

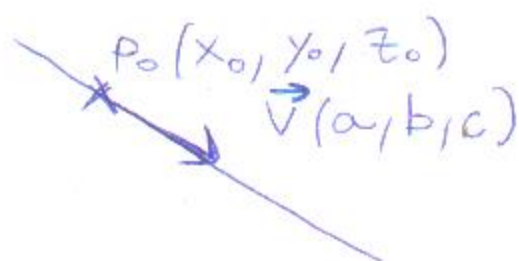
Egyenes egyenlete:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{v}$$

$$x(t) = x_0 + at$$

$$y(t) = y_0 + bt$$

$$z(t) = z_0 + ct$$



M

OSSZEFÖG-
ZÁRÓ

Egyenes és pont távolsága:

$$d = \frac{|\vec{PS} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

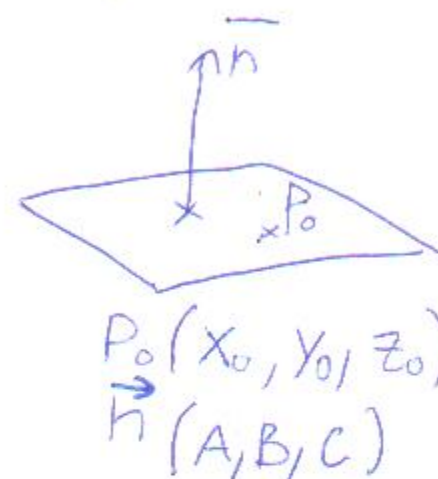


Sík: vektoregyenlete: $\vec{n} \cdot \vec{P_0P} = 0$

$$\text{alapegyenlete: } A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\text{általános egyenlete: } Ax + By + Cz = D$$

$$\text{normál egyenlete: } \frac{Ax + By + Cz}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$



rámítási eljárások:

- 3 ponton átmenő sík: adott P, Q, R pontok $\rightarrow [A, B, C] = \vec{PQ} \times \vec{PR}$

- 2 sík metszete: adott két sík, S_1 és $S_2 \rightarrow \vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

- sík és egyenes metséspontja: $t(t)$ behelyettesítés S-be, t kiszámítása, majd visszahelyettesítés az egyenes egyenletébe

- pont és sík távolsága: adott Q és S-re: a távolság:



$$d = \left| \vec{QS} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$$

iránymenti derivált

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

adott $f(x, y)$ esetén rámutatni kell a $\vec{v}$ iránymenti deriváltját

a P pontban

$$\frac{(\text{grad } f|_P) \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

sorok:

a számsor összege: $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^K a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, ha részösszegei sorozata konvergens

Divergens sorok nincs összege

skaláris szorzat:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

vektoriális szorzat:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

① Geometrisi sor: $\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n$

$$S_n = \begin{cases} \frac{a(1-q^n)}{1-q} & \text{ha } q \neq 1 \\ n \cdot a & \text{ha } q = 1 \end{cases}$$

$$S = \begin{cases} \frac{a}{1-q} & \text{ha } |q| < 1 \\ \text{egyszerűen divergens} & \end{cases}$$

Jellegetes sorok

$$\ln n < n^x < x^n < n! < n^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \boxed{D}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{1}{n} \rightarrow \boxed{D}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow \boxed{D}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \rightarrow \boxed{D}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2} \rightarrow \infty \rightarrow \boxed{D}$$

(hányados kritérium alapján is)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow \boxed{K} \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \rightarrow \boxed{K} -\log(2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2} \rightarrow \boxed{K}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} \boxed{K}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n}{n!} = e^K$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$



ÖSSZEFOGLALÓ

Geometriai sor konvergenciája

$\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1}$ sor akkor konvergens, ha $|q| < 1$.

Ekkor a sor összege $S = \frac{a}{1-q}$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \right)$$

Harmonikus sor: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens

Alternáló sor: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konvergens, ha a_n monoton tart 0 -hoz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \text{ konvergens}$$

Konvergencia kritériumok:

① Majorálás: $0 \leq a_n \leq b_n$ Ha b_n konvergens, a_n is az.

② Minorálás: $0 \leq a_n \leq b_n$ Ha a_n divergens, akkor b_n is az.

③ Hányados kritérium:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor

Ha $\exists$ olyan $0 < q < 1$ melyre $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$ akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ^{abszolút} konvergens.

Ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens.

$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ha $L = 1$ akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ lehet $\boxed{K}$ vagy $\boxed{D}$

ha $L < 1$ akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \boxed{K}$

ha $L > 1$ akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \boxed{D}$

④ Gyökkritérium:

Ha létezik olyan $0 < q < 1$ melyre

$\sqrt[n]{|a_n|} < q$ teljesül, akkor

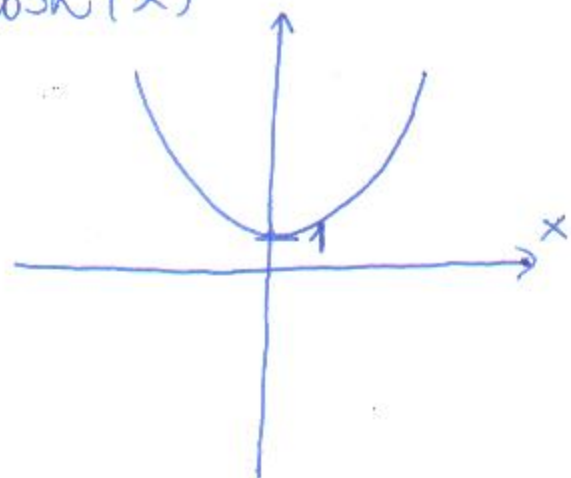
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ^{abszolút} konvergens.

Ha $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens.

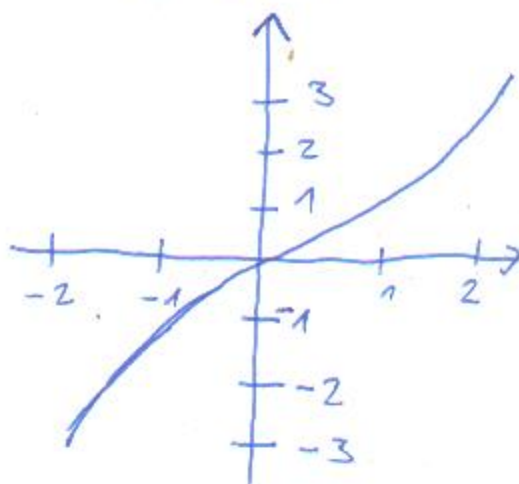
Abszolút konvergens $\sum a_n$, ha $\sum |a_n|$ is konvergens.

Feltételesen konvergens $\sum a_n$, ha konvergens de nem abszolút konvergens.

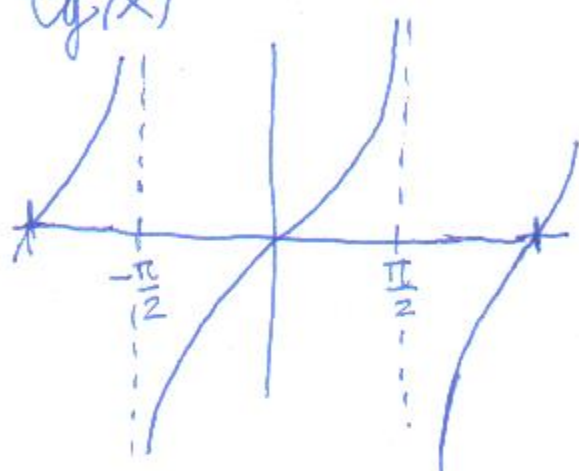
$\cosh(x)$



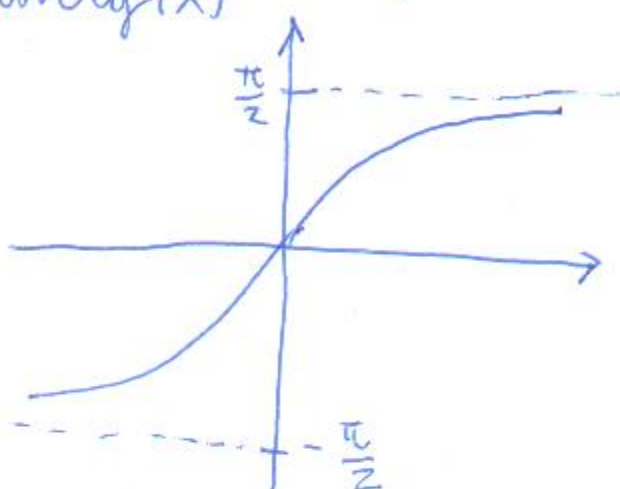
$\sinh(x)$



$\tanh(x)$



$\operatorname{arctanh}(x)$



$\ln(x)$

