1. Zárthelyi megoldásokkal A1 2012 ősz

1. Legyen E tetszőleges nem üres halmaz és $A, B, C \subseteq E$. Mutassuk meg, hogy

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$

MO. Balról jobbra disztributivitással:

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (ab+b+ac+bc)(c+a) = \qquad \mathbf{3p}$$

$$= (b+ac)(c+a) = \qquad \mathbf{3p}$$

$$= bc+ac+ab \qquad \mathbf{4p}$$

Vagy jobbról balra fordított disztributivitással:

$$ab+bc+ca = (ab+b)(ab+c)+ca = b(ab+c)+ca = \qquad \mathbf{3p}$$

$$= (b+ca)(ab+c+ca) = (b+ca)(ab+c) = \qquad \mathbf{3p}$$

$$= (b+c)(b+a)(a+c)(b+c) = (b+a)(a+c)(b+c) \qquad \mathbf{4p}$$

10p

2. Bizonyítsa be, hogy ha egy egyenlőszárú háromszög két szára az a és b vektorok, továbbá a háromszög oldalai zárt vektorháromszöget alkotnak, akkor $ac = bc$ és ebből következően a háromszög alapon fekvő szögei megegyeznek!

MO. Legyen a háromszög két szára egymáshoz csatlakozva (ilyen sorrendben) irányítva: a és b. Zárt vektorháromszögben $a+b+c=0$, így a c alap: $c = -(a+b)$. Legyen az alapon fekvő a-nál lévő szög α, a másik alapon fekvő szög pedig β. Ekkor $|a| = |b|$ miatt

$$ac = -a(a+b) = -a^2 - ab = -|a|^2 - ab = -|b|^2 - ba = -b^2 - ba = -b(b+a) = bc \qquad \mathbf{5p}$$

így

$$|a||c|\cos\alpha = -ac = -bc = |b||c|\cos\beta \quad \rightsquigarrow \quad \alpha = \beta \qquad \mathbf{5p}$$

10p

3. Adja meg azokat a $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ és $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ pontokat, melyek rajta vannak az

$$x - y + z = -3 \text{ és } 2x + y + z = 1$$

egyenletű síkok metszésvonalán és melyek első koordinátái $x_1 = 4$ és $x_2 = 2$.

MO. Másodikból az elsőt levonva: $x + 2y = 4$, így

$y = t,\ x = 4 - 2t,\ z = -3 - (4 - 2t) + t = -7 + 3t$ a metszésvonal egyenlete, **6p**

tehát $x = 4 - 2t = 4 \rightsquigarrow t = 0 \rightsquigarrow y = 0,\ z = -7 \rightsquigarrow P_1 = (4, 0, -7)$ és

$x = 4 - 2t = 2 \rightsquigarrow t = 1 \rightsquigarrow y = 1,\ z = -4 \rightsquigarrow P_2 = (2, 1, -4)$. **4p**

10p

4. Adja meg összes olyan komplex számot, melyre $z^3 - \dfrac{1}{i^5} = 0$ (i a képzetes egység).

MO.

$$\frac{1}{i^5} = \frac{1}{i} = -i \qquad \mathbf{3p}$$

$$\text{így } z^3 - \frac{1}{i^5} = 0 \text{ iff } z^3 = -i \text{ iff}$$

iff $z = z_0 = e^{i\pi/2} = i$ vagy $z = z_0 e^{i2\pi/3} = e^{i7\pi/6}$ vagy $z = z_0 e^{i4\pi/3} = e^{i11\pi/6}$. **7p**

10p

5. Mely z komplex számokra igaz, hogy $z - \bar{z} = \sqrt{2}i$ és $z \cdot \bar{z} = 1$ (i a képzetes egység).

MO. Legyen $\operatorname{Re} z = x$ és $\operatorname{Im} z = y$. Ezekkel $z - \bar{z} = 2yi = \sqrt{2}i \rightsquigarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **3p**

és $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2 = x^2 + 1/2 = 1 \rightsquigarrow x^2 = 1/2 \rightsquigarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \rightsquigarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1 + i)$ **7p**

10p

Folytatás a következő oldalon.

6.

(a) Legyenek $E \neq \emptyset$, $A, B \subseteq E$ tetszőleges halmazok.

(a1) Igaz-e, hogy $(A \cup B) \setminus B = A$

(a2) Igaz-e, hogy $(A \setminus B) \cup B = A$.

(b) Legyenek a, b és c tetszőleges térvektorok.

(b1) Igaz-e, hogy ha $c \neq 0$ és $a \cdot c = b \cdot c$, akkor $a = b$.

(b2) Igaz-e, hogy ha $c \neq 0$ és $a \times c = b \times c$, akkor $a = b$.

(c) Legyen z tetszőleges komplex szám. Igaz-e, hogy

(c1) $z \cdot \overline{z}$ tiszta valós

(c1) $\frac{z}{\overline{z}}$ tiszta valós

MO.

(a1) Nem: pl. $A = B \neq \emptyset \rightsquigarrow A \cup B = A \rightsquigarrow (A \cup B) \setminus B = A \setminus A = \emptyset$ 1p

(a2) Nem: pl. $A \neq E$ és $B = \overline{A} \rightsquigarrow A \setminus B = A \rightsquigarrow (A \setminus B) \cup B = A \cup \overline{A} = E$. 1p

(b1) Nem: a és b lehetnek egymással különböző párhuzamos c-re merőleges vektorok.
Ekkor $a \cdot c = 0 = b \cdot c$. 2p

(b2) Nem: a és b lehetnek különböző egymással párhuzamos c-vel párhuzamos vektorok.
Ekkor $a \times c = 0 = b \times c$. 2p

(c1) Igen: $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ 2p

(c2) Nem: $(1+i)/(1-i) = i$ 2p

10p