

## 1. Generátorfüggvények. Írja fel a generátorfüggvény alaptulajdonságait.

**2. definíció.** Legyen  $X$  egy nemnegatív értékű valószínűségi változó,  $p_k = \mathbf{P}(X = k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$  eloszlással. Ekkor  $X$  generátorfüggvénye a következő hatványsor

$$G_X(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k.$$

$G_X(z)$  konvergens a  $[0, 1]$  intervallumon, ugyanis  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|p_n|}} \geq 1$ , továbbá

$$G_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

**1. tétel** (Alaptulajdonság). A generátorfüggvény meghatározza az eloszlást:

$$\frac{G^{(k)}(z)}{k!} = p_k \quad \text{minden } k = 0, 1, 2, \dots \text{ esetén.}$$

Azaz a generátorfüggvény deriválásával visszkapjuk az eloszlást.  $(f^{(n)})$  jelöli az  $f$  függvény  $n$ -dik deriváltját.)

**2. tétel.** Egy  $X$  valószínűségi változó  $G_X(z)$  generátorfüggvényére teljesülnek a következő állítások:

a)  $G_X(z) = \mathbf{E}(z^X)$ .

b)  $G'_X(1) = \mathbf{E}X$ , ha a  $\mathbf{E}X$  létezik.  $G''_X(1) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}X$ , ha  $\mathbf{E}(X^2)$  létezik. Ha  $\mathbf{E}X^n$  létezik, akkor  $G_X^{(n)}(1)$  felírható az első  $n$  momentum lineáris kombinációjaként, azaz valamilyen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  valós számokra:

$$G_X^{(n)}(1) = a_1 \mathbf{E}X + a_2 \mathbf{E}(X^2) + \dots + a_n \mathbf{E}(X^n).$$

c)  $D^2(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2$ .

## 2. Bizonyítsa be generátorfüggvény módszerrel, hogy független Poisson-eloszlású valószínűségi változók összege Poisson-eloszlású. Mutassa meg, hogy Poisson-folyamatok ritkítása is Poisson-eloszlású.

**3. példa.**  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ .  $X$  eloszlása:  $\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ , ha  $k = 0, 1, \dots$

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) z^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}.$$

**5. példa** (Poisson eloszlások összege). Ha  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ,  $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$ , és egymástól függetlenek, akkor  $X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda + \mu)$ . Ugyanis,

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z) = e^{\lambda(z-1)} e^{\mu(z-1)} = e^{(\lambda+\mu)(z-1)},$$

ami nem más mint egy  $\text{Poisson}(\lambda + \mu)$  eloszlású valószínűségi változó generátorfüggvénye.

Legyen  $Z_1, Z_2, \dots \sim F$ ,  $\mathbb{1}_1, \mathbb{1}_2, \dots \sim \text{Bernoulli}(p)$  és  $N \sim \text{Po}(\lambda)$  független véletlen változó, továbbá legyen

$$X = Z_1 + \dots + Z_N \sim \text{Po}(\lambda, F) \quad \text{és} \quad Y = Z_1 \mathbb{1}_1 + \dots + Z_N \mathbb{1}_N.$$

Az  $Y$  változót az  $X$  változó  $p$  valószínűség szerinti ritkításának, az  $(Y, X - Y)$  párt a  $p$  szerinti Bernoulli felbontásának nevezzük.

### 3. Írja fel a formulát, amely megadja egy véletlen tagszámú összeg generátorfüggvényét. Írja fel a véletlen tagszámú összeg várható értékét.

4. **tétel.** Legyen  $X_1, X_2, \dots$  nemnegatív egész értékű, független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata. Legyen  $N$  nemnegatív értékű valószínűségi változó, amely független az  $X_i$ -ktől. Ekkor az

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_N, \text{ ha } N > 0 \quad Y = 0, \text{ ha } N = 0 \quad (1)$$

véletlen tagszámú összeg generátorfüggvénye:

$$G_Y(z) = G_N(G_X(z)).$$

Ennek segítségével könnyen számolható  $Y$  várható értéke.

2. **következmény.** A fent definiált  $Y$ -ra igaz a következő:

$$\mathbf{E}Y = \mathbf{E}N\mathbf{E}X_1,$$

$$\mathbf{D}^2(Y) = \mathbf{D}^2(N)\mathbf{E}^2(X_1) + \mathbf{E}(X_1)\mathbf{D}^2(X_1).$$

### 4. Egy típusos, diszkrét idejű elágazó folyamat. Írja fel az $n$ -edik generáció populációnagyságának generátorfüggvényét és várható értékét. Mi a valószínűsége, hogy az $n$ -edik generációra kihalnak az egyedek? Mi a valószínűsége annak, hogy valaha kihal a folyamat?

Ehhez legyen  $P(z)$  az utódszám eloszlás generátorfüggvénye,

$$P(z) = p_0 + p_1z + p_2z^2 + \dots$$

Az  $n$ -dik generáció nagyságának,  $Z_n$ -nek a generátorfüggvénye,

$$G_n(z) = \mathbf{P}(Z_n = 0) + \mathbf{P}(Z_n = 1)z + \mathbf{P}(Z_n = 2)z^2 + \dots$$

$$G_{n+1}(z) = P(G_n(z)).$$

$$\mathbf{E}Z_{n+1} = G'_{n+1}(1) = P'(G_n(1)) \cdot G'_n(1) = P'(1) \cdot G'_n(1).$$

1. **állítás.** Legyen  $m$  és  $\sigma$  az utódeloszlás várható értéke, és szórásnégyzete ebben a sorrendben. Ekkor

$$\mathbf{E}Z_n = m^n.$$

$$\pi_n = G_n(0).$$

Így tudjuk meghatározni, hogy az  $n$ -dik generációra kihal a folyamat.

5. **tétel.** A véges időben való kihalás valószínűsége a

$$P(z) = z$$

fixpont egyenlet legkisebb megoldása.

**5. Mondja ki a centrális határeloszlás-tételt és a normális közelítés hibájára vonatkozó Berry-Esséen tételt.**

*Legyenek  $X_1, X_2, \dots$  független, azonos eloszlású valószínűségi változók úgy, hogy  $m = \mathbf{E}X_1$  és  $\sigma = D(X_1)$  létezik és véges. Ekkor ha  $n \rightarrow \infty$ , akkor*

$$\mathbf{P} \left( \frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < x \right) \rightarrow \Phi(x),$$

*ahol  $\Phi(x)$  a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.*

**CHT konvergencia gyorsasága, közelítés fix  $n$ -re**  
Berry-Esséen tétel

Ha  $\mathbf{E}X_i = 0$ ,  $D^2(X_i) = \sigma^2 < \infty$ , és  $\mathbf{E}|X_i|^3 = \varrho < \infty$ , akkor létezik egy  $C > 0$  (abszolút konstans) úgy, hogy

$$\left| \mathbf{P} \left( \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} < x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C\varrho}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

**6. Mondja ki a Hoeffding-tételt és a Chernoff-korlátot.**

**Tétel (Hoeffding-egyenlőtlenség)**

*Legyen  $a_k \leq X_k \leq b_k$  1 val. Ekkor*

$$\mathbf{P}(S_n - \mathbf{E}S_n \geq nc) \leq \exp \left\{ -\frac{2n^2c^2}{\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2} \right\}.$$

*Vagy más formában*

$$\mathbf{P}(S_n \geq \mathbf{E}S_n + t) \leq \exp \left\{ -\frac{2t^2}{\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2} \right\}.$$

**5. Tétel. (CHERNOFF-EGYENLŐTLENSÉG)** *Legyenek az  $X_1, \dots, X_n$  teljesen független  $p$  paraméterű Bernoulli-változók. Legyen  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , és legyen  $1 \geq \epsilon \geq 0$ . Ekkor*

$$\mathbf{P}(S_n - np \geq \epsilon np) \leq e^{-\frac{(\epsilon^2 np)}{3}},$$

*és*

$$\mathbf{P}(S_n - np \leq -\epsilon np) \leq e^{-\frac{(\epsilon^2 np)}{3}}.$$

7. Mondja ki a Cramér-tételt. Mutasson rá, hogy fix  $n$  esetén hogyan használható a tétel kapacitás-méretezésre.

### Tétel (Cramér-tétel)

Legyenek  $X_i$ -k i.i.d. valószínűségi változók  $F(x)$  eloszlásfüggvénnyel és  $(a, b)$  egy valószínű intervallum. Ekkor létezik egy  $I(x)$  „ráta függvény” úgy, hogy

$$-\frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \left( \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \in (a, b) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \inf_{a < x < b} I(x).$$

Fontos megjegyzés: Ez felső becslés minden  $n$ -re!!!

$$\mathbf{P} \left( \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \in (a, b) \right) \leq e^{-n \cdot \inf_{a < x < b} I(x)}$$

8. Adjon meg egy véges állapotterű Markov-láncot a gráfjával, amelyben két osztály van, egy visszatérő és egy átmeneti. Adjon meg egy véges és egy végtelen állapotterű irreducibilis Markov-láncot (a gráfjával), amely nem aperiodikus.

6. definíció. Egy  $i$  állapot *visszatérő*, ha  $i$ -ből indulva 1 valószínűséggel visszatér, azaz

$$\mathbf{P}(\exists n X_n = i \mid X_0 = i) = 1.$$

Egy állapot *átmeneti*, ha nem visszatérő.

3. állítás. A periódus és a visszatérőség osztálytulajdonság. Azaz, az egy osztályban lévő állapotoknak ugyanaz a periódusa. Továbbá, az egy osztályban lévő állapotok vagy mind visszatérők, vagy mind átmenetiek.

7. definíció. Ha a Markov-lánc egy osztályból áll, akkor azt mondjuk, hogy irreducibilis (felbonthatatlan).

5. definíció. Az  $i$  állapot *periódusa*  $d(i)$  a  $\{n : P(X_n = i \mid X_0 = i) > 0\}$  halmaz legnagyobb közös osztója. Ha a periódus 1, azaz  $d(i) = 1$ , akkor azt mondjuk, hogy az  $i$  állapot *aperiodikus*.

## 9. Mondja ki az irreducibilis és aperiodikus Markov-láncokra vonatkozó alaptételt. Milyen gyors a konvergencia a stacionárius eloszláshoz véges állapotter esetén? Írja fel a pontos állítást.

1. **tétel.** Ha egy Markov-lánc irreducibilis és aperiodikus, akkor az

$$\underline{y}P = \underline{y}$$

sajátérték egyenletnek létezik egyetlen megoldása.

Két egymást kizáró eset lehetséges:

- (1) Ha az  $\underline{y}$  sorvektor elemeinek az összege véges, azaz  $\sum_{i \in \mathcal{S}} y_i < \infty$ , akkor létezik egyetlen stacionárius eloszlás  $\underline{\pi}$ , ahol

$$\pi_j = \frac{y_j}{\sum_{i \in \mathcal{S}} y_i}$$

pozitív szám.

- (2) Ha az  $\underline{y}$  sorvektor elemeinek az összege véges, azaz  $\sum_{i \in \mathcal{S}} y_i = \infty$ , akkor nem létezik stacionárius eloszlás.

1. **megjegyzés.** Fontos megjegyzés, hogy ha az állapotter véges, akkor az  $\sum_{i \in \mathcal{S}} y_i$  összeg automatikusan véges, így minden irreducibilis és aperiodikus Markov-láncnak létezik stacionárius eloszlása.

3. **tétel.** Ha egy véges állapotterű Markov-lánc irreducibilis és aperiodikus (ekkor létezik stacionárius eloszlása), akkor

$$|\mathbf{P}_a(X_n = j) - \pi_j| \leq C\delta^n,$$

ahol  $C > 0$  és  $0 < \delta < 1$ . Vagy mátrixosan megfogalmazva, minden  $j \in \mathcal{S}$  állapotra

$$|[\underline{a}P^n]_j - \pi_j| \leq C\delta^n.$$

## 10. Mondja ki az irreducibilis és aperiodikus Markov-láncokra vonatkozó ergod tételt. Hogyan lehet ennek segítségével meghatározni, hogy az idő hány százaléka tartózkodik a lánc az egyes állapotokban?

4. **tétel.** Legyen  $X_0, X_1, \dots$  egy irreducibilis, aperiodikus Markov-lánc, amelynek létezik stacionárius eloszlása,  $\underline{\pi}$ . Továbbá legyen adott egy  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  költségfüggvény úgy, hogy a stacionárius eloszlás szerinti átlaga véges,

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} f(i)\pi_i < \infty.$$

Ekkor a hosszútávú átlagos költség egyszerűen számolható,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(X_0) + f(X_1) + \dots + f(X_n)}{n+1} = \sum_{i \in \mathcal{S}} f(i)\pi_i.$$

## 11. Definiálja a folytonos idejű, diszkrét állapotterű, homogén Markov-folyamatot két ekvivalens módon.

1. **definíció.** Legyen  $\mathcal{S}$  egy diszkrét halmaz. Adott egy  $Q$  átmenetvalószínűség mátrix úgy, hogy minden  $i \in \mathcal{S}$  esetén  $Q_{ii} = 0$ . Adott továbbá egy  $\lambda(i) \geq 0$   $i \in \mathcal{S}$  sorozat.

Legyen  $X_0, X_1, \dots$  egy  $Q$  átmenetvalószínűség mátrixszal rendelkező Markov-lánc.

Legyen  $T_1 < T_2 < \dots$  egymás utáni ugrási idők sorozata,  $T_0 = 0$ , úgy, hogy az  $(n+1)$ -dik és az  $n$ -dik ugrás között eltelt idő eloszlása  $\text{Exp}(\lambda(X_n))$ , azaz

$$T_{n+1} - T_n \sim \text{Exp}(\lambda(X_n)).$$

Ekkor az  $X(t), t \geq 0$  folytonos idejű Markov-lánc definíciója:

$$X(t) = X_n \quad \text{ha } T_n \leq t < T_{n+1},$$

azaz két ugrás között konstans, és az értékét a beágyazott Markov-lánc  $X_n$  határozza meg.



**2. definíció.** Legyen adott egy  $\Lambda = [\lambda_{ij}]_{|\mathcal{S}| \times |\mathcal{S}|}$  mátrix úgy, hogy az elemei nem negatívak és a főátlóban csupa 0 áll. Defináljuk a folytonos idejű  $X(t), t \geq 0$  Markov-láncot úgy, hogy legyen  $X(0) = i_0$  valamilyen  $i_0 \in \mathcal{S}$  kezdőállapotra. Továbbá, ha  $X(t) = i$  tetszőleges  $i \in \mathcal{S}$  és  $t$  időre, akkor minden olyan  $j$  állapotban, ahol  $\lambda_{ij} \neq 0$  elindítunk egy órát, amelyek egymástól függetlenül csengenek véletlen hosszú idő múlva. Ennek az időnek a hossza exponenciális eloszlású minden állapotra, és a  $j$  állapotban lévő óránál az exponenciális eloszlás paramétere  $\lambda_{ij}$ .

A Markov-folyamat akkor ugrik, amikor az első óra megszólal, és abba az állapotba ugrik, ahol először csengett az óra.

**3. definíció.** Az  $\mathcal{S}$  állapottéren értelmezett  $X(t), t \geq 0$  sztochasztikus folyamatot folytonos idejű Markov-láncnak nevezzük, ha minden  $n$ -re és  $s, t > 0$  számra, és  $t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t$  időkre, továbbá  $i, j, i_0, i_1, \dots, i_{n-1} \in \mathcal{S}$  állapotokra igaz a

$$\mathbf{P}(X(t+s) = j \mid X(t) = i, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, X(t_1) = i_1, X(t_0) = i_0) = \mathbf{P}(X(t+s) = j \mid X(t) = i). \quad (1)$$

egyenlőség.

Ha feltesszük, hogy a fenti feltételes valószínűség nem függ  $tt$ -ől, akkor azt mondjuk, hogy a Markov-lánc homogén, azaz

$$\mathbf{P}(X(t+s) = j \mid X(t) = i) = \mathbf{P}(X(s) = j \mid X(0) = i).$$

A (1) egyenlőség azt jelenti, mint diszkrét idő esetén, hogy feltéve a folyamat jelenét  $X(t) = i$ -t a folyamat jövője ( $X(t+s) = j$ ) független a folyamat múltjától ( $X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, X(t_1) = i_1, X(t_0) = i_0$ ).

## 12. Definálja Markov-folyamat generátor mátrixát. Mutassa meg a kapcsolatot a beágyazott diszkrét Markov-lánccal. Írja fel a kapcsolatot az A intenzitás mátrix és a generátor mátrix között.

**1. tétel.** Minden Markov-folyamathoz létezik egy  $A, |\mathcal{S}| \times |\mathcal{S}|$  mátrix úgy, hogy a  $P(t)$  mátrix  $t$ -szerinti deriváltjára fennáll a következő két egyenlőség

$$P'(t) = AP(t) \quad \text{és} \quad P'(t) = P(t)A.$$

Az  $A$  mátrixot a Markov-folyamat generátorának nevezzük.

Az  $A$  megadható a beágyazott Markov-lánc  $Q$  átmenetvalószínűség mátrixával, és a  $\lambda(i), i \in \mathcal{S}$  sorozat segítségével a következőképpen:

$$A_{ij} = \lambda(i)Q_{ij} \quad \text{ha } i \neq j \quad A_{ii} = -\lambda(i), \quad i \in \mathcal{S}.$$

A  $P'(t)$  derivált mátrix úgy értendő, hogy az  $ij$ -edik eleme  $P_{ij}(t)'$ .

A Markov-folyamat első két definíciójának ekvivalenciája miatt az  $A$  mátrixot felírhatjuk úgy is, hogy főátlón kívül megegyezik a rátákkal, a főátlóban pedig az egy sorban lévő ráták összegének a  $(-1)$ -szerese áll:

$$A_{ij} = \lambda_{ij} \quad i \neq j, \quad A_{ii} = -\sum_{j \in \mathcal{S}} \lambda_{ij}.$$

**! a leírásban A a generátor és Q az intenzitás-mátrix !**

### 13. Milyen feltételek mellett létezik stacionárius eloszlása egy folytonos idejű Markov-láncnak? Hogyan adható meg?

**2. tétel.** Legyen adott egy  $X_t, t \geq 0$  folytonos idejű Markov-lánc. Tegyük fel, hogy az  $X_n = X(T_n), n = 0, 1, \dots$  beágyazott Markov-lánc irreducibilis és visszatérő – ekkor azt mondjuk, hogy  $X_t, t \geq 0$  irreducibilis és visszatérő.

(A) Ekkor az

$$\underline{y}P(t) = \underline{y}, \text{ minden } t \geq 0$$

sajátvektor egyenletrendszernek létezik pontosan egy megoldása, amely meghatározható az

$$\underline{y}A = \underline{0}$$

egyenlet megoldásával.

(B) Ha  $\sum_{i \in \mathcal{S}} y_i < \infty$ , akkor létezik egyetlen  $\underline{\pi}$  stacionárius eloszlás úgy, hogy minden eleme pozitív. Továbbá  $\underline{\pi}$  felírható

$$\pi_j = \frac{y_j}{\sum_{i \in \mathcal{S}} y_i}, j \in \mathcal{S}$$

alakban.

Ha  $\sum_{i \in \mathcal{S}} y_i = \infty$ , akkor *nem létezik* stacionárius eloszlás.

### 14. Mondja ki az irreducibilis és visszatérő folytonos idejű Markov-láncokra vonatkozó ergod-tételt. Hogyan lehet ennek segítségével meghatározni, hogy az idő hány százalékában tartózkodik a lánc az egyes állapotokban?

**3. tétel.** Legyen  $X(t), t \geq 0$  egy irreducibilis, visszatérő folytonos idejű Markov-lánc, amelynek létezik stacionárius eloszlása,  $\underline{\pi}$ . Továbbá legyen adott egy  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  költségráta függvény úgy, hogy a stacionárius eloszlás szerinti átlaga véges,

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} f(i)\pi_i < \infty.$$

Ekkor a hosszútávú átlagos költség egyszerűen számolható,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t f(X(s)) ds}{t} = \sum_{i \in \mathcal{S}} f(i)\pi_i.$$

### 15. Definiálja a torzítatlan becslés fogalmát. Definiálja a konzisztens becslés fogalmát. Mutasson egy egyszerű becslést, amely torzítatlan és konzisztens.

*Definíció.*  $T(\mathbf{X})$  torzítatlan becslés  $\psi(\theta)$ -ra, ha

$$\mathbb{E}_\theta(T(\mathbf{X})) = \psi(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta.$$

*Definíció.* A  $T(\mathbf{X}_n)$  statisztikasorozat (gyengén/erősen) konzisztens becslés  $\psi(\theta)$ -ra, ha minden  $\theta \in \Theta$ -ra  $n \rightarrow \infty$  esetén  $T(\mathbf{X}_n) \rightarrow \psi(\theta)$  valószínűségben/1 valószéggel.

**16. Definiálja a maximum likelihood (ML) becslést. Mutasson egy egyszerű példát ML becslésre.**

*Definíció.* Legyen  $L_\theta(\mathbf{x}) : \mathcal{X} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}_+$  egy  $n$ -elemű mintához tartozó likelihood-függvény, tfl.  $L$  a szorzattéren mérhető. A  $\hat{\theta} : \mathcal{X} \rightarrow \Theta$  statisztikát a  $\theta$  paraméter *maximum likelihood (ML-)becslésének* nevezzük, ha  $\hat{\theta}$  globális maximumhelye a likelihood-függvénynek, azaz

$$L_{\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)}(x_1, \dots, x_n) \geq L_\theta(x_1, \dots, x_n)$$

teljesül  $\forall \theta \in \Theta$  és  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}$  esetén.

**17. Definiálja az erős és gyenge értelemben vett stacionárius folyamat fogalmát. Mutasson példát mindkét típusra. Definiálja az általánosított fehérzaj fogalmát.**

**4. Definíció (stacionárius sztochasztikus folyamat).** Az  $x$  sztochasztikus folyamat stacionárius, ha valamennyi  $x(t_1), \dots, x(t_n)$  véges dimenziós eloszlásfüggvénye bármely  $\tau$  esetén megegyezik  $x(t_1 + \tau), \dots, x(t_n + \tau)$ -val.

A folyamat gyengén stacionárius ha az eloszlásfüggvények első két momentuma bármely  $\tau$ -ra megegyezik, azaz

$$m(t) = 0 \quad , \quad r_{xx}(s, t) = r_{xx}(t - s)$$

Az  $e = \{e(\theta)\}_{\theta=-\infty}^{\infty}$  sztochasztikus folyamat fehér zaj folyamat, ha azonos eloszlású, független valószínűségi változók sorozata.

**18. Definiálja a trigonometrikus folyamat fogalmát, mutasson egy példát.**

**Definíció (Trigonometrikus folyamat)**

$A_0, A_1, \dots, A_m$  és  $B_1, \dots, B_m$  korrelálatlanok, várható értékük 0,  $A_k$  és  $B_k$  szórásnégyzete ugyanaz,  $\sigma_k^2$ .

$\omega_1, \dots, \omega_m$  adott frekvenciák. Ekkor legyen

$$X_n = A_0 + \sum_{k=1}^m (A_k \cos(n\omega_k) + B_k \sin(n\omega_k)).$$



**19. Definiálja a mozgó-átlag folyamat, és az autoregressziós folyamat fogalmát. Mikor lesz egy autoregressziós folyamat stacionárius folyamat?**

**Definíció ( $q$ -ad rendű mozgóátlag-folyamat)**

Legyen  $\dots, \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$  általános fehérzaj, közös  $\mu$  várható értékkel, és  $\sigma^2$  szórásnégyzettel.

Legyenek  $b_0, b_1, \dots, b_q$  valós számok. Legyen

$$X_n = b_0 \xi_n + b_1 \xi_{n-1} + \dots + b_q \xi_{n-q}.$$

Ekkor  $X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$   $q$ -ad rendű mozgóátlag-folyamat.

**Definíció (Elsőrendű autoregressziós folyamat)**

Legyen  $(X_n, n \in \mathbb{Z})$  stacionárius folyamat. Tfh valamilyen  $|a| < 1$  valós számra  $a$

$$\xi_n = X_n - aX_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

fehérzaj folyamatot definiál, közös  $0$  várható értékkel és  $\sigma^2$  szórásnégyzettel.

**Definíció ( $p$ -ed rendű autoregressziós folyamat)**

Ha  $X_n$  a következő alakban írható

$$X_n = a_1 X_{n-1} + a_2 X_{n-2} + \dots + a_p X_{n-p} + \xi_n,$$

ahol  $a_i$ -k valós számok,  $\xi$  pedig fehérzaj. Ekkor  $X$   $p$ -ed rendű autoregressziós folyamat.

Legyen  $\xi$  fehérzaj.

$$X_n = \underbrace{a_1 X_{n-1} + \dots + a_p X_{n-p}}_{AR(p)} + \underbrace{b_0 \xi_n + \dots + b_q \xi_{n-q}}_{MA(q)}$$

#### Tétel (ARMA(p, q) MA folyamatként)

Ha az  $x^p - a_1 x^{p-1} - \dots - a_p = 0$  karakterisztikus egyenlet gyökeinek abszolút értéke kisebb, mint 1 ( $|x_1|, \dots, |x_p| < 1$ ), akkor az  $X$  ARMA folyamat felírható mozgóátlag-folyamatként  $X_n = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j \xi_{n-j} = \delta_0 \xi_n + \delta_1 \xi_{n-1} + \delta_2 \xi_{n-2} \dots$ , megfelelő  $\delta_j$  valós számokkal.

20. Mondja ki azt a tételt, amely a spektrálmérték létezéséről szól. Ha a spektrálmérték tisztán ugrásos, akkor milyen folyamatnak a spektrálmértéke?

#### Tétel (Spektrál mérték létezése (Herglotz))

Legyen  $C(k), k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  adott függvény. A következő két állítás ekvivalens:

- A)  $C(k)$  egy valós értékű, **0 várható értékű, 1 szórású stacionárius folyamat kovarianciafüggvénye**
- B) Létezik olyan szimmetrikus  $F$  valószínűség eloszlás a  $[-\pi, \pi]$  intervallumon, amelyre

$$C(k) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\omega) dF(\omega).$$

Mivel  $F$  szimmetrikus, ezért ha  $\omega$ -ban van ugrás, akkor  $-\omega$ -ban is. Tehát, ha  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ -ben és 0-ban van ugrás (így  $-\omega_m, -\omega_{m-1}, \dots, -\omega_1$ -ben is van ugrás), és az ugrás nagyságok rendre  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , illetve  $p_0$  akkor a keresett Gauss-folyamat a már ismert:

$$C_X(v) = \sum_{k=1}^m \cos(s\omega_k) 2p_k, \text{ ahol} \\ p_m + \dots + p_1 + p_0 + p_1 + \dots + p_m = 1$$

21. Definiálja a lineáris szűrő fogalmát. Mutassa meg, hogy hat a kiindulási folyamat spektrumára a szűrő.

Diszkrét idejű stacionárius folyamat szűrése

Legyen  $X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$  egy gyengén stacionárius folyamat.

Legyen továbbá  $a_k, k \in \mathbb{Z}$  valós számok sorozata. Tfh,

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2 < \infty$ . Ekkor az

$$Y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k X_{n-k}$$

folyamat az  $X$  folyamat ( $a$ -val szűrt) lineáris szűrője, jelben

$Y = a * X$ .

## Miért szűrő?

Tekintsük az  $X$  stacionárius folyamat következő szűrését:

$$Y_n = \frac{1}{2}X_{n+12} + X_n + \frac{1}{2}X_{n-12}.$$

Azaz  $a_{12} = \frac{1}{2}$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_{-12} = \frac{1}{2}$ , különben  $a_i = 0$ .

Számítsuk ki  $Y$  spektrálsűrűségét.

Az  $a$  Fourier-transzformáltja:

$A(\omega) = e^{i12\omega} \frac{1}{2} + 1 + e^{-i12\omega} \frac{1}{2} = 1 + \cos(12\omega)$ . Tehát  $A(\frac{\pi}{12}) = 0$ ,

azaz  $X$ -nek a spektrumából  $a$  kiszűri a  $\frac{\pi}{12}$  frekvenciát, azaz

$Y$ -nak a kovarianciájában a  $\frac{\pi}{12}$  frekvencia semmivel nem járul hozzá a kovarianciához.

**22. Példák szűrésre. Hogy lehet kiszűrni periódusokat? Mutasson példát magas/alacsony frekvenciákat kiemelő szűrőre.**

$X$  egy stacionárius folyamat  $f_X$  spektrálsűrűséggel.

$Y_n := X_n - X_{n+1}$ , akkor  $a_0 = 1$ ,  $a_{-1} = -1$ , különben  $a_i = 0$ .

$Y = a * X$  spektrálsűrűsége  $f_Y$ , amire  $f_Y(\omega) = f_X(\omega)|1 - e^{i\omega}|^2$ .

Ha ugyanígy szűrünk  $r$ -szer, azaz vesszük

$Y^{(r)} = \underbrace{a * \dots * a}_{r \text{ db}} * X$ , akkor  $Y^{(r)}$  spektrálsűrűsége:  $f_r(\omega) =$

$$f_X(\omega)|1 - e^{i\omega}|^{2r} = f_X(\omega)|e^{i\frac{1}{2}\omega} - e^{-i\frac{1}{2}\omega}|^{2r} = f_X(\omega)2^{2r}(\sin(\frac{1}{2}\omega))^{2r} = f_X(\omega)|e^{i\omega} - 2 + e^{-i\omega}|^r = f_X(\omega)2^r(1 - \cos(\omega))^r.$$

Kiemeli a magas frekvenciákat.

Tekintsük a  $Z_n := X_n + X_{n+1}$  szűrőt,  $a_0 = 1$ ,  $a_{-1} = 1$ , különben  $a_i = 0$ .  $r$ -szer alkalmazva a kapott szűrő  $Z^{(r)} = a * \dots * a * X$

spektrálsűrűsége:  $f_r(\omega) = f_X(\omega)|1 + e^{i\omega}|^{2r} =$

$$f_X(\omega)|e^{i\frac{1}{2}\omega} + e^{-i\frac{1}{2}\omega}|^{2r} = f_X(\omega)2^{2r}(\cos(\frac{1}{2}\omega))^{2r} =$$

$$f_X(\omega)|e^{i\omega} + 2 + e^{-i\omega}|^r = f_X(\omega)2^r(1 + \cos(\omega))^r.$$

Kiemeli az alacsony frekvenciákat.