brc}}$$

$$\tan(\beta l) = \sqrt{\frac{Z_{Brc}}{Z_{Büj}}}$$

8) Síkhullámok

• Maxwell

$\text{rot } \vec{H} = \sigma \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\text{div } \vec{H} = \phi$
$\text{rot } \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$	$\text{div } \vec{E} = \phi$

• vektoriális homogén hullámegyenlet

$\Delta \vec{E} - \mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \phi$
$\Delta \vec{H} - \mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \phi$

• 1D Helmholtz

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_x}{\partial z^2} - \gamma^2 \cdot \vec{E}_x = \phi$$

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu \cdot (\sigma + j\omega\varepsilon)}$$

↓ alt. mo.

$$z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

$\vec{E}_x(z) = E^+ \cdot e^{-\gamma z} + E^- \cdot e^{\gamma z}$
$H_y(z) = \frac{E^+}{z_0} \cdot e^{-\gamma z} - \frac{E^-}{z_0} \cdot e^{\gamma z}$

• analógia

TV	U	I	R'	L'	G'	C'
SH	E_x	H_y	-	μ	σ	ε

• polarizáció

$$\text{alt.} \quad \frac{E_x^2}{E_{x0}^2} + \frac{E_y^2}{E_{y0}^2} - \frac{2 \cdot E_x \cdot E_y \cdot \cos(\varphi)}{E_{x0} \cdot E_{y0}} = \sin^2 \varphi$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}: \quad \frac{E_x^2}{E_{x0}^2} + \frac{E_y^2}{E_{y0}^2} = 1$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ és } E_{x0} = E_{y0} = E_0$$

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$$

$$\varphi = \pi \quad \frac{E_x}{E_{x0}} + \frac{E_y}{E_{y0}} = \phi$$

• teljesítmény

$$P = \frac{1}{2} \cdot E^+ \cdot H^+ \cdot dx dy$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \cdot \vec{E} \times \vec{H}^*$$

• energiateljesítmény

$$\bar{S}(r, \varphi) = \frac{|I|^2 \cdot \omega^2 \cdot l^2 \cdot Z_0}{32 \pi^2 \cdot c^2} \cdot \frac{\sin^2(\varphi)}{r^2}$$

• antennajellemzők

iránykarakterisztika

$$3D: h(\varphi, \psi) = \frac{E(r=r, \varphi, \psi)}{\max_{\varphi', \psi'} [E(r=r, \varphi', \psi')]}$$

$$h^{dB} = 20 \lg h$$

$$2D: h(\varphi) = \frac{E(r=r, \varphi)}{\max_{\varphi'} [E(r=r, \varphi')]}$$

$$h_{HD} = |\sin(\varphi)|$$

sugárzási ellenállás

$$R_s = \frac{2 \cdot P_s}{I^2} \stackrel{HD}{=} \frac{2 \cdot \frac{I^2 \cdot l^2 \cdot \beta^2 \cdot Z_0}{12 \pi}}{I^2} = 80 \pi^2 \cdot \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \Omega$$

irányhatás

$$D = \frac{S_{max}}{S_{\text{átlag}}} = \frac{\max[S(r, \varphi, \psi)]}{P_s / 4 \pi r^2}$$

$$D = G_{HD} = 1,5$$

antennanyerés

$$G = \frac{S_{max}}{S_{\text{bárányláb}}} = \frac{\max[S(r, \varphi, \psi)]}{P_{be} / 4 \pi r^2}$$

$$G^{dB} = 10 \lg G$$

hatásos felület

$$A = \frac{P_{R(ell)}}{S_{\phi}}$$

$$A_{HD} = \frac{3 \lambda^2}{8 \pi}$$

$$S_{\phi} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{120 \pi}$$

• átviteli egyenlet

$$P_R = \frac{P_T}{4 \pi r^2} \cdot G_T \cdot A_R = \frac{P_T \cdot \lambda^2}{16 \pi^2 r^2} \cdot G_T \cdot G_R$$

- behatolási mélység

$$\delta \cong \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}}$$

$$\gamma = \frac{1+j}{\delta} \quad Z_{\phi} = \frac{1+j}{\sigma \cdot \delta} \quad Z_{\phi} = \frac{\delta}{\sigma}$$

- skin-hatás

$$|\vec{H}(z)| = |\vec{H}_0| \cdot e^{-\frac{z}{\delta}}$$

- teljesítményszempok

$$P + jQ = \frac{l \cdot d \cdot \sigma \cdot \delta}{4} \cdot |E^+|^2 \cdot (1+j)$$

- hengeres vezetők ellenállása

$$\delta > r_0 \rightarrow R_{\phi}' = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{r_0^2 \pi}$$

$$\delta \leq r_0 \rightarrow R_{\phi}' = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{2 r_0 \pi \cdot \delta}$$

9) Hertz-dipólus

$$\vec{H}_{\phi}(r, \varphi) = \frac{\vec{I} \cdot l}{4\pi} \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{j\omega}{c \cdot r} \right) \cdot \sin(\varphi) \cdot e^{-j\omega \frac{r}{c}}$$

$$\vec{E}_r(r, \varphi) = \frac{\vec{I} \cdot l}{4\pi \epsilon} \cdot \left(\frac{2}{j\omega r^3} + \frac{2}{c \cdot r^2} \right) \cdot \cos(\varphi) \cdot e^{-j\omega \frac{r}{c}}$$

$$\vec{E}_{\varphi}(r, \varphi) = \frac{\vec{I} \cdot l}{4\pi \epsilon} \cdot \left(\frac{1}{j\omega r^3} + \frac{1}{c \cdot r^2} + \frac{j\omega}{c^2 r} \right) \cdot \sin(\varphi) \cdot e^{-j\omega \frac{r}{c}}$$

távoltér

$$\vec{H}_{\phi} = \frac{\vec{I} \cdot l}{4\pi} \cdot \frac{j\omega}{c \cdot r} \cdot \sin(\varphi) \cdot e^{-j\omega \frac{r}{c}}$$

$$\vec{E}_{\varphi} = \frac{\vec{I} \cdot l}{4\pi \epsilon} \cdot \frac{j\omega}{c^2 r} \cdot \sin(\varphi) \cdot e^{-j\omega \frac{r}{c}}$$

- időfüggvény

$$H_{\phi}(r, \varphi, t) = \frac{I_0 \cdot l \cdot \omega}{4\pi c} \cdot \frac{\sin(\varphi)}{r} \cdot \cos(\omega t - \beta r)$$

$$E_{\varphi}(r, \varphi, t) = \frac{I_0 \cdot l \cdot \omega}{4\pi \epsilon \cdot c^2} \cdot \frac{\sin(\varphi)}{r} \cdot \cos(\omega t - \beta r)$$

$$\eta \cong 377 \Omega$$