

Mobil és vezeték nélküli hálózatok

Hírközlés elemei

dr. Bitó János

4 kis ZH van

10 hallgató felett

Szerda 8¹⁵ EEL20

inkrementális ZH rendszer!

össz 15 pont

Csütörtök 10¹⁵ E1C

2 legjobb ZH átlaga

4 pont 4,5 - 7 1

7,5 - 9 - 2

9,5 - 11 - 3

11,5 - 13 - 4

13,5 - 15 - 5

ZH: 3 rész $\rightarrow$ temat példátétel

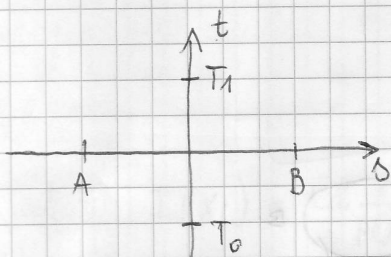
10 tentes feleletbeírás (informatum)

tétel beírás
példa nemelés

1. előadás

információ források üzeneteinek eljuttatása az információ nyelvéjéhez = HÍRKÖZLÉS

+ Zaj, zavar, interferencia (mesterséges vagy természetes)



időben
vagy
térben
eltérő pontok

forrás kódolás / tömörítés [időben eltérő pontok]

• mi az információ? felhív-e a nap levegő?

$P(\text{nap}) \rightarrow 0$

Moham nem kel fel a nap $\rightarrow$ nagy az információ tartalma

• hogyan mérjük az információt?

- kell egy kvantitatív mérték

$\sim$ Hartly (1928, Bell System Technical Journal) "Transmission of information" címmel

() az ember alapvető igénye a kommunikáció

eddig ↓

ANALÓG! ~ szinuszos jel le reprodukciója volt a feladot (telefon)

↓ helyzett!

esemény: $\xi = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ infot csak akkor viszunk át, ha az esemény több kiemenetelű
- lényeg a döntés a kiemenetek közt

$\# \xi = D$ (# ~ ahány esetet felvehet az esemény) $I(\xi)$

$\bar{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n\}$ n db val. változó együttese

$\# \bar{\xi} = D^n [D \cdot D \cdot D \dots D]$ $I(\bar{\xi}) = n \cdot I(\xi)$

információ tartalom van, ha: több kiemenetel van!

$\# \xi = D \quad I(\xi) = \log_a D$

$\# \bar{\xi} = D^n \quad I(\bar{\xi}) = n \cdot I(\xi)$

$\log_a D^n = n \cdot \log_a D$

ha $a=2 \rightarrow \log_2$

$\log_2$ [bit]

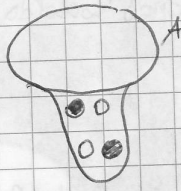
ha $a=10 \rightarrow \log_{10}$

$\log_{10}$ [Hartly]

DEE2 MEG VEM JO:

példa:

kelel
4 golyó
1-et húzunk



$D = 2$

$\log_2 D = 1$ [bit]
bináry digit



() azt várnam hogy fehér lesz ezért jobban megfigyelők! több info

B



• : $\log_2 \frac{4}{1} = 2$ [bit]

0 : $\log_2 \frac{4}{3} = 0,415$ [bit]

a baj az, hogy a Hartly értékek nem venni figyelembe a valószínűségi eloszlást!

[bit] az információ mennyiség értéke

BIT



$$\bullet = 2$$

$$0 = 0,415$$

$$\frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{3}{4} \cdot 0,415 = 0,811 [\text{bit}]$$

$\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$
 valósz. valósz.
 info info
 tartalom tartalom

↳ kevesebb info
mint egyenesen
előrelátni

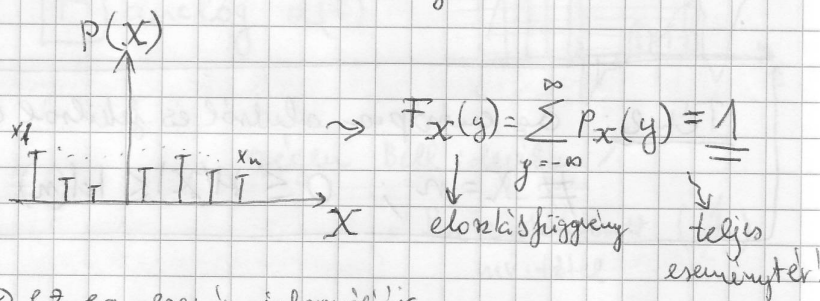
Claude Shannon (1948, BSTF) - "A Mathematical Theory of Communication"

legyen:

$$X = \{x_1, \dots, x_n\}; \quad p(X) = (p_1, \dots, p_n)$$

diszkrét
 értékek
 val. változó

véletl. fr.
 $p_i = p(x_i)$
 i-dik esemény



Def: $I(x_i) = \log \frac{1}{p(x_i)}$ $\leadsto$ ez egy esemény információját

minél valószínűbb
 az esemény annál kisebb
 az info. tartalom

$\rightarrow -\log(p(x_i))$ [bit]

(Self Information - az esemény saját információ tartalma)

Def: Entropia, Átlagos információ tartalom (entropy)

$$H(X) = E\{I(x_i)\} = \sum_{x_i \in X} p(x_i) \cdot \log \frac{1}{p(x_i)}$$

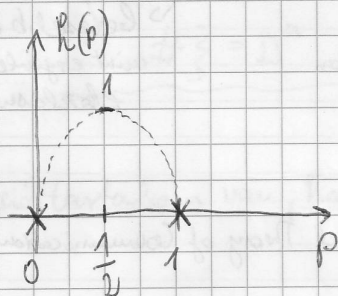
() $\Rightarrow$ átlag és a kiejtők

~~XXXXXX~~

legyen $X = \{x_1, x_2\}$, $p(x) = \{p(x_1), p(x_2)\} \Rightarrow \left(p(x_1); 1-p(x_1) \right)$
 ez az 1 paraméteres

$$H(X) = \sum_{x_i \in X} p(x_i) \cdot \log \frac{1}{p(x_i)} = p \log \frac{1}{p} + (1-p) \log \frac{1}{1-p}$$

$h(p)$ = bináris entropia fű } határérték probléma a méltatás!



legyen $x = \frac{1}{p}$

$$p \cdot \log \frac{1}{p} = \frac{1}{x} \cdot \log x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \log x = \frac{1}{\log(2)} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x} \stackrel{L'H}{=} \frac{1}{\log(2)} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = \frac{1}{\log(2)} \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow 0$

írd le a hirtelét !!! gördi Bitárat

Tétel: az entropia alulról és felülről is korlátos
 $\#X = n$; $0 \leq H(X) \leq \log(n)$

2. előadás

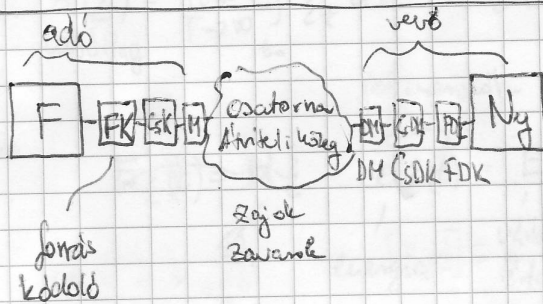
Proakis, Salehi: Communication Systems Engineering

Dallos: Tantárgyi segédlet a hirközléstechnika tárgyhöz

Pingys I.: Hírközlő rendszerek

Csibi S.: Információ hálózata és feldolgozása

IRODALOM



FK: a mi redundancia, ezt töltött [vesztékes és veszteség nélküli]

CK: a felépő zavarok nullapítása (hibajavító + redundancia hozzáadás)

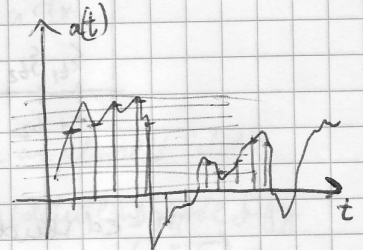
M: modulátor

DM: demodulátor

CSDK: csatorna dekódoló

FDK: forerész dekódoló

F analóg $a(t)$

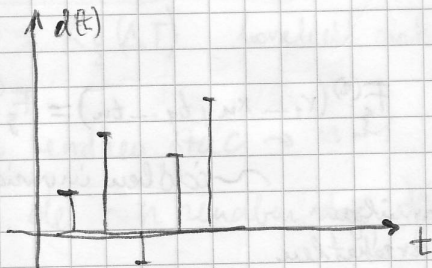


sígen Bell idejében

Ba sávkorlátozott $\left(\frac{1}{2T}\right)$
mv. tétel!

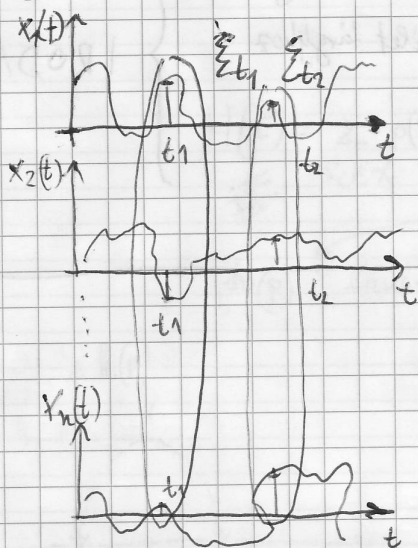
Ua digitális jel:

- időben mintavételezés (T)
- értékben kvantálom



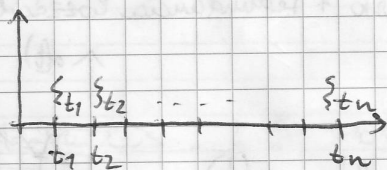
Sztochasztikus folyamatok

① a folyamat realizációjának az együttese



együtt ők a stochasztikus folyamat!

② Valószínűségi változók rendezett (időben) serege



n -ed rendű eloszlás fr. (n dimenziós)

eloszlás fr.

$$F_x^{(n)}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, t_1, t_2, \dots, t_n) \triangleq$$

$$F_\xi^{(n)}(x_1, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) \triangleq P(\xi_{t_1} < x_1, \xi_{t_2} < x_2, \dots, \xi_{t_n} < x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)$$

• Erősen stationárius folyamat: $F_\xi^{(n)}(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = F_\xi^{(n)}(x_1, \dots, x_n, t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau)$

$\forall \tau, \forall t_n, \forall \{t\}$

időben bármilyen
eltolásra érzéketlen

~ időben invariáns

Várható értéke

$$m_{\xi}(t) \Rightarrow E(\xi_t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x, t) dx$$

$$m_{\xi}(t) = m_{\xi} \quad \forall t \text{ esetén}$$

erősen station. foly. várható értéke időfügtlen

erősen stat. foly $\rightarrow$ ergodikus foly vagy ergodikus foly. keveréke

- ergodikus folyamat

bármelyik realizációból megválaszolható

$$A(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \xi_t dt = m_{\xi}$$

időátlag

jel energiája

• legyen

$$E_{\xi}(t) = \overbrace{E\{\xi^2(t)\}}^{\text{jel energiája}} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_{\xi}(x, t) dx$$

energia - várható érték

• Autokorreláció

$$R_{\xi}\{t_1, t_2\} = E\{\xi_{t_1} \cdot \xi_{t_2}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot f_{\xi}(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

sűrűségfü.

$$R_{\xi}\{t_1, t_1 + \Delta T\} = R_{\xi}\{t_2, t_2 + \Delta T\} \rightarrow \text{független az abszolút időtől}$$

↓
perspekt.: $\forall \Delta T$ és $\forall(t_1, t_2)$

vagy az időtől különbségtől függ (ΔT)

• Gyengén stationárius (Wide-Sense-Stationary)

$$① \Rightarrow m_{\xi}(t) = m_{\xi} \quad \forall t \quad \text{idő föléen}$$

$$② \Rightarrow R_{\xi}(\Delta T) \quad \text{korreláció csak a különbségtől függ}$$

(másoképpen stationárius $\rightarrow$ gyengén stationárius)

• ha n rendben stat $\rightarrow n-1$

de n rendben stat $\nrightarrow n+1$

• Memória mentes: X

- forrás

előző betűk mentes

$$P(\xi_n = X_n | \xi_1 = x_1, \dots, \xi_{n-1} = X_{n-1}) = P(\xi_n = X_n)$$

diszkrét
simány eloszlás

polynomiál(f)

példa:

$$\#X = 26$$

$$H_0(X) = \sum_{x_i \in X} p_{x_i} \lg \frac{1}{p_{x_i}} = \sum \frac{1}{26} = 4,7 [\text{bit}]$$

entropia

$$\log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

$$(Tétel: 0 \leq H(X) \leq \lg(n))$$

$$H(X) - \lg(n) \leq 0$$

$$\sum_{x_i \in X} p_{x_i} \cdot \lg \frac{1}{p_{x_i}} - \sum_{x_i \in X} p_{x_i} \cdot \lg n \leq 0$$

minden = 1

$$\sum p_{x_i} \cdot \lg \frac{1}{n \cdot p_{x_i}} \leq 0$$

$$\frac{1}{n \cdot p_{x_i}} = 1$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{1}{n}$$

$$\sum p_{x_i} \cdot \lg \left(\frac{1}{n \cdot p_{x_i}} \right) \leq 0$$

$$\frac{1}{\lg 2} \cdot \sum_{x_i \in X} p_{x_i} \cdot \lg \frac{1}{p_{x_i} \cdot n} \leq \frac{1}{\lg 2} \sum_{x_i \in X} p_{x_i} \left[\frac{1}{n \cdot p_{x_i}} - 1 \right] =$$

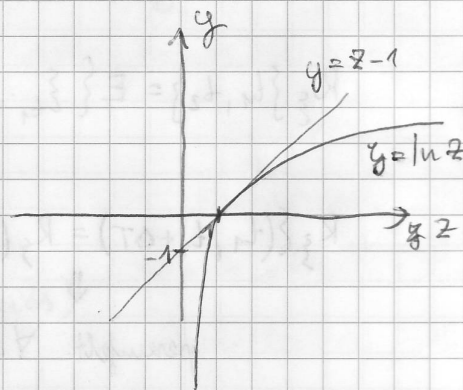
$$\frac{1}{\lg 2} \left[\underbrace{\sum_{x_i \in X} \frac{1}{n}}_1 - \underbrace{\sum_{x_i \in X} p_{x_i}}_1 \right] = 0$$

német nyelv

$$H(X) = 4,7 \text{ bit}$$

$$H_2(X) = 3 \text{ bit}$$

$$H_0(X) = 1,6 \text{ bit}$$



$$R(X) = H_0(X) - H(X)$$

redundancia

entropia a feltételező kérdéssel a Hagos
 valószínűségi birtoklás; amennyire
 gyorsan fordul elő.

3. előadás

~ eddig amiket tanultunk.

$$F_z^{(n)}(\xi_{t_1} < x_1, \dots, \xi_{t_n} < x_n, t_1, \dots, t_n) = F_z^{(n)}(\bar{x}, \bar{T}) \quad \forall \Delta T \quad \forall \{\bar{T}\}$$

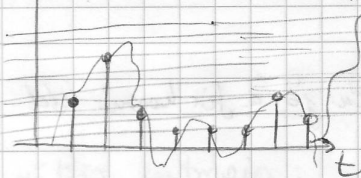
$$N\text{-ed rend. stationárius: } F_z^{(n)}(\bar{x}, t_1 + \Delta T, t_2 + \Delta T, \dots, t_n + \Delta T) = F_z^{(n)}$$

$$WSS \quad m_z(t) = m_z \quad \forall t\text{-re}, \quad R_z(\Delta T)$$

erősen stac, ha $\forall n\text{-re}$!

gyengén, ha nem $\forall n\text{-re}$ ~

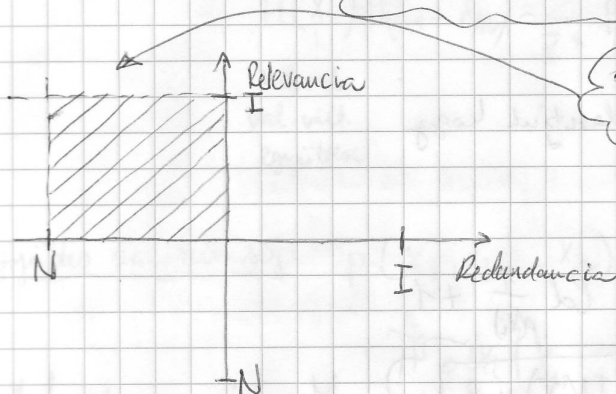
att) ↑ kvantálási + mintavétel



de! ha elmozdítjuk jel felépítését pl. akkor a kvantálási
 tételekbe mégis mindig

ha változik időben a várható érték ~
 nem stationárius

VALÓS VILÁG FÖVJAVATAI



releváns információ átírítel
 kevés redundanciával

$$R(X) = H_0(X) - H(X)$$

Redundancia

egyensúlyes
 elonlós

cél erreich
 a minimalizálása

növekvő sorrend:

$$\#X = 26$$

$$p(X)$$

$$H_0(X) = \lg 26 = 4,7 [\text{bit}]$$

$$H_1(X) = 4,1 [\text{bit}]$$

$$H_2(X) = 1,6 \text{ bit}$$

← növekvő redundancia

← teljes mértékben
(redundancia nélkül)

Forrás kódolás

- diszkrét, DMS, D+M
 $\swarrow$ discrete memoryless source
 $\searrow$ discrete memory source

- kódolási szabály (Q)

$$Q(x_i) = c_i ; \text{ dekhódolhatóság! , fix hosszú kódolás [5 bit]}$$

$$a \rightarrow 00000$$

$$b \rightarrow 00001$$

pelda: $X = \{a, b, c, d\}$ $C = \{00, 01, 10, 11\}$

$$p(X) = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right\}$$

egyszerű esetekben jó a fix hosszú kód

- Változó hosszú kódolás:

$$p(X) \quad l_i = \ell(x_i) \quad L_x = \sum p(x_i) \cdot \ell(x_i)$$

átlagos
kódhossz

- entropia kódolás $\rightarrow \ell(x_i)$ -t úgy választjuk meg

$$\ell(x_i) \approx \lg \frac{1}{p(x_i)}$$

$$\lg \frac{1}{p(x_i)} \leq \ell(x_i) \leq \lg \frac{1}{p(x_i)} + 1$$

$$H(X) \leq L_x < H(X) + 1$$

Shannon I.

Memória-mentes
forrásra

Shannon-Fano kód $\leadsto$ a forrás minden szimbóluma (2^{-x})

$(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots)$

példa: $p(a) = \frac{1}{2}$ $p(b) = \frac{1}{4}$ $p(c) = \frac{1}{8}$ $p(d) = \frac{1}{16}$ $p(e) = \frac{1}{16}$

$2^{(1)}$ $2^{(2)}$ $2^{(3)}$ $2^{(4)}$ $2^{(4)}$
 $l_i \Rightarrow$ 1 2 3 4 4 [bit]
 hosszú kód
 kell

D+M forrás:

$\leadsto$ A memória:

$$\{X\} \quad p(X_n = x_n | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = p(x_n | x_1, \dots, x_{n-1})$$

feltételes valószínűség

$\leadsto$ lehetne feltételes entropia is!

$$H(\bar{X}_n | x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{x_n \in X^n} p(x_1, \dots, x_n) \cdot \log \frac{1}{p(x_n | x_1, \dots, x_{n-1})}$$

FELTÉTELES ENTROPIA

egyesített entropia:

$$H(\bar{X}^n) = H(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\bar{x}^n} p(x_1, \dots, x_n) \cdot \log \frac{1}{p(x_1, \dots, x_n)}$$

ndarab
 val. vlt.
 együttese

egyesített valószínűség: $p(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(x_1) \cdot p(x_2 | x_1) \cdot p(x_3 | x_2, x_1) \cdot \dots =$

$$\prod_{i=1}^n p(x_i | x_1, \dots, x_{i-1})$$

$$H(\bar{X}^n) = - \sum_{\bar{x}^n} \prod_{i=1}^n p(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}) \cdot \log \prod_{i=1}^n p(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}) =$$

$$\Rightarrow - \sum_X \left(\prod_{i=1}^n p(x_i | x_1 \dots x_{i-1}) \right) \cdot \underbrace{\log p(x_1)}_{\substack{\text{együtt. val. seg.} \\ \text{szükség.} \\ x_1 \text{-re}}} = - \sum p(x_1 \dots x_n) \cdot \log p(x_2 | x_1) = \dots =$$

$$\underbrace{\sum_X p(x_1 \dots x_n) \log p(x_n | x_1 \dots x_{n-1})}_{\text{ered. feltételes entropia}}$$

$$H(\bar{X}^n) = H(X_1) + H(X_2 | X_1) + H(X_3 | X_1, X_2) + \dots + H(X_n | X_1, \dots, X_{n-1}) =$$

$$H(\bar{X}^n) = \sum_{i=1}^n H(X_i | X_1, \dots, X_{i-1})$$

1 mintából származó entropia

$$H_n(\bar{X}^n) = \frac{1}{n} H(\bar{X}^n)$$

- Sztochasztikus folyamat entropiája

ha van $\Rightarrow H_\infty(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\bar{X}^n)$ ← együtt. entropia

vagy $\Rightarrow H_\infty(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(X_n | X_1, \dots, X_{n-1})$ ha WSS legalább a folyamat

DMS esetben

$\hookrightarrow p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p(x_i)$
 füg. események

$H(\bar{X}^n) = \sum_{i=1}^n H(X_i) \rightarrow$ mert füg. az entropiák is!

ha WSS a forrás (időfüggő $\rightarrow$ index füg.)

$\Downarrow$

$H(\bar{X}^n) = n \cdot H(X)$

$H(X) = H(X_i) = H(X_{i-1})$

Forrás-kódolás:

atl. kódhossz

Shannon I.

$$H(X) \leq L_x \leq H(X) + 1$$

Shannon Fano

$$p(x_i) = 2^{-k} \quad k \in \mathbb{N}^+$$

$$L_x = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot 4$$

[abcd példák]

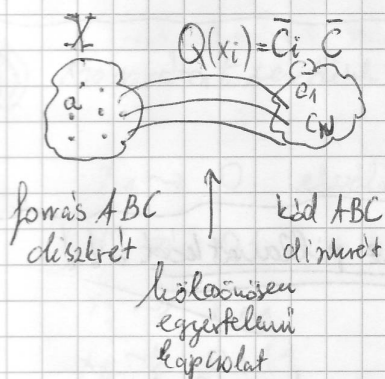
4. előadás

~ leddén ZH

E1B 18.15

terzt, példa, tétel

Forrás kódolása



DMS + memória

pillanat kódolnánk kell lenni $\rightarrow$ azonnal el kell tudjam dönteni a forrás ABC elemeit!

$l_i: \bar{c}_i = (c_{i1}, \dots, c_{in})$
 $\downarrow$
 egy kód hossza

kódszimbólumok
 érték $[0, 1]$ de lehet más is!

legyen $L_x = \sum_{x_i \in X} p(x_i) \cdot l_i$

[Shannon I] $H(X) \leq L_x < H(X) + 1$

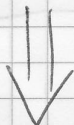
ha $p(x_i) < p(x_j) \Rightarrow l_i > l_j$

entropia kódolás elve ez [Shannon-Fano]

ha $\forall p(x_i) \in 2^{-k_i}$

$\Downarrow$ $l_i = k_i = \lceil \log_2 \frac{1}{p(x_i)} \rceil$

ez teljesíti-e a Shannon I-et?



$$H(X) = \sum_{x_i} p(x_i) \cdot \log_2 \frac{1}{p(x_i)} \rightarrow \text{egyenlőség van "átlal"}$$

ez alá nem tudok menni

$$L_x = \sum p(x_i) \log_2 \frac{1}{p(x_i)}$$

$$h_0 = \frac{H(X)}{L_x} \rightarrow \text{mindig kisebb, mint } (1)$$

hatékonyabb
a fenns kód nál

Shannon-Fano $\rightarrow$ minimális kód hosszú

Példa: fix hosszú

X	p(x _i)	(A)
x ₁	1/2	00
x ₂	1/4	01
x ₃	1/8	10
x ₄	1/8	11

$$H(X) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 3 \Rightarrow 1,75 \text{ [bit]}$$

ez pillanat kód!!!

(A) $L(X) = 2$ fix hosszú kód miatt!

eset $h_0 = \frac{1,75}{2} = 0,875$

minden 100% $\rightarrow$ nem használható
az a priori ismertetés
(a valószínűségeket)

$\rightarrow$ fix hosszú kódot mindig lehet dekodolni!

0100110110001

legyen x₁ $\rightarrow$ 0

x₂ $\rightarrow$ 1

x₃ $\rightarrow$ 00

x₄ $\rightarrow$ 11

(B)
eset

$$L_{x(B)} = 1 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow 1,25$$

leírja az embópiókat ????



nem dekodolható!

Ⓒ prefix kód $x_1 \rightarrow 0$ $x_3 \rightarrow 110$
 eset (változókódi kód) $x_2 \rightarrow 10$ $x_4 \rightarrow 111$

$\bar{C}_i = (c_{i1} \dots c_{in_i})$ akkor $\nexists$ olyan $\bar{C}_j$ ahol $\bar{C}_j > \bar{C}_i$, $C_j = (c_{j1} \dots c_{j\ell_j}, c_{j\ell_j+1} \dots c_{jn})$

azaz
 olyan mint
 a másik kód

$$L_x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 3 = \underline{1,75}$$

$$h_{qc} = \frac{1,75}{1,75} = 100\%$$

az prefix mentes kód $\rightarrow$ deklaráható
 (Shannon-Fano kód)

pillanat kód

Ⓓ szeparátor be: pl egy vessző!

[comma-code]

$x_1 \rightarrow 0$ elválasztó
 $x_2 \rightarrow 01$
 $x_3 \rightarrow 011$
 $x_4 \rightarrow 0111$

$$L_x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \Rightarrow 1,875$$

$$h_{qc} = \frac{1,75}{1,875} \rightarrow$$

Ⓔ {prefix és comma-code}

$x_1 \rightarrow 0$

$$L_x = 1,875$$

$x_2 \rightarrow 10^{\text{szeparátor}}$

$x_3 \rightarrow 110$

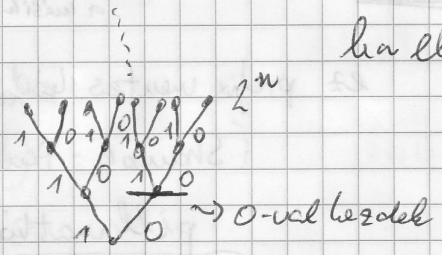
$x_4 \rightarrow 1110$

Prefix-kód generálása:

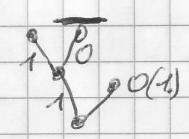
egy kód prefix $\iff$ ha teljesül a Kraft egyenlőtlenség.

Kraft egyenlőtlenség: $\sum_{i=1}^N 2^{-l_i} \leq 1$ } [bindis kódokra igaz]
i-edik kód hossza

bin. fa:



ha elhazdunk 0-val $\rightarrow$ ~~le~~ lépésenként az ágat



N -li binti részfa lehet vágható ki egy l_i -binti kód szerkesztésekor

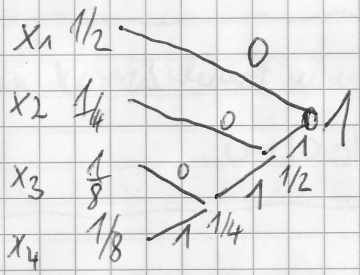
$$\sum_{i=1}^N 2^{N-l_i} \leq 2^N \xrightarrow{\text{teljes fa!}} \sum_{i=1}^N 2^{-l_i} \leq 1$$

(a teljes fából többet nem vághatunk ki)

Kraft.

Huffman:

- 1 $\rightarrow$ előfordulási valószínűség szerint sorba rendezés!
- 2 $\rightarrow$ bindis fa, 2 legkisebb valószínűségű eseményt rakod össze!



bin. fa $\rightarrow$ rekurzívam! amíg nem érkezik 1-hez!

- $x_1 \leadsto 0$ ✓ levegőm
- $x_2 \leadsto 10$ ✓ prefix + Shannon Fano!
- $x_3 \leadsto 110$ ✓
- $x_4 \leadsto 111$ ✓

DE!!! $\rightarrow$ akkor is működik ha a való. ségek nem 2^{-k_i} szerint oszlanak el!

pl:	x_1	$p(x_i)$ 0,4		$\bar{c}$ $x_1 \rightarrow 1$
	x_2	0,25		$x_2 \rightarrow 00$
	x_3	0,2		$x_3 \rightarrow 011$
	x_4	0,15		$x_4 \rightarrow 010$

0,5 0,6 0,45

$$L_x = 0,4 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 3 + 0,15 \cdot 3 = 1,95$$

$$H(X) = 0,4 \cdot \lg \frac{1}{0,4} + 0,25 \cdot \lg \frac{1}{0,25} + 0,2 \cdot \lg \frac{1}{0,2} + 0,15 \cdot \lg \frac{1}{0,15} =$$

HUFFMANN

HUFFMANN-hoz kell a valószínűség!

nem jó leveles kódnál, és nagy valószínűség differenciál!

harmadjuk a forrás kiterjesztés módszerét!

- $x_1 x_1$
- $x_1 x_2$
- $x_1 x_3$
- $x_1 x_4$
- $x_2 x_1$

4² eseten van!
kell ismerni az eseménypárok val. szejét

ha DHS $\rightarrow$ akkor
memória mentes

$$p(x_1, x_2) = p(x_1) \cdot p(x_2)$$

$$p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p(x_i)$$

$$H(\bar{X}^n) = H(x_1, \dots, x_n) = n \cdot H(X)$$

DHS
 $\downarrow$
n-ed rendben
stacionárius
jelölés(n)
nem változik
 $H(X) = H(x_i) \forall i$

kiterjesztett forrás hoz
 $\uparrow$ kiterjesztett $n \cdot H(X)$

$$n \cdot H(X) = H(x_1, \dots, x_n) \leq L_{x_1, \dots, x_n} < H(\bar{X}^n) + 1$$

n darab ra
n-darab val. változó
által generált események
tartozói kód

$$H(X) \leq L_x \leq H(X) + \frac{1}{n} \rightarrow \text{ha a kiterjesztést növelem}$$

akkor 100% fele tartok!
és jó DHS esetben!

$$p(x_1 \dots x_n) = p(x_1) \cdot p(x_2 | x_1) \cdot p(x_3 | x_2 \cdot x_1) \dots p(x_n | x_1 \dots x_{n-1})$$

$$= \prod_{i=1}^n p(x_i | x_1 \dots x_{i-1})$$

$\log(\text{szorzat}) = \text{összeg}(\log)$

$$H(x_1 \dots x_n) = -\sum \prod_{i=1}^n p(x_i | x_1 \dots x_{i-1}) \cdot \log \prod_{i=1}^n p(x_i | x_1 \dots x_{i-1}) =$$

n val vált.

egyszeres entropiája

$$= \sum_{i=1}^n H(x_i | x_1 \dots x_{i-1})$$

$$H(X)_n = \frac{1}{n} \cdot H(x_1 \dots x_n)$$

ha $n \rightarrow \infty$

1 változóra em! ? ha létezik

$$H_\infty(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(x_1 \dots x_n)$$

stochasztikus
folyamat

végfelé szűkített
val. vált. sorozat!

1 bináris
entropia

~~$H(X)_n$~~ ~~$H(X)_\infty$~~

$$H_\infty(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(X_n | x_1 \dots x_{n-1})$$

1 bináris
entropia
egy stochasztikus
folyamatnál!

① Gallager bizonyítás:

• $H(X_n | x_1 \dots x_{n-1})$ monoton növekvő!

$$H(X_n | x_1 \dots x_{n-1}) \leq H(X_n | x_2 \dots x_{n-1}) = H(X_{n-1} | x_1 \dots x_{n-2})$$

kevesebb előismeret
nagyobb bizonytalanság!
nagyobb entropia

ha a folyamat
legalább n -ed rendben
stacionárius legyen
(eltolással eltolható)

(B)

$$H_n(X) \geq H(X_n | X_1 \dots X_{n-1})$$

$$H_n(X) = \frac{1}{n} \cdot [H_{\text{def}}(X_1 \dots X_n)] = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n H(X_i | X_1 \dots X_{i-1}) \geq \frac{1}{n} \cdot H(X_n | X_1 \dots X_{n-1})$$

venem. n-val. (A) miatt

(C)

$H_n(X)$ mon. csökkenő

$$H_n(X) = \frac{1}{n} [H(X_1 \dots X_{n-1}) + H(X_n | X_1 \dots X_{n-1})] = \frac{1}{n} [(n-1) \cdot H_{n-1}(X) + H(X_n | X_1 \dots X_{n-1})]$$

előző

$$H(X_n | X_1 \dots X_{n-1}) \leq \frac{n-1}{n} \cdot H_{n-1}(X) + \frac{1}{n} \cdot H_n(X) \Rightarrow H_n(X) \leq \frac{n-1}{n} \cdot H_{n-1}(X) + \frac{1}{n} \cdot H_n(X)$$

(+ inf)

$$\Rightarrow \frac{n-1}{n} \cdot H_n(X) \leq \frac{n-1}{n} \cdot H_{n-1}(X) \quad \text{mon. csökkenő}$$

$$H_{n+j}(X) = \frac{1}{n+j} [H(X_1 \dots X_{n-1}) + \sum_{i=n}^{n+j} H(X_i | X_1 \dots X_{i-1})] \leq \frac{1}{n+j} \cdot H(X_1 \dots X_{n-1}) + \frac{j+1}{n+j} H(X_n | X_1 \dots X_{n-1})$$

A. $n \rightarrow \infty \Rightarrow 1$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} H_{n+j}(X) \leq H(X_n | X_1 \dots X_{n-1})$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ j \rightarrow \infty}} H_{n+j}(X) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} H(X_n | X_1 \dots X_{n-1})$$

+ stochasztikus folyamat!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(X) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} H(X_n | X_1 \dots X_{n-1})$$

B

ez akkor van ha erősen stac. a folyamat

erős egyezése csak akkor igazak ha egyenlő

felül becsles

ha van fontos kiemelés:

$$H(x_1, \dots, x_n) \leq L_{x_1, \dots, x_n} \leq H(x_1, \dots, x_n) + 1$$

$$H_n(X) \leq L^1 x \leq H_n(X) + \frac{1}{n}$$

ha $n \rightarrow \infty \rightarrow L^1 x = H_n x$ (ha teljesen ismerem a folyamatot!)

azatl. hódossz elvehet az entropiáig.

$$L_x = H_\infty(X)$$

optimum

apriori ismerem kell

a forrást!

L-Z hódolás (deupel-Ziv)

- apriori ismeretek nélkül is működik és közelíti az optimumot
- UNIX-ban ez működik

elvé: hönnyet át akarok vinni, ehhez felelt egy hönnyötörat
is csak a cívet kell megadni.

a hönnyötör:	tár hely	tartalom	hód	$L_x = 5$ fix hosszú hódok
1	0001	0	00000	0
2	0010	1	00001	1
3	0011	11	00101	1
4	0100	00	00010	0
	0101	10	00100	0
	0110	100	01010	0

és így tovább

0,1,11,00,10
[011100101001111001] bit sorozat

→ nem kell hozzá ismeret a priori az eloszlásról.

Aritmetikai kódolás:

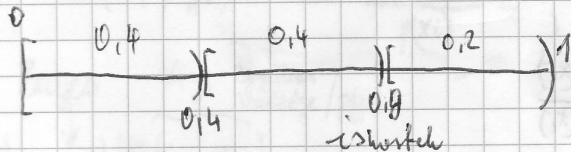
• kell a $P(x)$

• font az optimális bináris kódhoz

hosszu

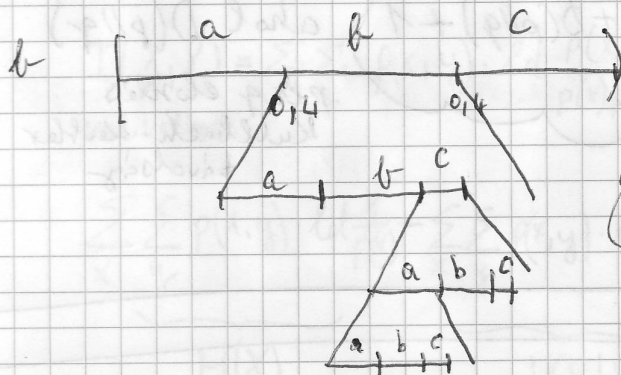
• ritka sorozat → ~~hosszú~~ kód, gyakori sorozat → rövid kód

(4)



$$X = \{a, b, c, p(a) = 0.4, p(b) = 0.4, p(c) = 0.2\}$$

$[b, c, a]$ átirányított sorozat



elég 1. rendben ismeri

az eloszlást!

(még nem feltétlen kell
fontosságiérték)

$0.75 = 0.11$ $2^{-1} 2^{-2}$ bca

ezt különbözít

mert ez egyértelműen meghatároz
egy reintervallumot.

de változó hosszú a kód

kell mindenlép egy
stop szimbólum $p(0)$

nem prefix, nem fakt

1. ZH eddig

6. előadás

$P(x)$ a forrás eloszlása (nem ismerjük, de becsülhetjük)

$Q(x)$ - szel becsüljünk a $P(x)$ eloszlását

relatív entropia:
(Kullback-Leibler távolság)

$$\sum p(x_i) \cdot \log \frac{p(x_i)}{q(x_i)}$$

Def: A relatív entropia:

$$D(P(x) \parallel Q(x)) = \sum_{x \in X} p(x_i) \log \frac{p(x_i)}{q(x_i)}$$

↑
távolság

2 eloszlás mennyire hasonlít egymásra! ha $p(x_i) = q(x_i) \rightarrow$ távolság = 0

$$H(X) + D(p \parallel q) \leq L_x < H(X) + D(p \parallel q) + 1$$

Shannon I.

ahol $D(p \parallel q)$
p és q eloszlás
Kullback-Leibler
távolság

... forráskódolás sége ...

a-posteriori entropia:

$$H(X|Y) = H(X) - \overset{\text{val. vált.}}{I(X; Y)}$$

átlagos kölcsönös információ (x,y-ban is megvan)

$$\text{és } H(X|Y) \leq H(X)$$

def: kölcsönös információ:

$$I(x_i, y_i) = \log \frac{p(x_i|y_i)}{p(x_i)}$$

megfigyelve y_i -t

mi is kölcsönös információ

ha $p(x_i)$ független $p(y_i)$ -től

akkor $p(x_i|y_i) = p(x_i)$

$$\log 1 \Rightarrow I(x_i, y_i) = 0$$

Bayes $\downarrow$

$$= \log \frac{p(x_i, y_i)}{p(x_i) \cdot p(y_i)}$$

x_i, y_i együttes valószínűsége

Átlagos kölcsönös információ:

Bayes tétel

$$I(X, Y) = \sum_x \sum_y \underset{\text{val. váltók}}{p(x, y)} \cdot \log \frac{p(x, y)}{p(x) \cdot p(y)} = \sum_x \sum_y p(x, y) \log \frac{p(x|y) \cdot p(y)}{p(x) \cdot p(y)} =$$

$$\underbrace{\sum_x \sum_y p(x, y) \log \frac{1}{p(x)}}_{H(X)} - \underbrace{\sum_x \sum_y p(x, y) \log \frac{1}{p(x|y)}}_{H(X|Y)} \quad (\log(ab) = \log a + \log b)$$

$$= H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = D(p(x, y) \| p(x) \cdot p(y)) \text{ [bit]}$$

Csatorna kapacitás:

$\frac{\text{bit}}{\text{sec}}$

$$C = \max_{p(x)} I(X, Y) \quad \begin{matrix} \text{bit/csatorna} \\ \text{hammálat} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{bit/s} \\ \text{BitRate} \end{matrix}$$

össen lehetséges bevezetési
elrendezés feletti max.

Shannon II. csatorna kapacitás valószínűségi tétele:

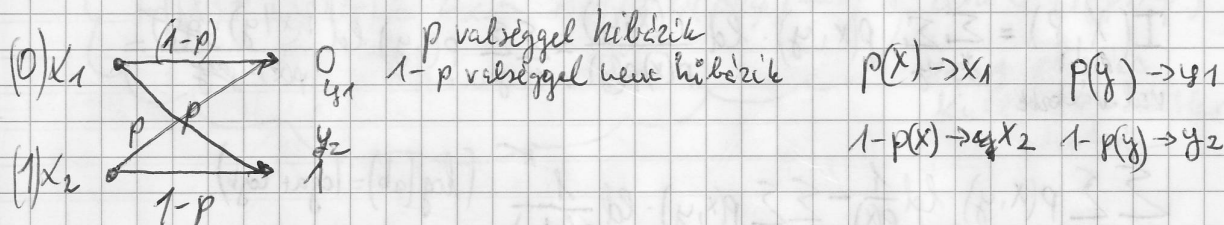
ha: $H(X) < C$ akkor $\exists \Omega(X) = X$
 $P_{\text{error}} \rightarrow 0$ ha $H(X') < C$
 hiba val. szg.

Mértékli Shannon II.:

k -s blokk $X \rightarrow N \cdot X'$; $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{N} < C$ $P_{\text{error}} \rightarrow 0$
 kódoló hálókód n nyitólánc

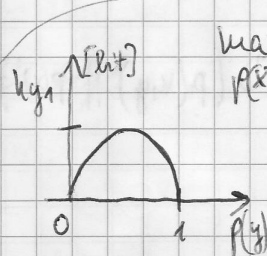
DMC - discrete memoryless channel

① BSC



$$C_{\text{BSC}} = \max_{p(x)} [H(Y) - H(Y|X)]$$

H_Y
lin. entropia
fs.



$\max_{p(x)} H(Y) = 1 [\text{bit}]$, ha $p(x) = 1/2 \Rightarrow p(y) = 1/2$
 egyenletes eloszlás

$$H(Y|X) = \sum_x \sum_y p(x,y) \cdot \log \frac{1}{p(y|x)} = \sum_{x_1} p(x_1) \cdot \left[\underbrace{(1-p) \cdot \log \frac{1}{1-p}}_{y_1} + \underbrace{p \cdot \log \frac{1}{p}}_{y_2} \right] +$$

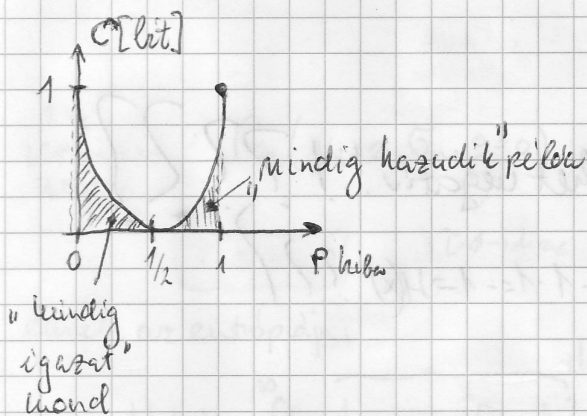
$$\underbrace{(1-p(x))}_{x_2} \cdot \left[\underbrace{p \cdot \log \frac{1}{p}}_{y_1} + \underbrace{(1-p) \cdot \log \frac{1}{1-p}}_{y_2} \right] =$$

$$= p \cdot \log \frac{1}{p} + (1-p) \cdot \log \frac{1}{1-p}$$

nem függ a forrás

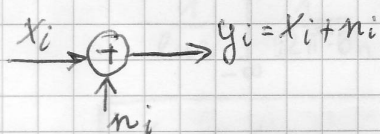
eloszlástól! csak p hiba valószínűségi!

$$C_{BSC} = \max [H(Y) - H(Y|X)] = 1 - h_p$$

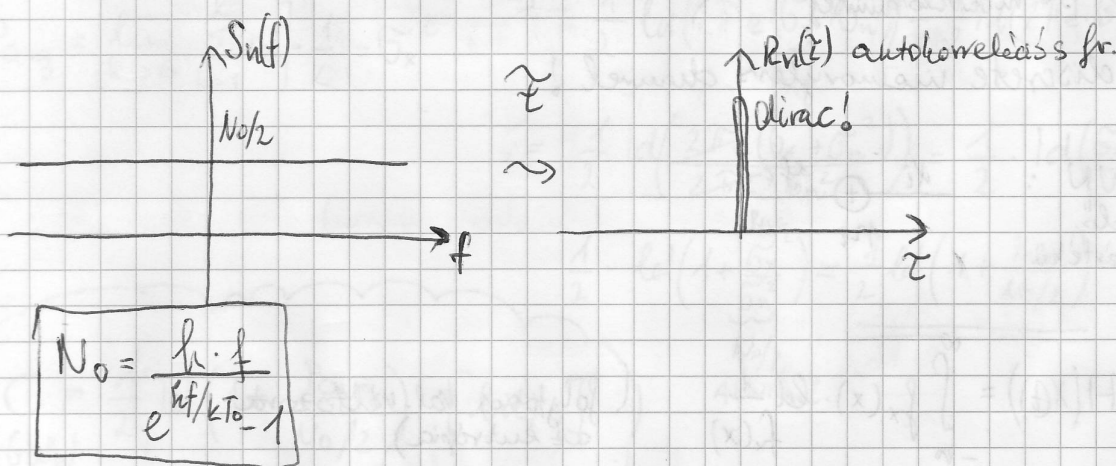
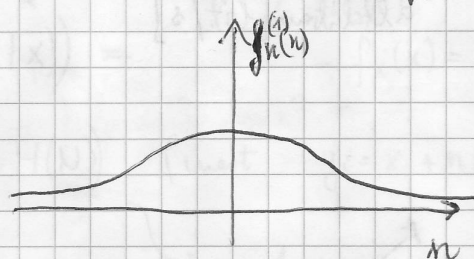


na $\frac{1}{2}$ akkor foglalom semmit az információról, $C=0$

• DMC eset, D-AGWN additív white Gaussian Noise.



~~///~~ $f_n^{(1)}(n) = G(\mu_n = 0; \sigma^2 = N_0/2; \varphi = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_n} \cdot \exp\left[-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}\right]$
 elkörendő
 sűrűségfü



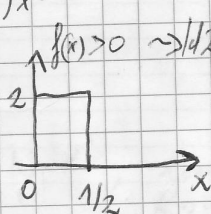
hell az új fogalom!

diszkrét $\rightarrow$ folytonos miatt

differenciális entropia:

$$H(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot \log \frac{1}{f_X(x)} dx$$

lehet negatív!!! ?? ??



7. előadás

LOTTO

$$C \triangleq \max_{p(x)} I(X, Y) \quad \begin{array}{l} \text{[bit/sad. h. áramlat]} \\ \text{[bit/s]} \end{array}$$

$p(x)$ közlési információ

• BSC csatorna:

$$C = 1 - h(p)$$

p = hibaváltoztatási

DMC - discrete memoryless channel!

D-AGWN:
diszkrét idő
de folyt. értéke

$$\frac{x_i \oplus y_i}{n_i}$$

$$H(X(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot \log \frac{1}{f_X(x)}$$

(folytonos val. változóra az entropia)

$$C \triangleq \max_{p(x)} D(p(x, y) \| p(x) p(y)) = \max_{p(x)} [H(X) - H(X|Y)] = \max_{p(x)} [H(Y) - H(Y|X)]$$

aposteriori entropia (Gauss lesz!)

n_i termikus zajra: $G_n(\mu_n=0, \sigma_n^2, \rho=0)$ Gauss folyamat

$\tilde{z} = \delta$ -sík

$$x_i \oplus y_i = x_i + n_i$$

n_i

ennek az entropiája: teljes érték

$$H(n) = - \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \cdot \exp\left[-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}\right]}_{dn=1} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \cdot \exp\left[-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}\right] dn$$

ld helyett ln legyen

$$= \frac{1}{\ln 2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \cdot \exp\left[-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}\right] \cdot \left[\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} - \frac{n^2}{2\sigma_n^2} \right] dn$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} \ln(2\pi e \cdot \sigma_n^2)}$$

D-AGWN esetben! $\rightarrow$

X , folyt. ért. vel. változó, Gauss eloszlással!

$$C \triangleq \max_{p(x)} (H(Y) - H(Y|X)) =$$

$$f_X(x) = G(\mu=0, \sigma_x^2, \rho)$$

$$= \max_{p(x)} (H(X+N) - H(N)) \quad (\text{mert } y_i = x_i + n_i) \quad \text{max akkor ha } x_i \text{ is Gauss eloszlás}$$

$$P_{avg} = \left[\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^K x_k^2}{K} \right] \cdot \frac{1}{K} = \sigma_x^2$$

$$\rightarrow = \frac{1}{2} \ln(2\pi e (\underbrace{\sigma_x^2}_{P_{avg}} + \sigma_n^2)) - \frac{1}{2} \ln(2\pi e \cdot \sigma_n^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2\pi e (\sigma_x^2 + \sigma_n^2)}{2\pi e \cdot \sigma_n^2}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_n^2}{\sigma_n^2}\right) =$$

$$\frac{1}{2} \ln\left(1 + \underbrace{\frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2}}_{\frac{P_{avg}}{N_0/2}}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{P_{avg}}{N_0/2}\right)$$

AGWN-nél

$$C = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{P_{avg}}{N_0/2}\right) \quad [\text{bit/s}]$$

AGWN

→ folytonos időben, AGWN esetében!
ma's

T ideig adunk! B sávkorláti jelet, PAVG
korlatos
átlag teljes.

$$x(t) \xrightarrow{n(t)} y(t) \quad \text{daráb mintá}$$

$$T_{\text{mintaveteli idő}} \leq 1/(2B) \rightarrow \frac{T}{T_m} = K \rightarrow T_m = \frac{T}{K} = \frac{1}{2B} \rightarrow \boxed{K = 2B \cdot T}$$

daráb mintá

$$C \stackrel{\Delta}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \max_{P(x)} I(x(t), y(t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \max_{P(x)} \sum_{i=1}^K I(x_i, y_i) \quad \uparrow$$

legjobb WSS
és koreláción!

WSS
mintá

$$x(t) = [x_1 \dots x_K]$$

$$y(t) = [y_1 \dots y_K]$$

$$n(t) = [n_1 \dots n_K]$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \max_{P(x)} \underbrace{K}_{\text{az a D-AGWN ismétlődik}} I(x, y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \max_{P(x)} \left(\frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P_{\text{AVG}}}{N_0/2} \right) \right)$$

Típus

folgt. AGWN

$$C = B \cdot \log \left(1 + \frac{P_{\text{AVG}}}{N_0/2} \right)$$

2-dimenziós!

$$= B \cdot \log \left(1 + \frac{P_{\text{AVG}}}{2B\sigma_n^2} \right)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{P_{\text{AVG}}}{2B}$$

$$\left[\begin{aligned} P_{\text{AVG}} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E\{x(t)^2\} dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=1}^K E\{x_k^2\} \xrightarrow{\text{WSS}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} K \cdot E\{x^2\} = \\ &= \frac{2B \cdot \sigma_x^2}{\quad} \end{aligned} \right]$$

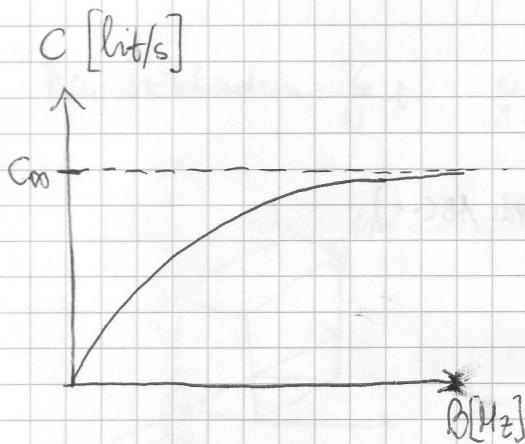
(sávkorlátozva)

$$C = B \cdot \log \left(1 + \underbrace{\frac{P_{\text{AVG}}}{B \cdot N_0}}_{\text{zaj}} \right) \text{ [bit/s]}$$

AGWN
sávkorlatos B
Tideig

$$C_{\infty} = \frac{P_{\text{AVG}}}{N_0} \cdot \log e = \frac{P_{\text{AVG}}}{N_0 \cdot \ln 2}$$

ha
kevese
végtelen
folyó



normalized $C : [\text{bit/s}/\text{Hz}] = C/B$

$P_{\text{avg}} = E_b \cdot C$
 átlagenergia

$$\frac{C_{\text{AGWN}}}{B} = \log\left(1 + \frac{E_b \cdot C}{B \cdot N_0}\right) = \log\left(1 + \frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{C}{B}\right)$$

$$\frac{C_{\text{AGWN}}/B}{2} = 1 + \frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{C}{B} \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{C/B} - 1}{C/B}$$

8. előadás:

~~$\frac{E_b}{N_0} = \exp\left(\frac{1}{\ln 2} \left[\frac{C}{B} \cdot \ln 2 - \ln \frac{C}{B}\right]\right)$~~

$\frac{E_b}{N_0} \approx \exp \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{C}{B} \cdot \ln 2 - \ln \frac{C}{B} \right]$

ha $C/B \rightarrow \infty$

ha $C/B \rightarrow 0$

$\frac{E_b}{N_0} \Rightarrow \ln 2$
 (-1.6 dB)

Shannon II tétel:

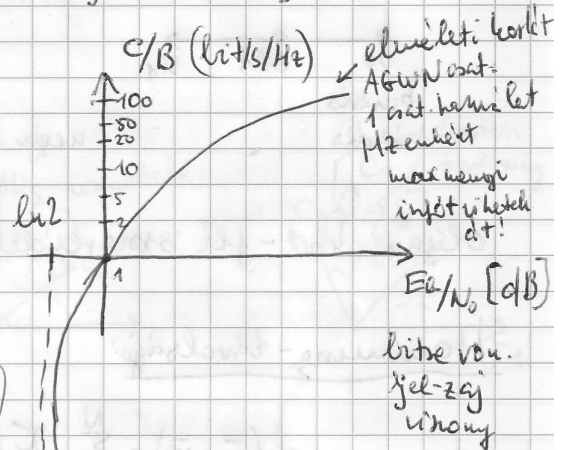
amíg $R < C \rightarrow \exists$ olyan Ω , hogy $P_e \rightarrow 0$
 bitáramás csatorna kapacitása

Forrás kódoló
 Forrás dekódoló
 üzenet

ha $K \xrightarrow{\Omega} N > K$
 mindelem $\downarrow$
 inkább N -et

$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{K}{N} < C : P_e \rightarrow 0$ [1s-re vonatkoztatva van]

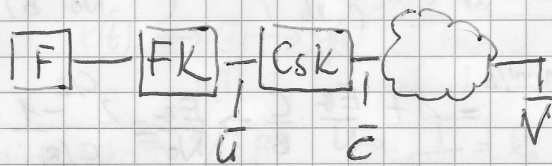
$\frac{K}{N} < 1$ más feltétel !!



Hibajavító kódolás: (N, K, q)

(error correction coding)

érték
halmaz (pontos ABC-e)

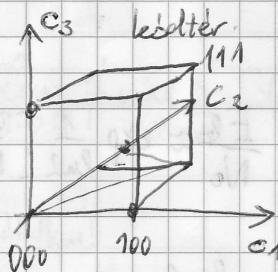
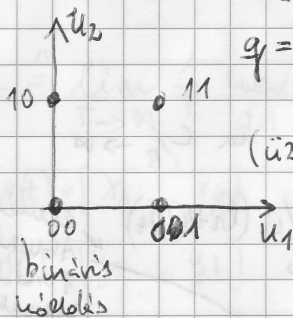


$$\bar{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_K]$$

$(N > K)$

$$q=2, K=2, N=3$$

(üzenet-tér) $\rightarrow$



nem értelmes olyan összerendelés $\rightarrow 00 \rightarrow 000$
 $01 \rightarrow 001$

Olyan kód-jel összerendelés kell, amely térben távol van egymástól!

Hamming-távolság:

$$d(\bar{c}, \bar{v}) = \sum_{i=1}^N \chi(c_i \neq v_i) \rightarrow 2 \text{ vektor } d(\bar{c}, \bar{v}) = \sum \text{ ahol különböznek!}$$

$$d_{\min} = \min_{\substack{i=j \\ i \neq j}} d(c_i, c_j) \rightarrow \text{érvényes kódzavarok közt a minimális Hamming távolság.}$$

döntő
vett fel
döntő

$$D(\bar{v}) = \bar{c}' \quad P_e = \emptyset, \text{ ha } \bar{u}' = \bar{u} : \bar{c}' = \bar{c}$$

$$\mathcal{N}^{-1}(\bar{c}') = \bar{u}'$$

ha $\bar{v} = \bar{c}_i$ tehát a dekódolás bevezetése érvényes kódok van, akkor ez triviális

nem tudok hibát javítani ha $\bar{v} = \bar{c}_j \neq \bar{c}$

+ nem tudok hibát javítani,

ha $\bar{c}' \neq \bar{c}$ de $\bar{c}'$ érvényes kód!

(másra döntő tökéletesen)

olyan hibát kapok, ami nem eleme az érték halmaznak!

de tudom detektálni!