Analitikus geometria emlékeztető

Szirmay-Kalos László

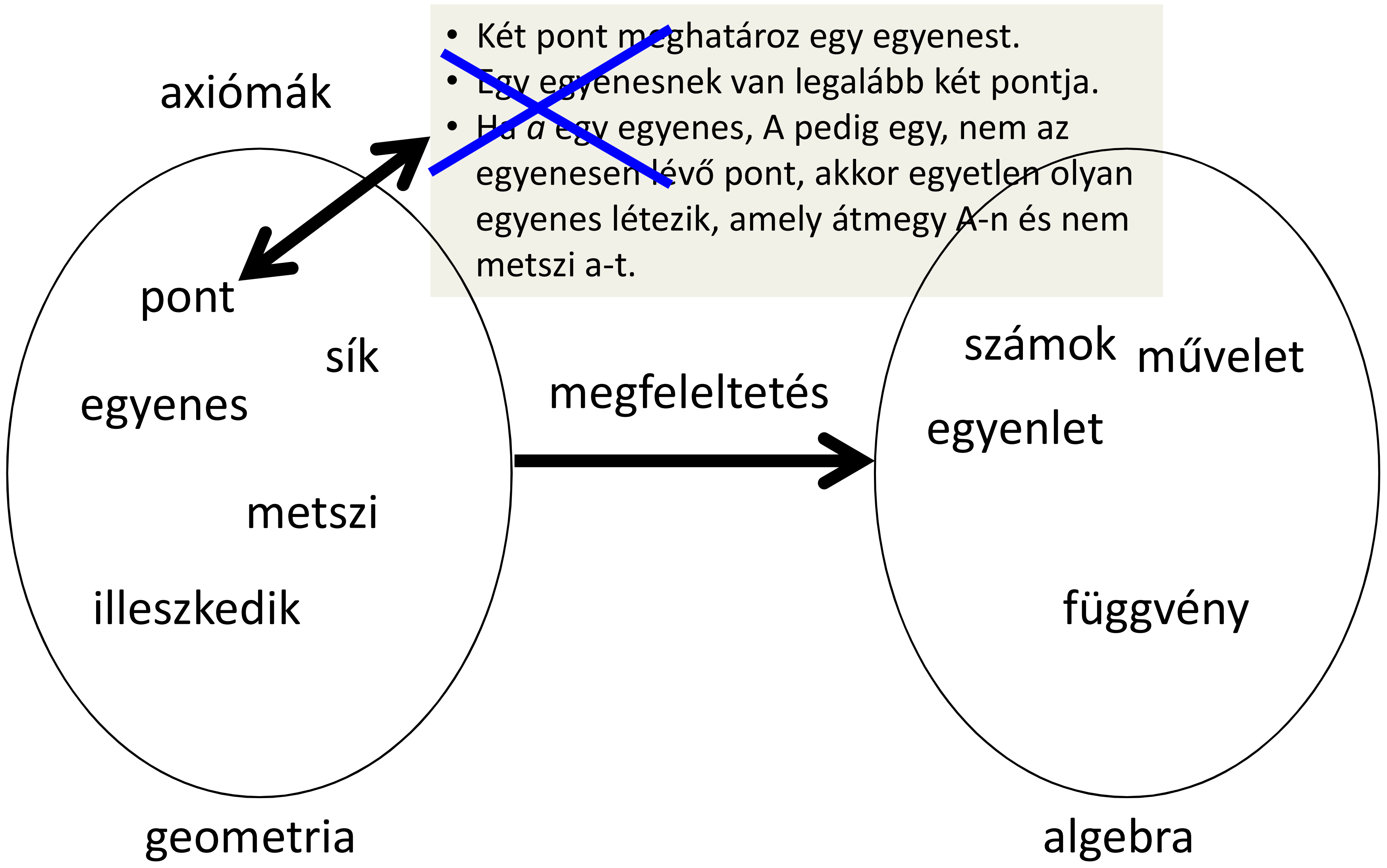
Geometriák

- Geometria
  - Axiómák
    - Alapigazság (tapasztalat)
    - Alapfogalmak implicit definíciója
  - Definíciók és tételek
    - Két különböző egyenes legfeljebb egy pontban metszi egymást
    - A háromszög szögeinek összege 180 fok
- Fontos geometriák a számítógépes grafikában
  - Euklideszi (analitikus/differenciál)
  - Projektív (analitikus)
  - Fraktál
  - Diszkrét
  - …

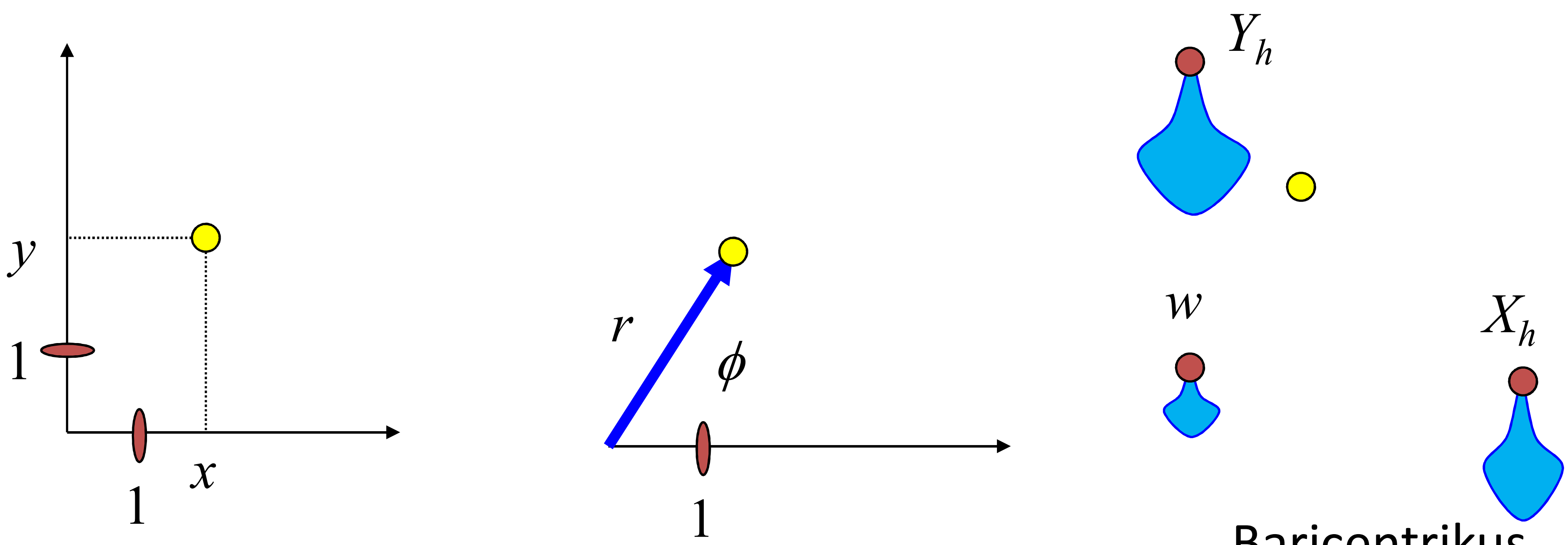
<u>Euklideszi geometria axiómái:</u>

1. Két pont meghatároz egy egyenest.
2. Egy egyenesnek van legalább két pontja.
3. Ha *a* egy egyenes, A pedig egy, nem az egyenesen lévő pont, akkor egyetlen olyan egyenes létezik, amely átmegy A-n és nem metszi a-t.
4. Átmozgatható (egybevágó) dolgok mérete megegyező
5. A részek méretének összege az egész mérete
6. …

Mindent számmal: Analitikus geometria



Pontok definíciója



Descartes

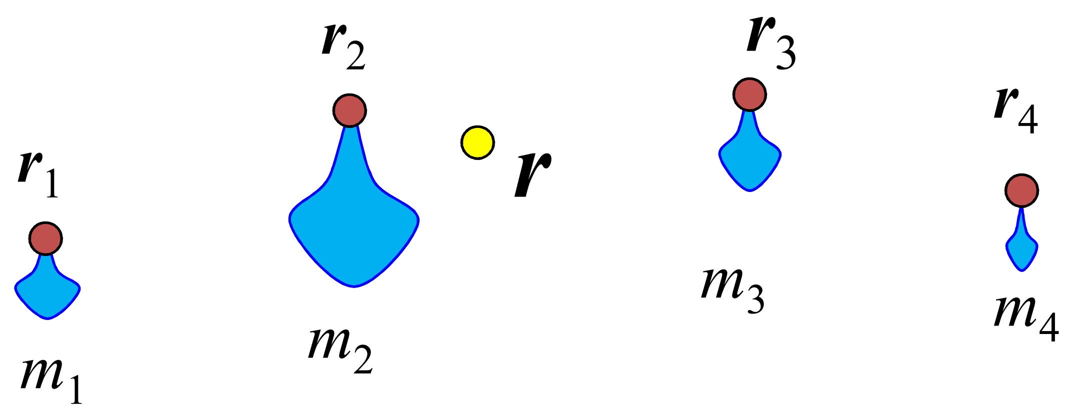
Polár

Baricentrikus
Homogén

<u>Számokkal!</u>

1. Koordinátarendszer (=referencia geometria)
2. Koordináták(=mérés)

Pontok kombinálása

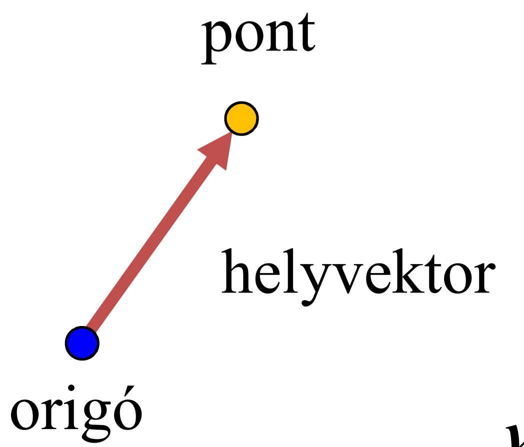


- $\boldsymbol{r}$ az $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$ pontok kombinációja
- Súlyok a baricentrikus koordináták
- Ha a súlyok nem negatívak: <u>konvex kombináció</u>
- Konvex kombináció a konvex burkon belül van
- Egyenes (szakasz) = két pont (konvex) kombinációja
- Sík (háromszög) = három pont (konvex) kombinációja

Vektor

- <u>Vektor = eltolás</u>: $\boldsymbol{v}$
- Irány és hossz ($|\boldsymbol{v}|$)
- Helyvektor

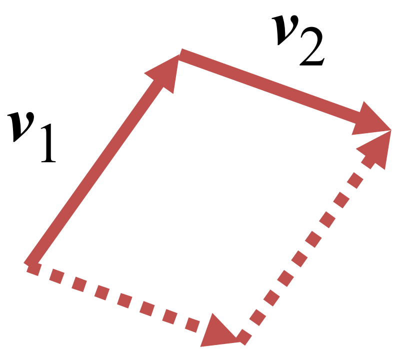
  DE vektor ≠ pont !!!



- Vektor összeadás

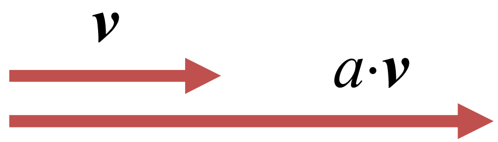
  $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ (kommutativ, asszoc.)

  $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_2$ (van inverz)



- Skálázás (skalárral szorzás)

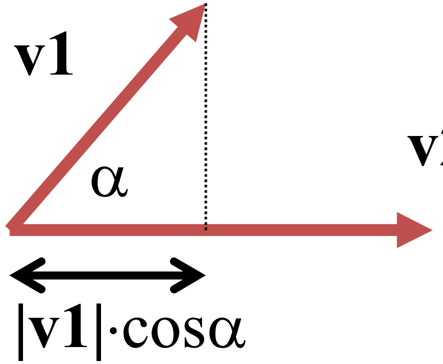
  $\boldsymbol{v}_1 = a \cdot \boldsymbol{v}$ (disztributív)



Skalár (dot, belső) szorzat

- Definíció

  $\mathbf{v1} \cdot \mathbf{v2} = |\mathbf{v1}| \cdot |\mathbf{v2}| \cdot \cos\alpha$



- Jelentés

  <u>Egyik vektor vetülete a másikra</u> * másik hossza

- Tulajdonság

  <u>**Nem asszociatív!!!**</u>

  Kommutatív

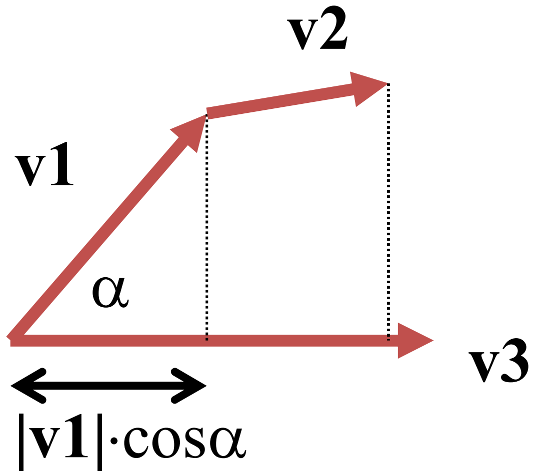
  $\mathbf{v1} \cdot \mathbf{v2} = \mathbf{v2} \cdot \mathbf{v1}$

  Disztributív az összeadással

  $\mathbf{v3} \cdot (\mathbf{v2} + \mathbf{v1}) = \mathbf{v3} \cdot \mathbf{v2} + \mathbf{v3} \cdot \mathbf{v1}$

  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$

  Két vektor merőleges ha a skalárszorzatuk zérus

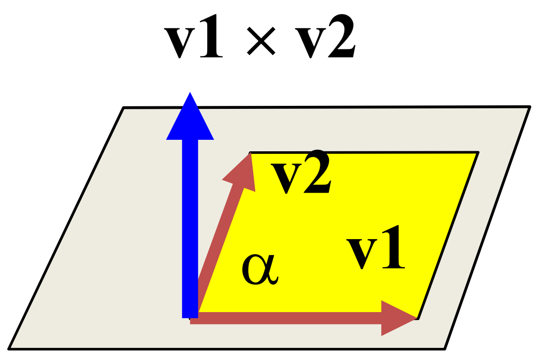


Vektor (kereszt) szorzat

- Definíció

  $|\mathbf{v1} \times \mathbf{v2}| = |\mathbf{v1}| \cdot |\mathbf{v2}| \cdot \sin\alpha$

  Merőleges, jobb kéz szabály



- Jelentés

  <u>Terület és merőleges vektor</u>,

  (Egyik vektor vetülete a másikra merőleges síkra + 90 fokos elforgatás) * másik hossza

- Tulajdonságok

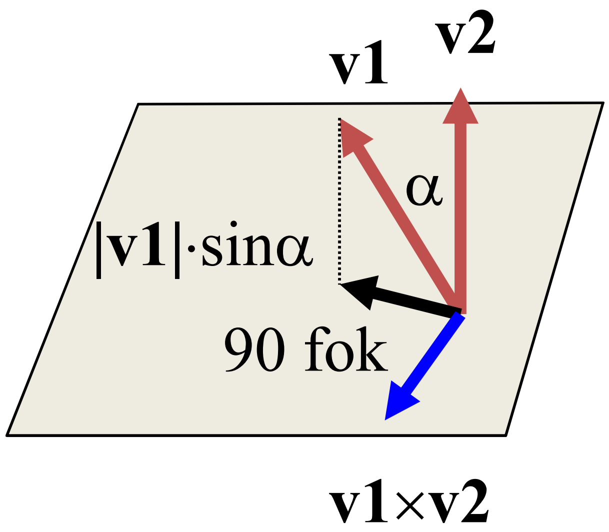
  <u>Nem asszociatív!!!</u>

  Nem kommutatív: Antiszimmetrikus

  $\mathbf{v1} \times \mathbf{v2} = - \mathbf{v2} \times \mathbf{v1}$

  Disztributív az összeadással

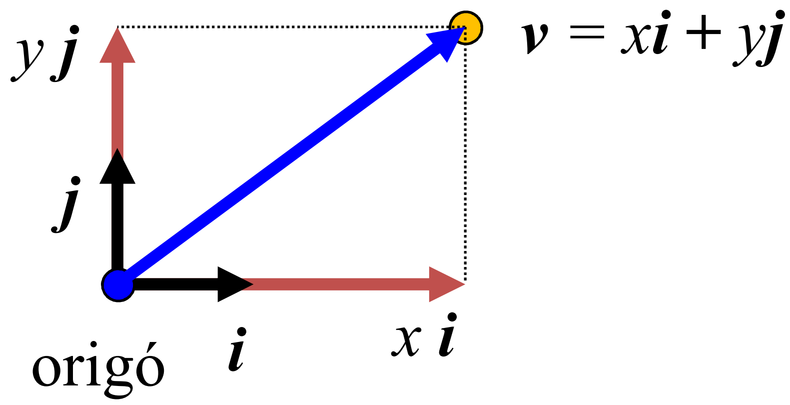
  $\mathbf{v3} \times (\mathbf{v2}+\mathbf{v1}) = \mathbf{v3} \times \mathbf{v2} + \mathbf{v3} \times \mathbf{v1}$



Két vektor párhuzamos ha vektorszorzatuk zérus.

Descartes koordináta rendszer

- Egyértelmű ($x = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{i}$, $y = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{j}$)
- Operációk koordinátákban



Összeadás:

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (x_1+x_2)\boldsymbol{i} + (y_1+y_2)\boldsymbol{j}$$

Skalár szorzat:

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j}) \cdot (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j}) = (x_1 x_2 + y_1 y_2)$$

Vektor szorzat:

$$\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) \times (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) =$$
$$(y_1 z_2 - y_2 z_1)\,\boldsymbol{i} + (x_2 z_1 - x_1 z_2)\,\boldsymbol{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\boldsymbol{k}$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

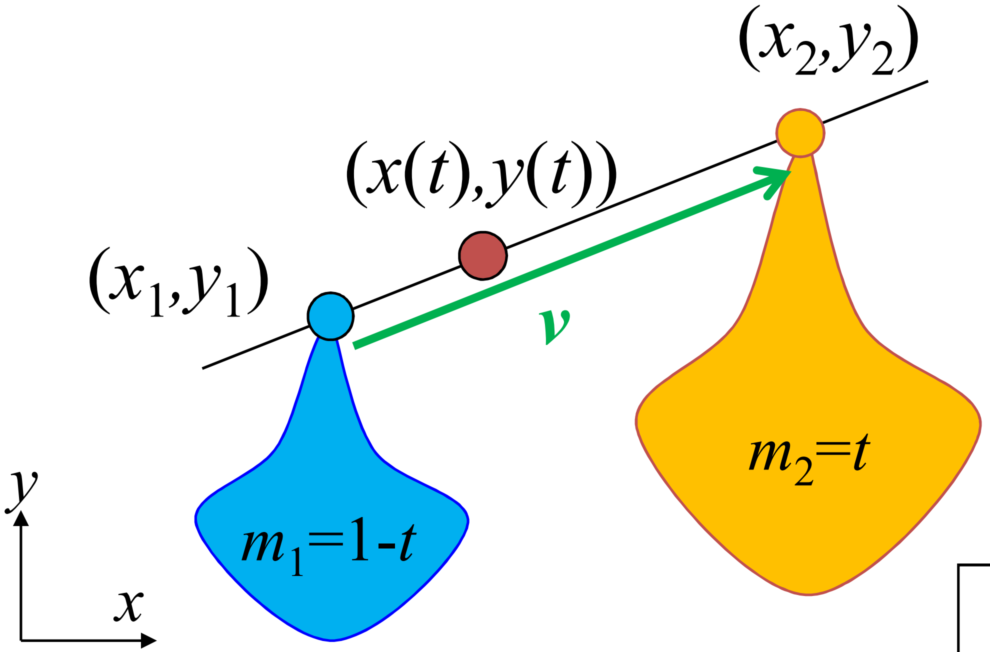
Hossz:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Vektor/Pont/Szín osztály

```
struct vec3 {
   float x, y, z;

   vec3(float x0, float y0, float z0) { x = x0; y = y0; z = z0; }

   vec3 operator*(float a) { return vec3(x * a, y * a, z * a); }

   vec3 operator+(const vec3& v) { // vektor, szín, pont + vektor
        return vec3(x + v.x, y + v.y, z + v.z);
   }
   vec3 operator-(const vec3& v) { // vektor, szín, pont - pont
        return vec3(x - v.x, y - v.y, z - v.z);
   }
   vec3 operator*(const vec3& v) {
        return vec3(x * v.x, y * v.y, z * v.z);
   }
   float Length() { return sqrtf(x * x + y * y + z * z); }
};

float dot(const vec3& v1, const vec3& v2) {
   return (v1.x * v2.x + v1.y * v2.y + v1.z * v2.z);
}

vec3 cross(const vec3& v1, const vec3& v2) {
   return vec3( v1.y * v2.z - v1.z * v2.y,
                v1.z * v2.x - v1.x * v2.z,
                v1.x * v2.y - v1.y * v2.x);
}
```

Egyenes (szakasz) mint két pont kombinációja



$$x(t)=x_1(1\text{-}t)+x_2t$$
$$y(t)=y_1(1\text{-}t)+y_2t$$

Fizikából

$$\Sigma\,(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r})\times m_i\boldsymbol{g}=0$$

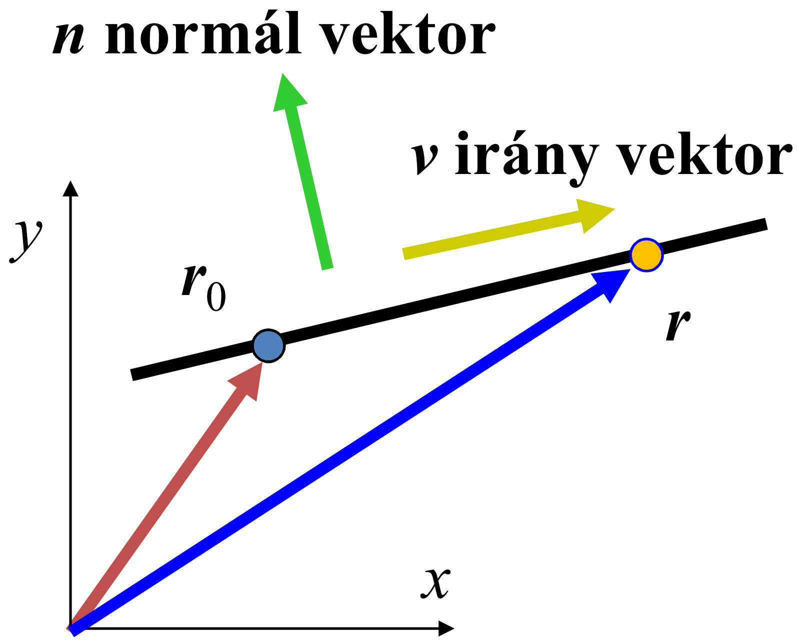
$$\boxed{\boldsymbol{r}=\frac{\Sigma\, m_i\boldsymbol{r}_i}{\Sigma\, m_j}}$$

Paraméteres egyenlet

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{v}\,t,\quad t\in(-\infty,\infty)$$

$$x(t)=x_1+v_x\,t$$
$$y(t)=y_1+v_y\,t$$

2D egyenes



Implicit egyenlet

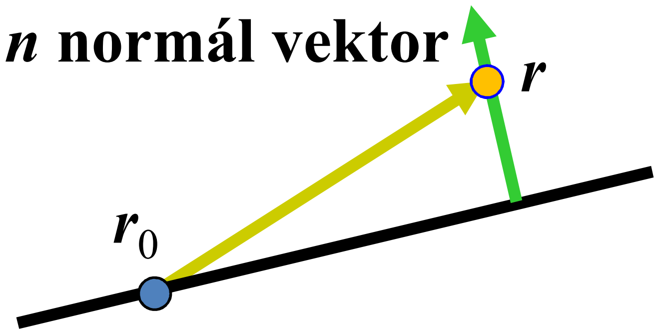
$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0$$

$$n_x(x-x_0)+n_y(y-y_0)=0$$

$$ax+by+c=0$$

$$(x,y,1)\cdot(a,b,c)=0$$

<u>2D egyenestől mért távolság:</u>

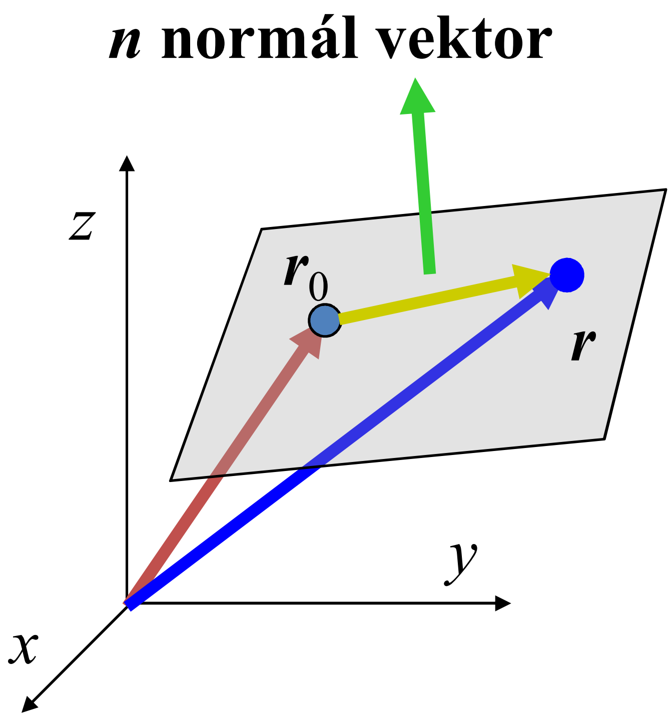


$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ = Vetület ***n***-re * az ***n*** hossza

Ha ***n*** egységvektor:

$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ az előjeles távolság!

Sík



$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0$$

$$n_x(x-x_0) + n_y(y-y_0) + n_z(z-z_0) = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$(x, y, z, 1) \cdot (a, b, c, d) = 0$$

Ha $\boldsymbol{n}$ egységvektor:

$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$ a síktól mért távolság!

Vektor/Pont/Sík/RGBA osztály

```
struct vec4 {
   float x, y, z, w;
   vec4(float x0, float y0, float z0, float w0) {
        x = x0; y = y0; z = z0;
        w = w0; // vektor:0, pont: 1, sík: d, RGBA: Opacitás
   }
   vec4 operator*(float a) { return vec4(x * a, y * a, z * a, w * a); }
   vec4 operator+(const vec4& v) { // vektor, szín, pont + vektor
        return vec4(x + v.x, y + v.y, z + v.z, w + v.w);
   }
   vec4 operator-(const vec4& v) { // vektor, szín, pont - pont
        return vec4(x - v.x, y - v.y, z - v.z, w - v.w);
   }
   vec4 operator*(const vec4& v) {
        return vec4(x * v.x, y * v.y, z * v.z, w * v.w);
   }
   float Length() { return sqrtf(x * x + y * y + z * z + w * w); }
};

float dot(const vec4& v1, const vec4& v2) {
   return (v1.x * v2.x + v1.y * v2.y + v1.z * v2.z + v1.w * v2.w);
}
vec4 cross(const vec3& v1, const vec3& v2) {
   return vec4(v1.y * v2.z - v1.z * v2.y,
               v1.z * v2.x - v1.x * v2.z,
               v1.x * v2.y - v1.y * v2.x, 0);
}
```

SSE, 3Dnow!

```
struct vec4 {
    float x, y, z, w;
public:
    vec4 operator+( const vec4& v ) {
        __declspec(align(16)) vec4 res;
        __asm {
            mov         esi, this
            mov         edi, v
            movups      xmm0, [esi]    ; unaligned
            movups      xmm1, [edi]
            addps       xmm0, xmm1
            movaps      res, xmm0      ; aligned
        }
        return res;
    }
};
```

Kör a síkon

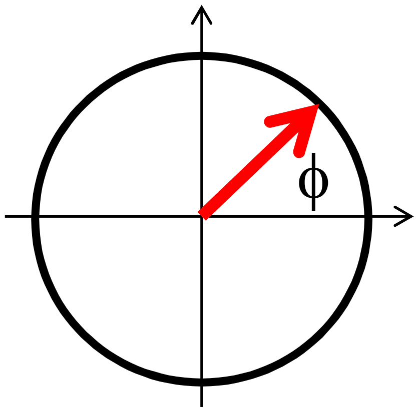
Implicit egyenlet:

Azon $\boldsymbol{r}(x, y)$ pontok mértani helye, amelyek a $\boldsymbol{c}(c_x, c_y)$ középponttól R távolságra vannak:

$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{c}| = R \quad \leftrightarrow \quad (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{c})^2 = R^2 \quad \leftrightarrow \quad (x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 = R^2$$

Paraméteres egyenlet:

A $\sin(\phi)$ és $\cos(\phi)$ definíciója:



$$\boxed{\begin{aligned} x(\phi) &= c_x + R\cos(\phi) \\ y(\phi) &= c_y + R\sin(\phi) \end{aligned}}$$

Ellenőrző kérdések

- Kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás mely vektorműveletekre érvényes? Bizonyítás?
- 2D: Írd fel az egyenletet!
  - A parabola implicit egyenlete (azon pontok mértani helye, amelyek egyenlő távolságban vannak a $\boldsymbol{p}$ ponttól és az ($\boldsymbol{r}0$, $\boldsymbol{n}$) egyenestől),
  - Az ellipszis (a $\boldsymbol{p}1, \boldsymbol{p}2$ pontoktól mért távolságösszeg = C)
  - Koordinátatengelyekkel párhuzamos tengelyű ellipszis paraméteres egyenlete
- 3D: Írd fel az egyenletet!
  - Gömb, henger és paraboloid implicit egyenlete
  - Két kitérő egyenes ($\boldsymbol{r}1$, $\boldsymbol{v}1$) és ($\boldsymbol{r}2$, $\boldsymbol{v}2$) távolsága
  - Azon pontok halmaza, amelyek $\boldsymbol{p}1, \boldsymbol{p}2$ pontoktól mért távolságnégyzet összege = C.