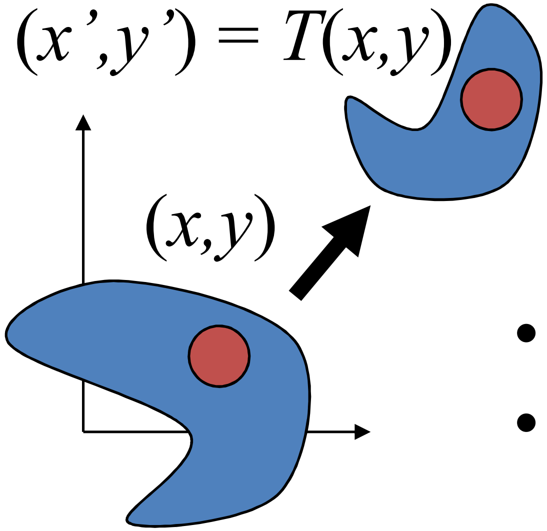
Transzformációk

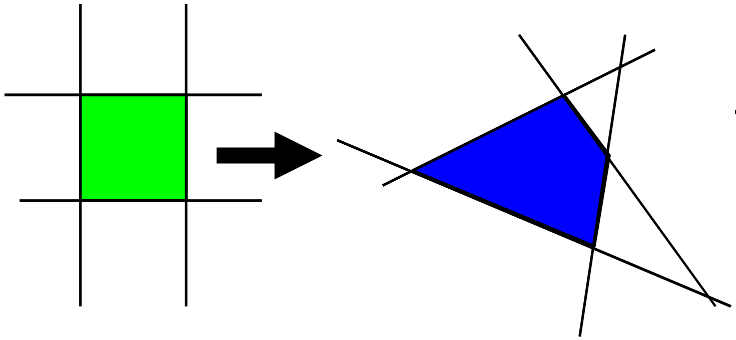
Szirmay-Kalos László



Transzformációk

- Tönkre tehetik az egyenletet
- Korlátozzuk a transformációkat és az alakzatokat úgy, hogy invariáns legyen
  - Pont, egyenes (szakasz), sík (poligon)
- **Affin transzformációk**
  - Párhuzamos egyenes tartó
  - Descartes koordinátákban lineáris

$$x' = a_{11}x + a_{21}y + a_{31}$$
$$y' = a_{12}x + a_{22}y + a_{32}$$

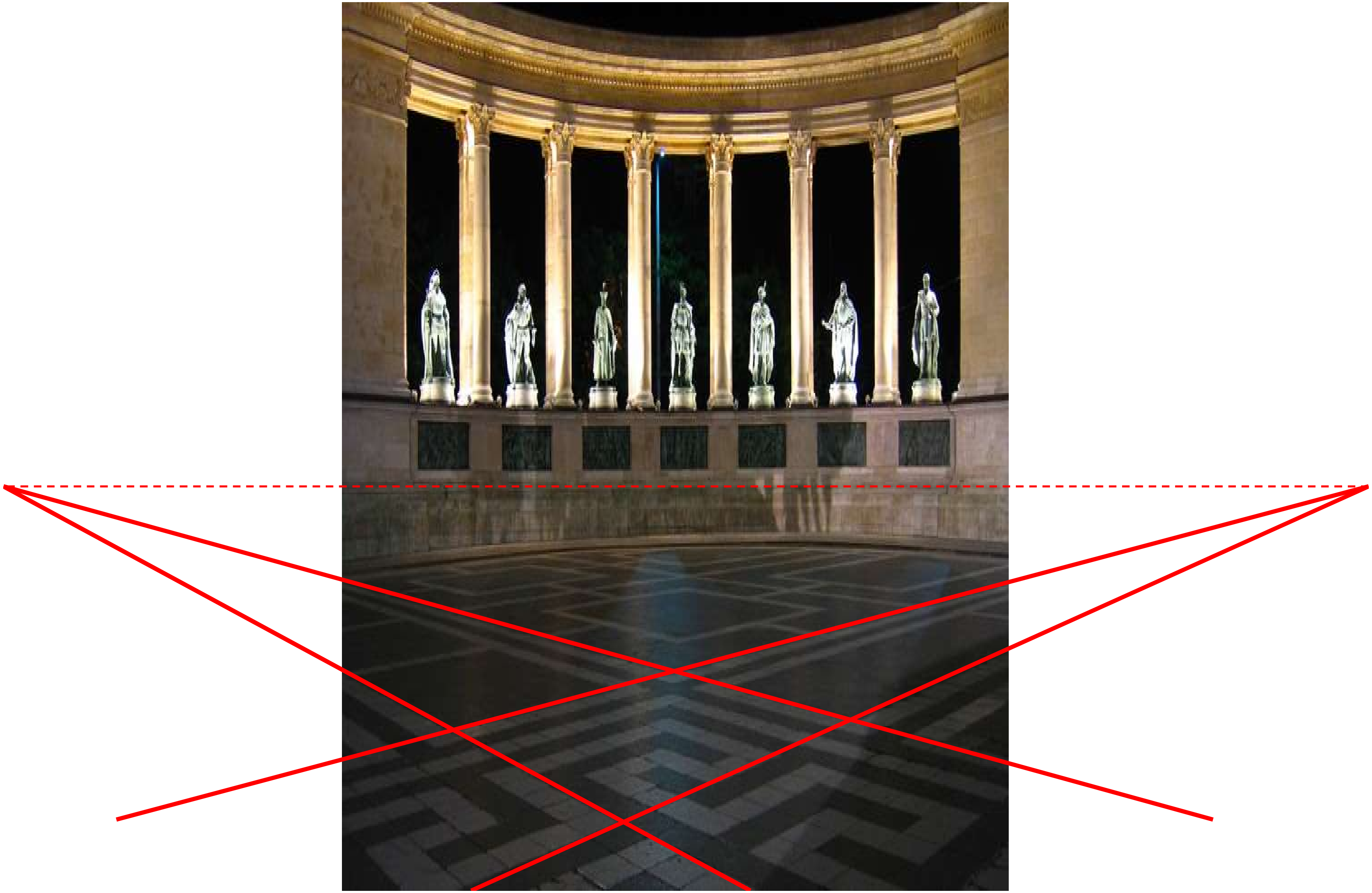


Homogén lineáris transzformációk

Egyenest egyenesbe

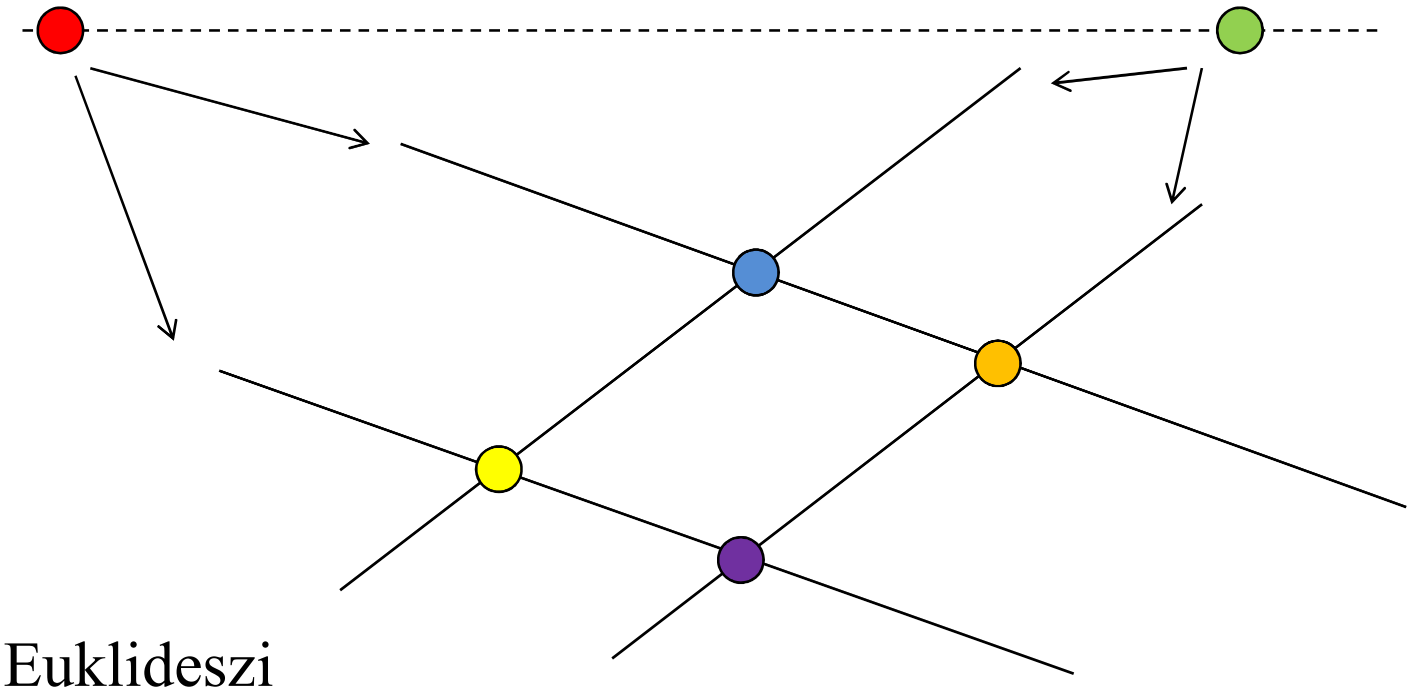
Homogén koordinátákban lineáris

Perspektíva



Grafika vizsgák javítása

Euklideszi → Projektív sík



Euklideszi

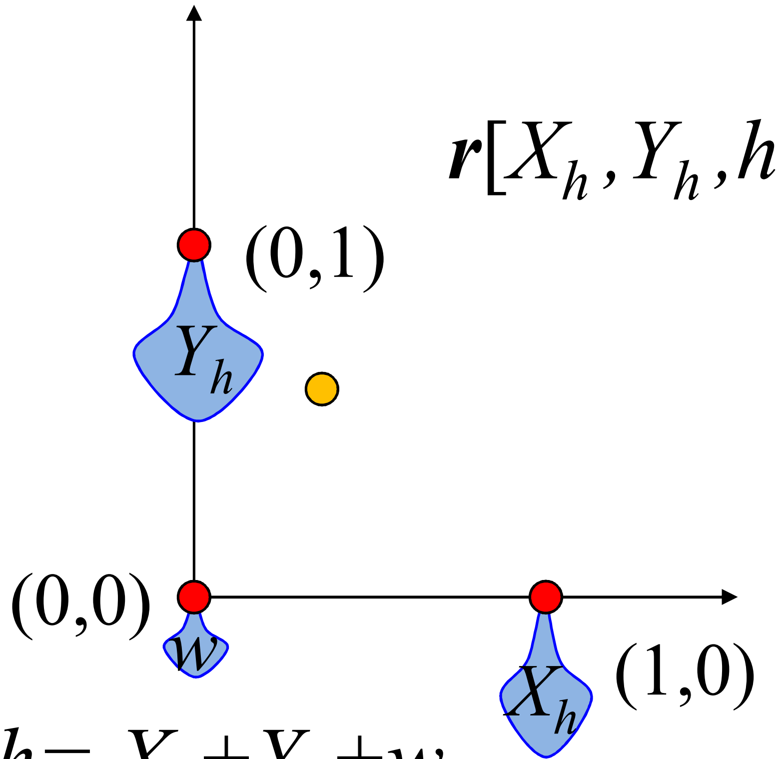
- Két pont meghatároz egy egyenest.
- Egy egyenesnek van legalább két pontja.
- ~~Ha *a* egy egyenes, A pedig egy, nem az egyenesen lévő pont, akkor egyetlen olyan egyenes létezik, amely átmegy A-n és nem metszi a-t.~~

Projektív

- Két pont meghatároz egy egyenest.
- Egy egyenesnek van legalább két pontja.
- **Két egyenes mindig egy pontban metszi egymást**.

Homogén koordináták (2D)

$$\boxed{(x, y) \rightarrow [x, y, 1] \sim [x \cdot h, y \cdot h, h] = [X_h, Y_h, h]}$$



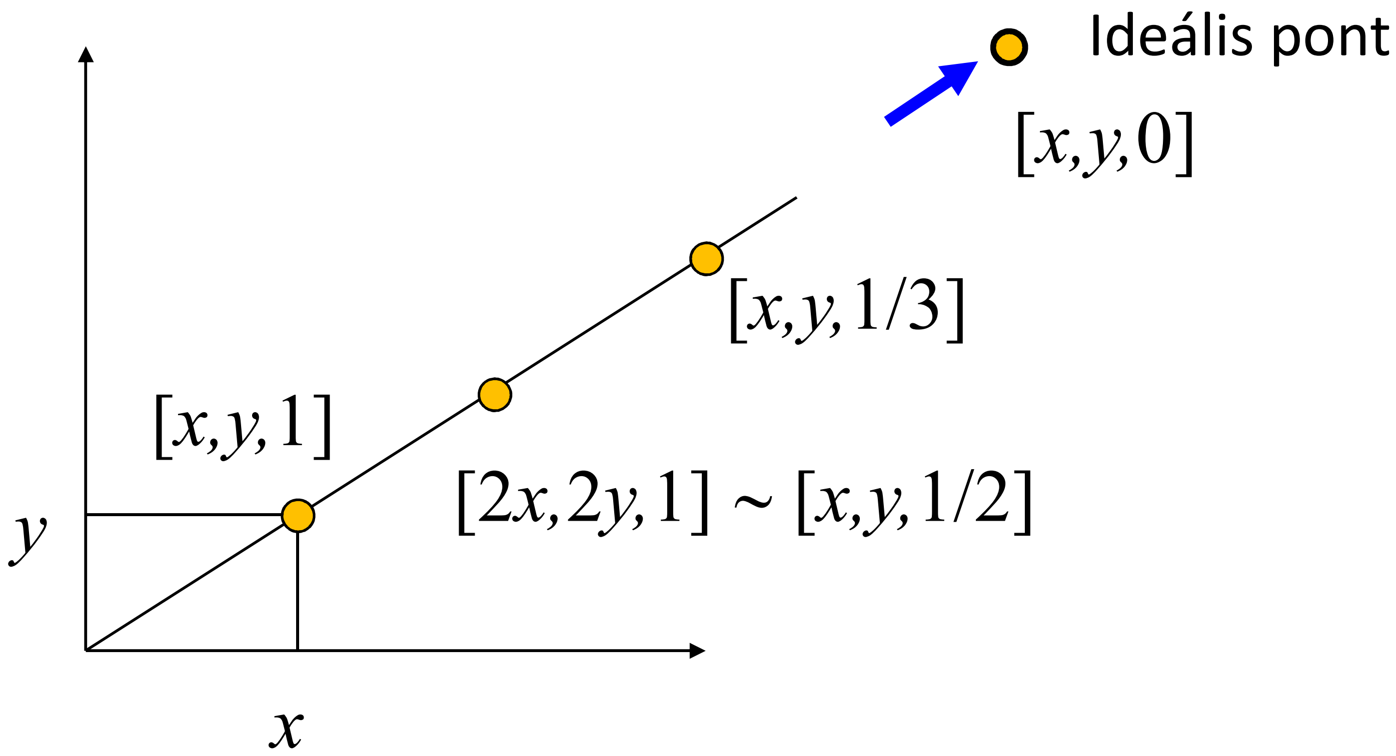
$$h = X_h + Y_h + w$$

$$\boldsymbol{r}[X_h, Y_h, h] = \frac{X_h \cdot (1,0) + Y_h \cdot (0,1) + w \cdot (0,0)}{h}$$

$$\boldsymbol{r}[X_h, Y_h, h] = \left(\frac{X_h}{h}, \frac{Y_h}{h}\right)$$

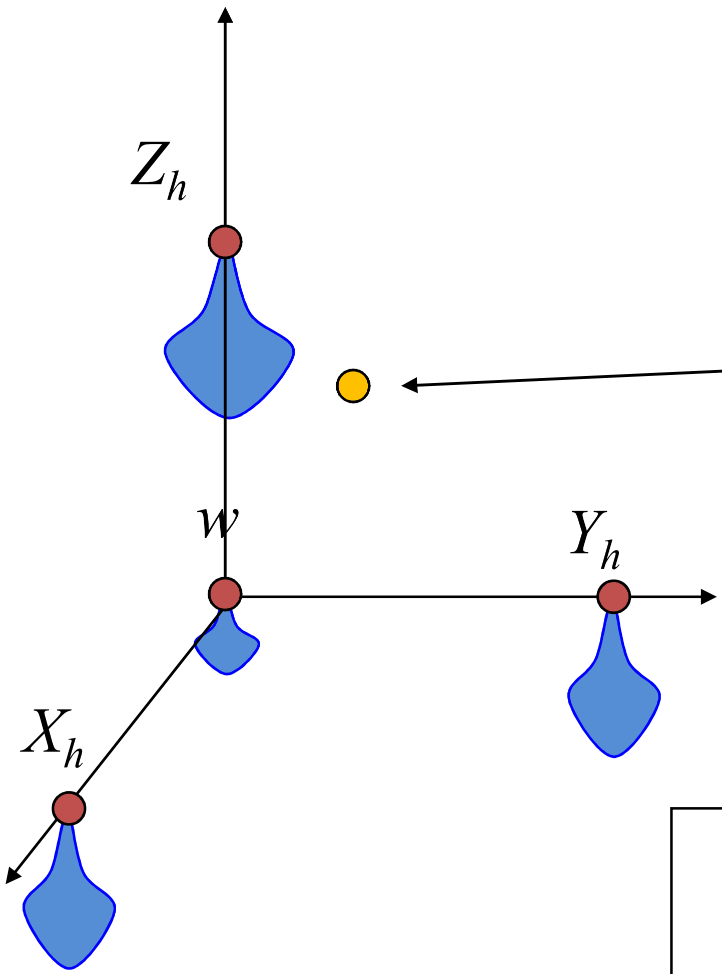
$$\boxed{x = \frac{X_h}{h} \qquad y = \frac{Y_h}{h}}$$

Homogén koordináták ideális pontokhoz: *h*=0



Euklideszi sík+ ideális pontok = projektív sík

Homogén koordináták (3D)



Teljes súly: $h = X_h + Y_h + Z_h + w$

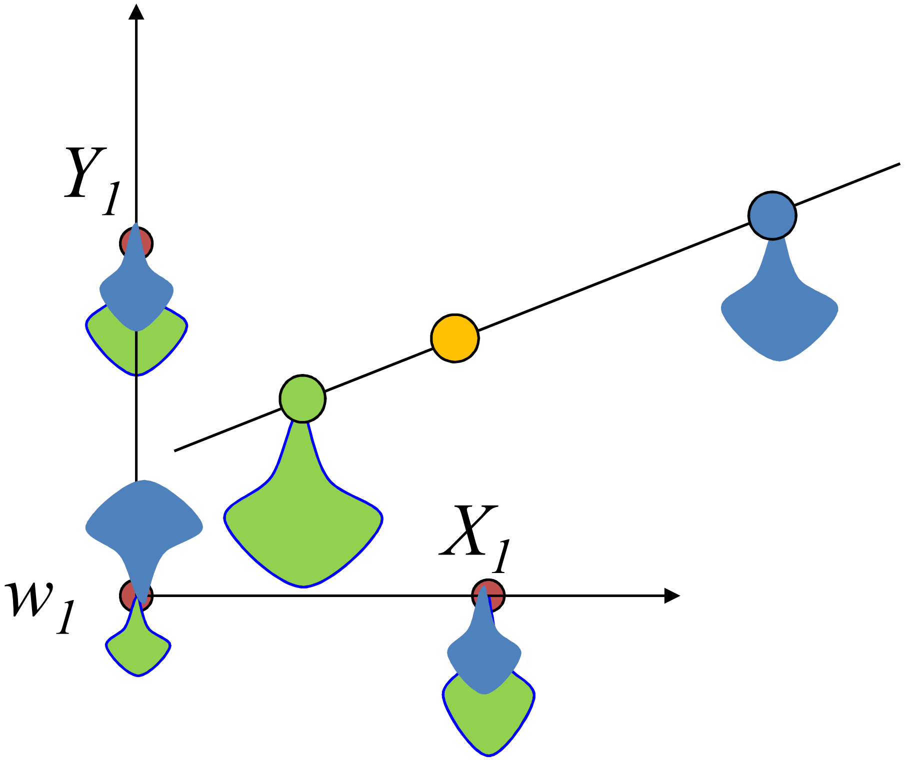
Súlypont:

$$\boxed{[X_h, Y_h, Z_h, h]}$$

Nem lehet mind egyszerre zérus

$$\boxed{x = \frac{X_h}{h} \qquad y = \frac{Y_h}{h} \qquad z = \frac{Z_h}{h}}$$

Egyenes a projektív térben

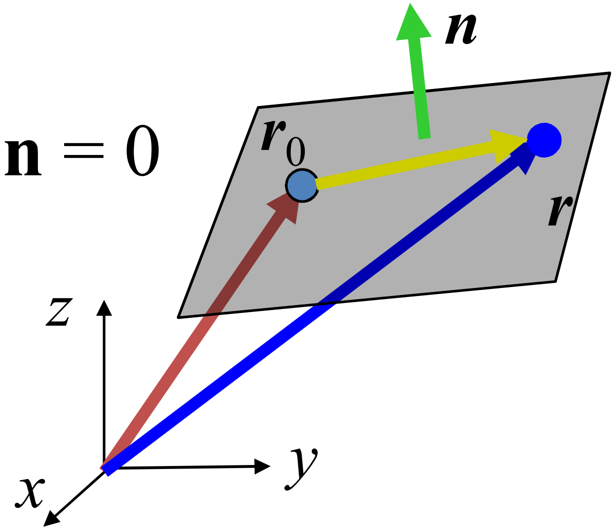


egyenes = két pont kombinációja
szakasz = két pont konvex kombinációja

$$[X(t), Y(t), Z(t), h(t)] = [X_1, Y_1, Z_1, h_1] \cdot t + [X_2, Y_2, Z_2, h_2] \cdot (1-t)$$

Sík

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r0}) \bullet \mathbf{n} = 0$$



Euklideszi tér, Descartes koordináták:

$$n_x\, x + n_y\, y + n_z\, z + d = 0$$

Euklideszi tér, homogén koordináták:

$$n_x X_h/h + n_y\, Y_h/h + n_z\, Z_h/h + d = 0 \qquad h \neq 0$$

Projektív tér:

$$\boxed{n_x X_h + n_y\, Y_h + n_z Z_h + d\, h = 0} \qquad \cancel{h \neq 0}$$

$$[X_h, Y_h, Z_h, h] \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \\ d \end{bmatrix} = 0$$

Homogén lineáris transzformációk

- **<u>Homogén koordinátavektor szorzása mátrixszal</u>**
- 2D transzformáció 3x3 mátrix

$$[X_h{}',Y_h{}',h'] = [X_h,Y_h,h]\cdot\mathbf{T}_{3x3}$$

- 3D transzformáció 4x4 mátrix

$$[X_h{}',Y_h{}',Z_h{}',h'] = [X_h,Y_h,Z_h,h]\cdot\mathbf{T}_{4x4}$$

- Transzformációk konkatenációja: Asszociatív

$$\begin{aligned}[X_h{}',Y_h{}',Z_h{}',h'] &= (\dots([X_h,Y_h,Z_h,h]\cdot\boldsymbol{T}_1)\cdot\boldsymbol{T}_2)\dots\boldsymbol{T}_n) = \\ &= [X_h,Y_h,Z_h,h]\cdot(\boldsymbol{T}_1\cdot\boldsymbol{T}_2\cdot\dots\cdot\boldsymbol{T}_n) = \\ &= [X_h,Y_h,Z_h,h]\cdot\boldsymbol{T}\end{aligned}$$

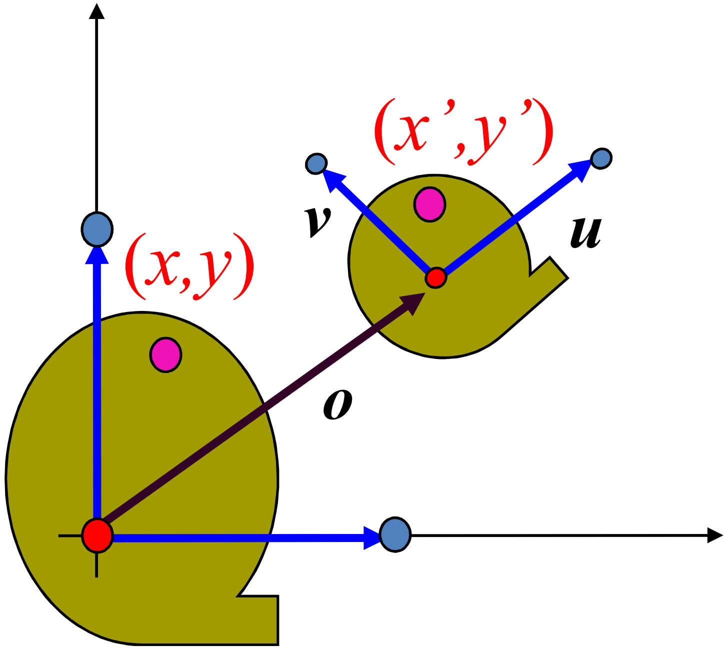
Affin transzformációk

- Ha az utolsó oszlop $[0,0,1]^T$ vagy $[0,0,0,1]^T$
- Descartes koordinátákra lineáris
- Párhuzamos egyenestartó

$$x' = a_{11}x + a_{21}y + a_{31}$$
$$y' = a_{12}x + a_{22}y + a_{32}$$

$$[x', y', 1] = [x, y, 1]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Affin transzformációs mátrix sorai



$$(x', y') = \boldsymbol{o} + x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \boxed{\begin{matrix} o_x & o_y \end{matrix}} & 1 \end{bmatrix}$$

$$[0, 0, 1] \quad [o_x \quad o_y \quad 1\,]$$

$$[1, 0, 1] \quad [o_x+u_x \ \ o_y+u_y \ \ 1\,]$$

$$[0, 1, 1] \quad [o_x+v_x \ \ o_y+v_y \ \ 1\,]$$

Homogén lineáris transzformációk tulajdonságai

- Pontot pontba, egyenest egyenesbe, konvex kombinációkat konvex kombinációkba képeznek le

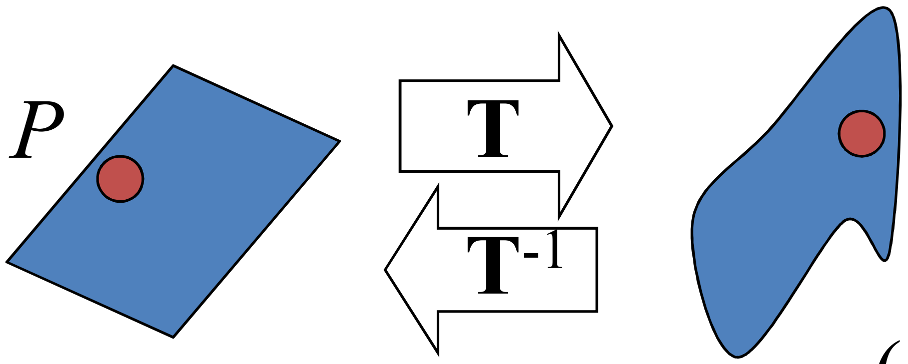
Példa: egyenest egyenesbe

$$[X(t), Y(t), Z(t), h(t)] = [X_1, Y_1, Z_1, h_1] \cdot t + [X_2, Y_2, Z_2, h_2] \cdot (1\text{-}t)$$

$$P(t) = P_1 \cdot t + P_2 \cdot (1\text{-}t) \quad // \cdot \mathbf{T}$$

$$P^*(t) = P(t) \cdot \mathbf{T} = (P_1 \cdot \mathbf{T}) \cdot t + (P_2 \cdot \mathbf{T}) \cdot (1\text{-}t)$$

Invertálható homogén lineáris transzformációk: síkot síkba



$$P^* = P \cdot \mathbf{T}$$

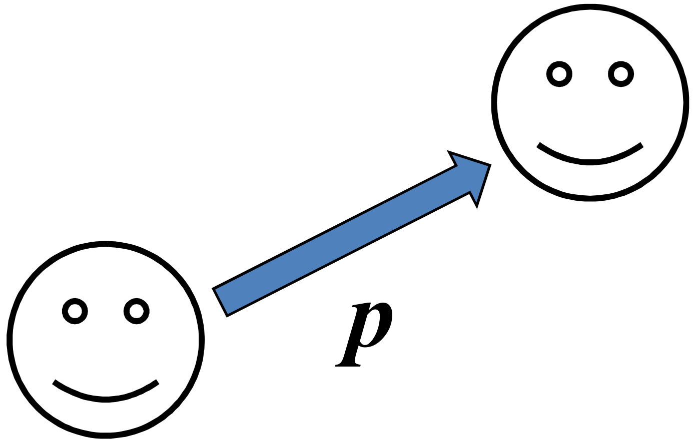
$$P \cdot N^T = 0$$

$$(P^* \cdot \mathbf{T}^{-1}) \cdot N^T = 0$$
$$P^* \cdot (\mathbf{T}^{-1} \cdot N^T) = 0$$
$$P^* \cdot N^{*T} = 0$$

$$\boxed{N^* = N \cdot (\mathbf{T}^{-1})^T}$$ Inverse transpose

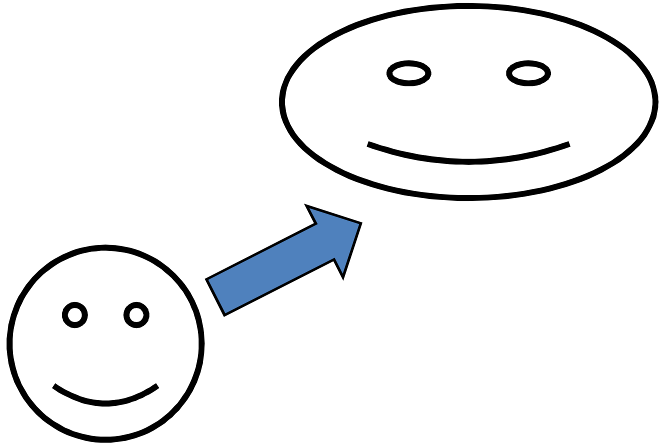
Eltolás

$$(x', y', z')=(x+p_x, y+p_y, z+p_z)$$



$$[x',y',z',1] = [x,y,z,1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p_x & p_y & p_z & 1 \end{bmatrix}$$

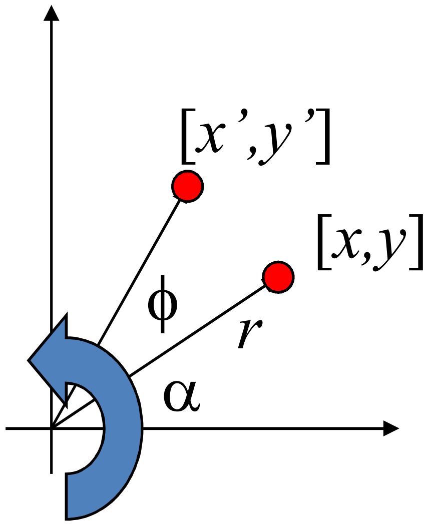
Skálázás

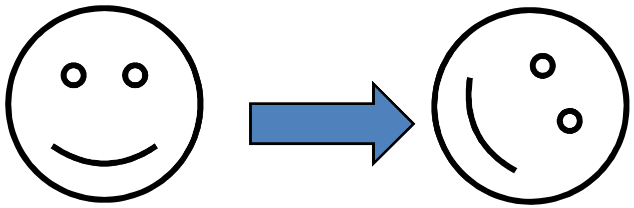


$$x' = S_x \cdot x, \quad y' = S_y \cdot y, \quad z' = S_z \cdot z$$

$$[x',y',z',1] = [x,y,z,1]\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Z tengely körüli forgatás





$$x = r\cos\alpha$$
$$y = r\sin\alpha$$

$$x' = r\cos(\alpha+\phi) = \boxed{r\cos\alpha}\cos\phi - \boxed{r\sin\alpha}\sin\phi$$
$$y' = r\sin(\alpha+\phi) = r\cos\alpha\sin\phi + r\sin\alpha\cos\phi$$

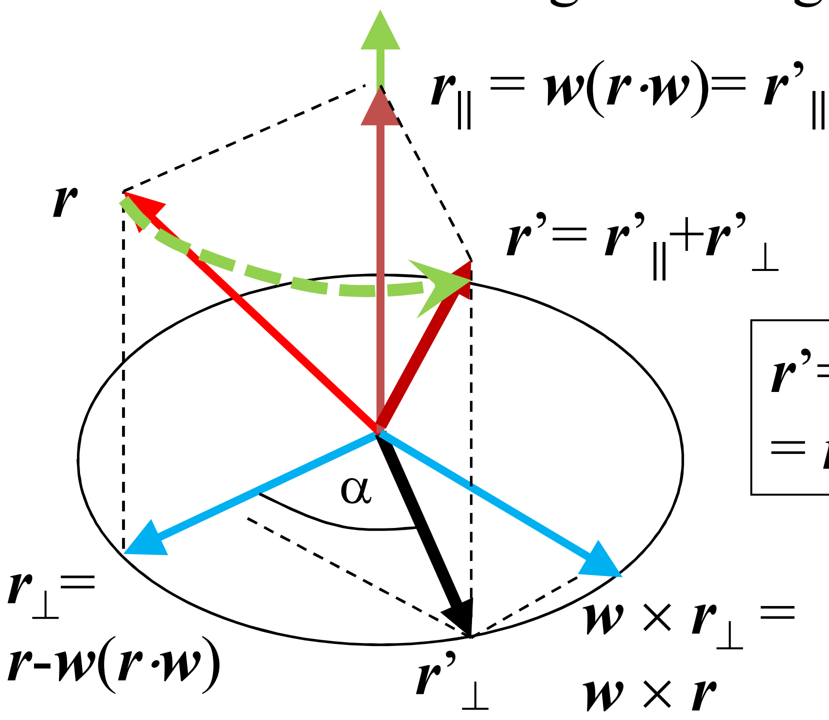
$$z' = z$$

$$x' = r\cos(\alpha+\phi) = x\cos\phi - y\sin\phi$$
$$y' = r\sin(\alpha+\phi) = x\sin\phi + y\cos\phi$$

$$[x',y',z',1] = [x,y,z,1]\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Általános *w* tengely körüli forgatás
Rodrigues formula

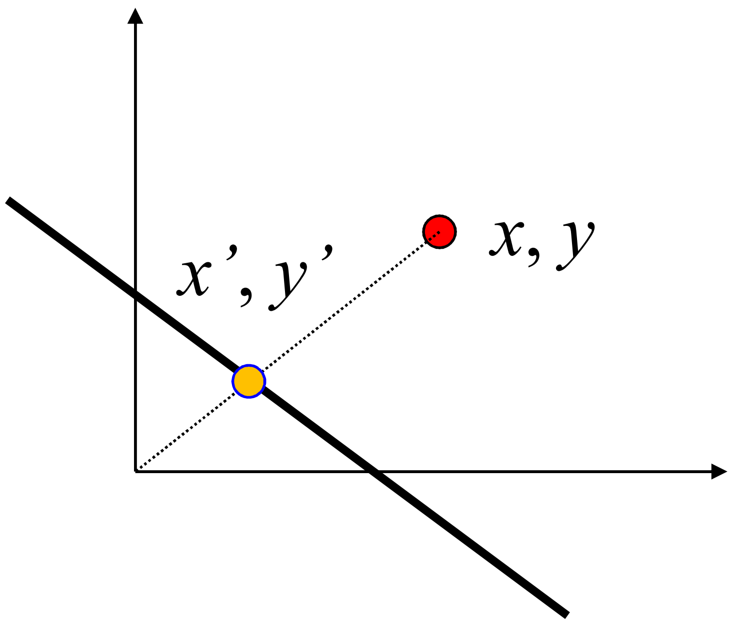
w: forgatási tengely, legyen egységvektor



$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{w}))\cos(\alpha) + \boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}\sin(\alpha) \\ &= \boldsymbol{r}\cos(\alpha) + \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{w})(1-\cos(\alpha)) + \boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}\sin(\alpha) \end{aligned}$$

Mátrix sorai: ***i*, *j*,*k***-ra alkalmazva
Házi feladat!

Középpontos vetítés (2D)



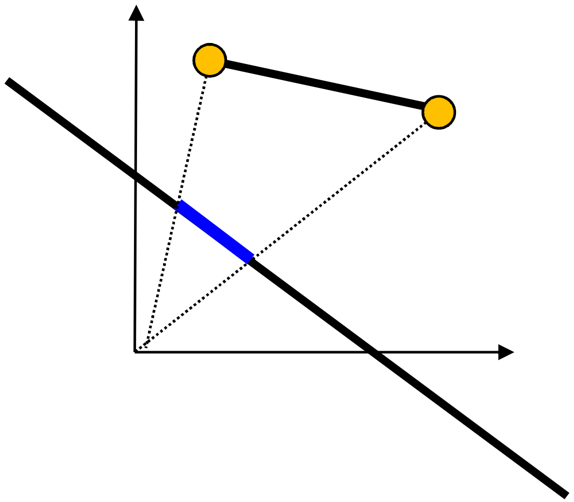
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

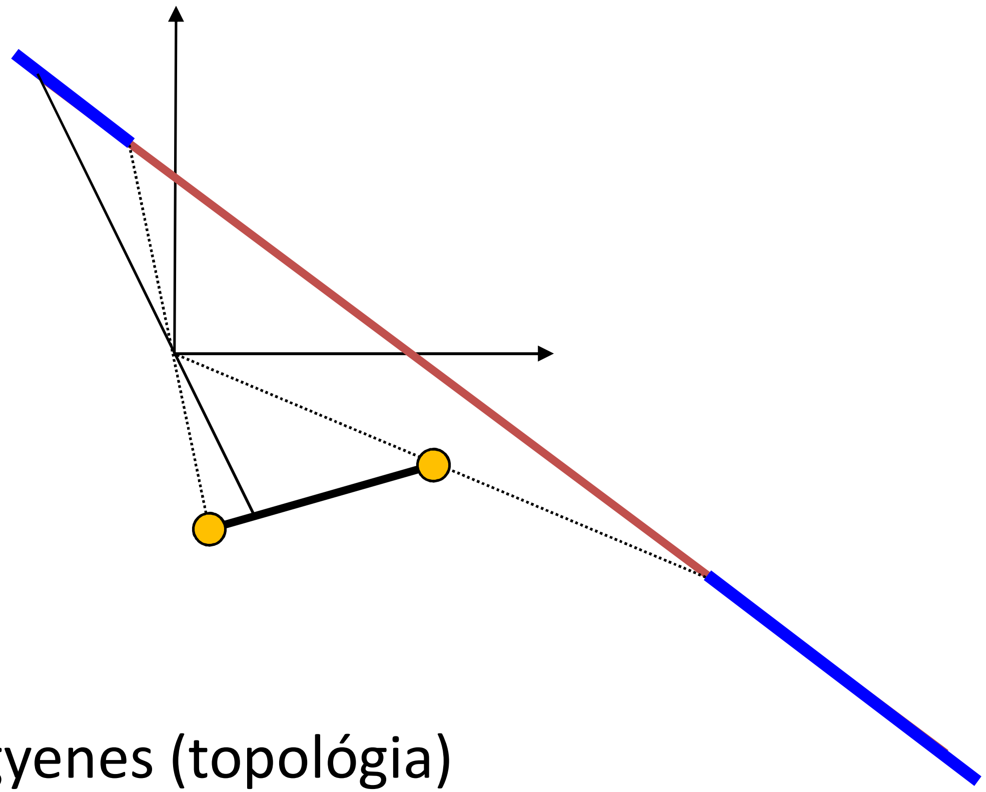
$[x, y, 1]$

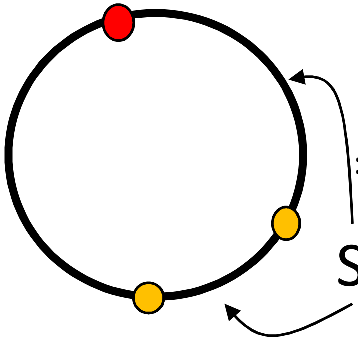
$[x, \quad y, px+qy]$

$x/y=x'/y'$ és $\quad px+qy=1 \quad \Rightarrow \quad \left[\dfrac{x}{px+qy} \quad \dfrac{y}{px+qy}\right]$

Átfordulási probléma







Ellenőrző kérdések

- Bizonyítsa be, hogy ha a transzformált *x, y* az eredeti *x, y*-nak lineáris függvényei, akkor a transzformáció egyenest, egyenesbe képez le és a párhuzamos egyeneseket megtartja!
- Írja fel az adott irányú, origón átmenő tengely körül alfa szöggel forgató transzformáció mátrixát!
- Írja fel a vektoriális szorzást mátrixművelettel?
- Mit keres a z tengely körüli forgatás képlete az Maxwell egyenletek és az általános relativitáselmélet képletei között?
- Írja fel egy síkra merőlegesen vetítő, illetve centrálisan vetítő transzformációk mátrixait!
- Hogyan oldható fel az átfordulási probléma?
- Milyen alakzat az összes ideális pontot tartalmazó halmaz?
- Írja fel egy parabola egyenletét a projektív síkon!
- Határozza meg két párhuzamos egyenes metszéspontjának (homogén) koordinátáit a projektív síkon!
- Adjon meg transzformációt, amely egy háromszöget egy másikba képez le!
- Adjon meg transzformációt, amely egy konvex négyszöget egy konvex négyszögbe képez le! Mi történik, ha a négyszög nem konvex?