133 399

dr. Ferenczy Miklós

VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS
ÉS
ALKALMAZÁSA

Feladatgyűjtemény

NEMZETI TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST

EGYETEMI TANKÖNYV

Megjelent a Művelődési és Közoktatási Minisztérium támogatásával, a Felsőoktatási Pályázatok Irodája által lebonyolított felsőoktatási tankönyv-támogatási program keretében

Bírálta:

DR. SZABADOS TAMÁS
egyetemi docens

DR. SZÉP GABRIELLA
egyetemi adjunktus

ISBN 963 18 9065 1

Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.
A kiadásért felel: dr. Ábrahám István vezérigazgató
Raktári szám: 44 581
Felelős főszerkesztő: Palojtay Mária
Felelős szerkesztő: Balassa Zsófia
Műszaki szerkesztő: Görög Istvánné
Terjedelem: 36,47 (A/5) ív
Első kiadás, 1998
Szedés és tördelés: HEXACO GNH Kft.
Készült a PROSPEKTKOP Nyomdában

Tartalom

A feladatgyűjtemény használatáról
(előszó)

A feladatgyűjtemény elsősorban az egyetemeken, főiskolákon Valószínűségszámítást hallgatóknak, valamint a matematika alkalmazóinak ajánlható, de haszonnal forgathatják középiskolások is.

A gyűjtemény több tekintetben nyújt újat a hasonló példatárakhoz képest. Címének megfelelően, egyrészt súlyt helyez az alkalmazásokra (a matematikai modellalkotásra), témakörönként különválasztva szerepelnek az alkalmazást igénylő, illetve az elméleti feladatok. Másrészt, szintén témakörönként, számítógépes szimulációs feladatok találhatók, illusztrálva azt, hogyan használhatjuk fel a modellalkotáshoz a számítógépet. Az elméleti tudást a fejezeteket záró ellenőrző kérdésekkel tesztelhetjük.

A feladatgyűjtemény fejezetei általában öt részre tagoltak. A fejezeteket egy-egy rövid *összefoglaló* vezeti be, ahol emlékeztetőül sémákat sorolunk fel. Hangsúlyozzuk, hogy ezen összefoglalók nem helyettesítik az elméleti alapokat. A fejezetek első pontjainak, a *Gyakorlófeladatoknak* a feldolgozása (*e sorozatokat -val jelöltük*) a fogalmak első tanulásakor alapozásul ajánlható (pl. házi feladatként). Minden gyakorlófeladathoz találhatók a Megoldások részben megoldások. Az első pont felépítését tükrözi a fejezetek harmadik pontja, a *Vegyes feladatok* (*e sorozatokat -val jelöltük*), ahol feladatok válogatásával jártasságunk egy-egy témában elmélyíthető. A fejezetek második pontjaiban szerepelnek a *Számítógépes szimulációs és empirikus statisztikai feladatok (ezeket jelöli).* A fejezetek negyedik pontja tartalmazza az *Ellenőrző kérdéseket* (*e sorozatokat -val jelöltük*). E kérdésekre a helyes válaszok megtalálhatók a Megoldásoknál.

A példatár felhasználóját az alkalmazott valószínűségszámítás (alkalmazott matematika) gyakorlatának elsajátításában kívánja segíteni. Nyilvánvaló, hogy a matematikát alkalmazónak egyaránt jártasnak kell lennie az éppen alkalmazott matematikai elméletben és azon hétköznapi jelenségeket illetően, amelyekre az elméletet alkalmazzuk, jelen esetben ez a véletlen jelenségek köre. Tudnunk kell e két szintet különválasztani a modellalkotási tevékenység érdekében, ugyanakkor nyitottnak lenni mindkét irányban. Ezért választottuk külön a „tiszta" elméleti matematikára vonatkozó feladatsorozatokat (*e sorozatokat* *-val jelöltük*), valamint az alkalmazást, valamilyen szintű matematikai modellezést igénylő feladatsorozatokat (*e sorozatokat* *-val jelöltük*). Hasonlóan csoportosítottuk a szükséges előismereteket a fejezetek elején: *-val jelöltük* azokat a fogalmakat, amelyek a matematikai elmélethez sorolhatók, és *-val jelöltük* azokat az ismereteket, amelyek az alkalmazáshoz, modellalkotáshoz szükségesek. Mindezt annak vállalásával tesszük, hogy néha ez a különválasztás mesterséges.

Az elméleti matematikának az a területe, amelyet a klasszikus valószínűségszámítás elsősorban felhasznál, a mértékelmélet. A mértékelmélet a matematikai analízisen belül egyrészt egy eredeti szemléletet jelent, másrészt a klasszikus analízis jelentős általánosításának tekinthető. A mértékelméletet illetően azt a középutat választottuk, hogy a klasszikus analízis általánosításától eltekintettünk, és csupán a bevezető analízis előadások törzsanyagának ismeretét feltételezzük (például nem korlátozzuk az eloszlások értelmezési tartományát σ-algebrákra, csak viszonylag egyszerű függvényeket használunk, melyekkel kapcsolatos valószínűségek léteznek, és Riemann- (improprius) integrálokat használunk Lebesgue-integrálok helyett). Mindez nem történik a precizitás rovására, viszont a *mértékelméleti szemlélet megalapozható.* Továbbá a szemléletesség és könnyebb érthetőség kedvéért a mértékelméleti fogalmakat már valószínűségi terminológiával használjuk (pl. mérték, integrál, mérhető függvény helyett valószínűségről, várható értékről, valószínűségi változóról beszélünk), ez a valószínűségszámítási irodalomban elterjedt gyakorlat a mértékelméletet illetően.

A minden fejezetben elkülönítve található *számítógépes szimulációs, empirikus statisztikai feladatok* szerepe, hogy a hétköznapi életben előforduló véletlen jelenségek természetét és a számítógépes alkalmazásokat jobban megismerjük. A számítógép lehetőséget ad nagyszámú véletlen kísérlet elvégzésére és az empirikus adatok rendszerezésére rövid idő alatt, ugyanakkor lehetőséget ad arra is, hogy elméleti modellünket azonnal szembesítsük a kísérleti eredményekkel. Így *a számítógép a modellalkotás folyamatának is fontos részéve válhat.*

A feladatgyűjtemény a Budapesti Műszaki Egyetem Matematika Intézetében, a Villamosmérnöki és Informatikai Karon Valószínűségszámítást oktató csoport sokéves tapasztalatára és szellemiségére építve jött létre, csakúgy, mint Vetier András Szemléletes mérték- és valószínűségelmélet c. tankönyve (Tankönyvkiadó, 1991). A feladatgyűjtemény számos olyan eredeti feladatot, didaktikai ötletet tartalmaz, amely e csoport közreműködőitől származik. Különösen kiemelendő Vetier András és Szabados Tamás hozzájárulása a példatárhoz, de sok szép feladat ered Győrffy Judittól és Ablonczy Pétertől is. Köszönet illeti a csoport valamennyi jelenlegi és volt tagját azért, hogy a példatár létrejöhetett. Köszönöm a lektoroknak, Szabados Tamásnak és Szép Gabriellának gondos munkájukat. Köszönöm hallgatóimnak hasznos észrevételeiket, külön köszönet illeti Hertz Istvánt, aki nagyon sokat segített a példaanyag és a megoldások végleges formára hozásában. Előre is köszönöm a feladatgyűjtemény felhasználóinak azt, ha kapcsolódó bármilyen észrevételüket hozzám eljuttatják a BME Matematika Intézetébe (e-mail: ferenczi@math.bme.hu).

A SZERZŐ

FELADATOK

I. Klasszikus képlet

(i) Tételezzük fel, hogy egy kísérletnek n különböző eredménye lehetséges és ezek egyformán valószínűnek tekinthetők. Ekkor annak valószínűsége, hogy az n eset közül előre rögzített k darab eset valamelyike bekövetkezik: $\frac{k}{n}$.

(ii) Kombinatorikai segédeszközök:
Sorbarendezési (permutációs) feladat megoldása: n különböző dolgot $n!$-féleképpen lehet sorbarendezni.
Kiválasztási (kombinációs) feladat megoldása: n különböző dologból egyszerre k különböző dolgot $\binom{n}{k}$ $\left(\text{azaz } \frac{n!}{k!(n-k)!}\right)$-féleképpen lehet kiválasztani.

I.1. Gyakorlófeladatok

1. Egy kör alakú asztalnál 5 férfi és 5 nő vacsorázik. Azt látjuk, hogy nincs olyan nő, aki nő mellett ülne. Ezt mennyire tulajdonítsuk a véletlennek, ha
a) a 10 személy találomra foglalt helyet?
b) tudjuk, hogy a házigazdának az volt a kérése, hogy ne üljenek azonos neműek egymás mellett?
c) tudjuk, hogy 5 házaspár vacsorázik és a házaspárok tagjai egymás mellett ülnek?
d) az *a)* esetben, ha az asztal félkör alakú, az átmérőjével a falnál?

2. Két fekete dobókockát feldobunk és azt vizsgáljuk, hogy mi a valószínűsége annak, hogy a két kockán ugyanazt a számot dobjuk. Valaki a következőképpen okoskodik: „Vagy azonosat dobunk – ez 6 lehetőség, vagy különbözőeket – ez $\binom{6}{2} = 15$ lehetőség. Ebből kedvező 6 eset. Tehát a kérdezett valószínűség $\frac{6}{21}$, azaz $\frac{2}{7}$." Helyes-e ez a gondolatmenet? Változik-e az eredmény, ha a dobókockák megkülönböztethetőek?

3. Véletlenül és azonos esély szerint választunk a $(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13)^2$ szám azon osztói közül, melyek prímfelbontása két tényezőt tartalmaz (multiplicitást is beleértve). Mi a valószínűsége, hogy négyzetszámot választunk?

4. Mi a valószínűsége, hogy egy lottószelvényt kitöltve pontosan k találatunk lesz ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$)?

5. Mi a valószínűsége, hogy egy szelvénnyel fogadva legalább hármas találatunk lesz az ötös lottón?

Valaki így gondolkozik: Az összes húzási lehetőségek száma $\binom{90}{5}$. Ezek közül a kedvezőek azok, amelyeknél három szám a kihúzottak közül való, ez $\binom{5}{3}$-féleképpen lehetséges, a másik két számot viszont a fennmaradt 87 közül tetszőlegesen választhatjuk. Így a keresett valószínűség: $\dfrac{\binom{5}{3}\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}}$. Helyes-e ez a gondolatmenet?

6. Dobókockával dobálunk. Mi a valószínűsége annak, hogy a harmadik ötöst a nyolcadikra dobjuk?

7. Mi a valószínűsége annak, hogy k számú véletlenszerűen választott ember között van legalább két olyan, akiknek a születésnapja az évnek ugyanarra a napjára esik, ha feltételezzük, hogy az emberek az év 365 napján általában egyforma eséllyel születnek? Számolja ki a valószínűség értékét $k = 30$-ra és $k = 60$-ra!

8. Egy vendéglő egyik asztalánál ülő 8 vendég 2 sört, 4 süteményt és 2 kávét rendel. A pincér véletlenszerűen teszi a vendégek elé az ételeket. Mi a valószínűsége, hogy mindenki azt kapja, amit rendelt?

9. Mi a könnyebb: 6 kockával legalább egy darab 1-est vagy 12 kockával legalább két darab egyest dobni?

10. 22 futballistából két csapatot sorsolnak ki véletlenszerűen. Mi a valószínűsége annak, hogy a két legjobb játékos ugyanabba a csapatba kerül?

11. Egy titkárnő íróasztalának bal és jobb fiókjában is tart 50–50 darab céges géppapírt, és szükség esetén egyenként, a két fiókból $\frac{1}{2}$ – $\frac{1}{2}$ valószínűséggel vesz elő papírt. Mi a valószínűsége, hogy a hetvenedik alkalommal fordul elő először, hogy kiválasztott fiókjában nem talál géppapírt?

12. Legalább hány szabályos pénzdarabot kell feldobni ahhoz, hogy 0,9-nél nagyobb valószínűséggel legyen közöttük *fej* dobás?

13. Ha egy háromgyermekes családban az egyik gyerek lány, mi a valószínűsége, hogy van fiú is a családban?

14. A 39-et három nemnegatív egész szám összegére bontjuk véletlenszerűen úgy, hogy minden különböző felbontást egyforma valószínűségűnek tekintünk (két felbontás legyen akkor is különböző, ha csak az összeadandók sorrendjében térnek el). Mi a valószínűsége a $13 + 13 + 13$ felbontásnak?

15. Egy 30 fős osztályban 17 lány van. Véletlenszerűen kiválasztanak az osztályból egy 12 fős csapatot egy vetélkedőre. Legyen a csapatba került lányok száma X.

a) $P(X = 7) = ?$

b) Mennyi X legvalószínűbb értéke?

16. Mire tippel, melyik lottószámnál fordul elő leggyakrabban, hogy a kihúzott öt szám közül az a második legnagyobb?

17. Tíz utas szállingózik négy vasúti vagon felé. Egyenként beszállnak a vagonokba, egyenlő, azaz $\frac{1}{4}$ valószínűséggel. Mi az utasok egy „adott elhelyezkedésének" valószínűsége?

Értelmezze az „adott elhelyezkedés" fogalmát annak megfelelően, hogy megkülönböztetjük-e az utasokat, ill. megkülönböztetjük-e a vagonokat! Mind a

négy esetben válasszon egy-egy konkrét elhelyezkedést és határozza meg a valószínűségét!
Ha sem a vagonokat, sem az utasokat nem különböztetjük meg, akkor az 1-2-3-4 vagy a 3-3-2-2 elhelyezkedés valószínűbb?

18. 1000 termék közül 50 selejtes. Találomra kiveszünk tízet. Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztottak közül lesz selejtes, ha
a) visszatevéssel választunk?
b) visszatevés nélkül választunk?

I.2. Szimuláció és statisztika

19. A **17.** feladathoz kapcsolódóan szimulálja adott n-re a tíz utas elhelyezkedéseit a vasúti kocsikban arra az esetre, ha
a) az utasokat megkülönböztetjük, de a vagonokat nem különböztetjük meg;
b) a vagonokat sem különböztetjük meg.
Írassa ki a nyert elhelyezkedéseket és azok relatív gyakoriságát!

20. A **7.** feladathoz kapcsolódóan szimulálja n egyén születésnapjainak dátumait az évben, különböző n-ekre. Regisztrálja, hogy milyen n-ekre ismétlődik valamelyik dátum!

21. Szimuláljon n lottóhúzást, ha k darab szelvénnyel játszunk, minden héten ugyanazokkal a számokkal. Írassa ki, hogy hányszor volt 2, 3, 4, 5 találatunk, és hogy mennyi az összes nyereségünk–veszteségünk (rögzített nyereményeket feltételezve 2, 3, 4, illetve 5 találat esetén). Találjon ki a lottózásra valamilyen előnyösnek tűnő stratégiát és ellenőrizze szimulációval, hogy beválik-e!

22. Szimuláljon 5 lapos pókerleosztásokat, 52 lapos francia kártyából. Határozza meg a különféle speciális leosztások relatív gyakoriságát (pár, két pár, hármas, sor, szín, hármas + pár, négyes, azaz póker, sor + szín) és hasonlítsa össze az elméletileg várttal!

I.3. Vegyes feladatok

23. Két gyerek között üveggolyókat osztunk szét a következőképpen: a golyókat egyenként, pénzfeldobással sorsoljuk ki a gyerekek között egészen addig, amíg mindkét gyerekhez legalább 10 golyó kerül, ekkor abbahagyjuk a sorsolást. Mi a valószínűsége annak, hogy összesen éppen 30 golyót kellett kisorsolnunk?

24. Egy 4 tagú társaságban sorsolással döntik el, hogy ki kit ajándékozzon meg. Ezért mindenkinek a nevét egy-egy cédulára írják, a cédulákat egy kalapba beteszik, és a kalapból mindenki kihúz egy nevet.
a) Mi a valószínűsége annak, hogy lesz olyan ember, aki a saját nevét húzza ki?
b) Feltéve, hogy van olyan ember, aki a saját nevét húzza ki, mi a valószínűsége annak, hogy pontosan egy ilyen ember van?

25. Egy autóparkolóban tíz szomszédos hely van. Tudjuk, hogy hat hely reggel nyolcra már foglalt. Egy odaérkező teherautó csak akkor tud parkolni, ha a négy szabad hely éppen szomszédos. A teherautó-sofőr nyolc óra után azt tapasztalja, hogy nem tud parkolni, és ezt balszerencséjének tudja be. Mennyire volt balszerencséje valójában?

26. Két fekete kockával dobunk. „A kilences és a tízes is kétféleképpen állhat elő a dobott számok összegeként, ezért ugyanolyan valószínű az, hogy tízes összeget dobunk, mint az, hogy kilences összeget." Helyes-e ez az okoskodás?

27. Egy urnában 15 golyó van, 1–15-ig számozva. Hússzor húzunk visszatevéssel az urnából. Mi a valószínűsége, hogy a legnagyobb kihúzott szám a 10-es?

28. Mi a valószínűsége annak, hogy lottóhúzásnál a kihúzott legnagyobb és legkisebb szám különbsége éppen k $(4 \le k \le 89)$?

29. 1000 csavar között 30 selejtes van. Visszatevés nélkül, véletlenszerűen kihúzunk 20 csavart, és a kihúzás sorrendjében megvizsgáljuk őket. Az első 10 csavar jónak bizonyul. Mi a valószínűsége, hogy a teljes 20 elemű mintában 5 selejtes lesz?

30. Legalább hányszor kell feldobni két kockát ahhoz, hogy a dobott számok között $\frac{1}{2}$-nél nagyobb valószínűséggel legyen dupla hatos?

31. Tíz golyót elosztunk egyenként, véletlenszerűen 7 dobozba úgy, hogy bármelyik dobozt egyenlő valószínűséggel választhatjuk minden egyes golyó elhelyezésekor. Mi a valószínűsége, hogy a második dobozba 3 golyó kerül?

32. Mi a valószínűsége annak, hogy a lottón kihúzott öt szám közül a nagyság szerinti középső 50-nél kisebb?

33. Egy urnában piros, fehér és fekete golyók vannak, egyforma valószínűséggel kerültek oda. Azt is tudjuk, hogy az urnában piros golyó 6 van. Annak valószínűsége, hogy fehéret vagy feketét húzunk, $\frac{3}{5}$, annak pedig, hogy pirosat vagy feketét húzunk, $\frac{2}{3}$. Hány fehér golyó van az urnában?

34. Egy sakktáblára találomra felrakunk 8 bástyát. Mi a valószínűsége annak, hogy a bástyák nem ütik egymást?

35. A, B, C és D bridzselnek. Az 52 lapot jól megkeverve, mindegyikük kap 13-at. Mi a valószínűsége annak, hogy mind a négy ász ugyanahhoz a párhoz kerül?

36. Mi a valószínűsége annak, hogy a következő heti lottószámok legnagyobbika kisebb a rákövetkező hét lottószámainak legkisebb számánál?

37. Egy csónakkölcsönzőnek negyven csónakja van. Csónakot egy napra lehet kölcsönözni és a szeszélyes időjárás miatt azonos valószínűségűnek tekinthető a negyven csónak minden részhalmazára, hogy pontosan a hozzá tartozó csónakokat viszik el aznap. Mi a valószínűsége, hogy két adott napon nincs egyetlen olyan csónak sem, amelyet mindkét napon kikölcsönöztek volna (a két napon a kölcsönzéseket függetlennek tekintjük egymástól)?

38. Egy dobozba 9 egyforma méretű cédulát tettünk. A cédulákra az 1, 2, ..., 9 számokat írtuk. Visszatevéssel háromszor húzunk és feljegyezzük a kihúzott számokat. Mi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott számok közül az első egyenlő a másik kettő összegével?

39. Egy 100 fővel dolgozó varrodában az egyik lány elmond egy pletykát a másik lánynak. Az továbbadja egy harmadiknak, és így tovább. A pletyka meghallgatója minden egyes alkalommal egyenletes eloszlás szerint választódik ki a többi 99 lány közül. Mi a valószínűsége annak, hogy a pletykát 77-szer továbbadják anélkül, hogy
a) visszakerülne az elindítójához?
b) akár egyetlen lány is többször hallaná?

40. Egy héten az ötös lottón két szelvényt tíz különböző számmal töltünk ki. Mi a valószínűsége, hogy
a) mindkét szelvényen nulla találatunk lesz?
b) egyik szelvénnyel sem nyerünk?

41. Négy levélládába tíz levelet helyezünk el egyesével véletlenszerűen. Mi a valószínűsége, hogy pontosan kettő marad üresen?

42. Egy aktatáska zárja három számjegyű kóddal működik. Egy illetéktelen próbálkozik a kinyitással. Mi a valószínűsége annak, hogy öt próbálkozással nem tudja a táskát kinyitni, ha feltesszük, hogy mindig más kombinációval próbálkozik?

43. Két dobókockát egyszerre feldobunk, majd megismételjük a dobást. Mi a valószínűsége, hogy az első dobás kimenetele megismétlődik, ha a két dobókocka
a) megkülönböztethető?
b) nem megkülönböztethető?

II. A valószínűség és feltételes valószínűség általános tulajdonságai

(i) Az 1-*re normált mérték* – mostantól *valószínűség* – axiómái:
Minden olyan $A \subseteq \Omega$ halmazra (Ω rögzített), amelyre a P valós halmazfüggvény értelmezett:

(1) $$0 \le P(A) \le 1,$$

(2) $$P(\Omega) = 1,$$

(3) $$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \quad \text{ha} \quad A_i A_j = 0 \qquad (i \ne j).$$

Következmények:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A),$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

(ii) *Feltételes valószínűség* és néhány tulajdonsága:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad \text{ha} \quad P(B) > 0.$$

Speciálisan: $P(A \mid \Omega) = P(A)$.
Szorzástétel:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A \mid B),$$

és általában:

$$P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2) \ldots P(A_n \mid A_1 \ldots A_{n-1}).$$

Halmazok *függetlenségének* szükséges-elégséges feltétele, a független halmazokra vonatkozó szorzásszabály:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazok *teljes függetlenségének* szükséges-elégséges feltétele:

$$P(A_{i1}A_{i2} \ldots A_{ik}) = P(A_{i1})P(A_{i2}) \ldots P(A_{ik}),$$

$k = 1, 2, \ldots, n$-re és minden különböző $i_1, i_2, \ldots, i_k$-ra.

(iii) *Teljes valószínűség tétele:*

$$P(B) = \sum_i P(A_i)P(B \mid A_i),$$

ahol $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ teljes eseményrendszer (partíció), azaz

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \quad \text{és} \quad A_i A_j = \varnothing, \quad \text{ha } i \ne j.$$

Bayes-tétel:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)}{P(B)} P(B \mid A).$$

Speciálisan:

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum_i P(A_i)P(B \mid A_i)},$$

ahol $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ teljes eseményrendszer és j rögzített.

(iv) Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ egy Ω halmaz részhalmazainak olyan rendszere, amely megszámlálható unióra, komplementerre zárt és Ω-t tartalmazza (Boole

σ-halmazalgebra a halmazműveletekre nézve). Ekkor Ω részhalmazainak az $\mathcal{A}$ rendszerén értelmezett P valós halmazfüggvény egy normált *eloszlás* – mostantól *valószínűségeloszlás* – az Ω-n ($\mathcal{A}$ -n), ha teljesíti a valószínűség három axiómáját. Az $\mathcal{A}$-beli halmazokat szoktuk *eseményeknek* is nevezni.

(v) Legyen P egy eloszlás az $\Omega = \{0, 1\}$ halmazon. A nullákból és egyesekből álló n-dimenziós (minta-)tér minden pontjához hozzárendelhető $\{0, 1\}$-en azon valószínűségeloszlás, melynél az $\{1\}$ valószínűsége az 1 relatív gyakorisága az illető sorozatban. Ez az eloszlás a tekintett sorozathoz tartozó *indikátor tapasztalati eloszlás*. A nagy számok törvényeinek következményeként a tapasztalati eloszlás konvergál P-hez, ha n tart végtelenhez, 1 valószínűséggel.

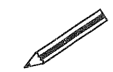
(vi) Ha egy jelenség bekövetkezésére nézve módunk van akárhány független, közel azonos körülmények között végrehajtott kísérletet elvégezni, akkor az esemény bekövetkezésének esélyét a jelenséget reprezentáló halmazhoz (eseményhez) rendelt, 0 és 1 közötti valós számmal, a valószínűségértékkel jellemezhetjük. Ugyanazon kísérletsorozatban több jelenséget egyszerre is megfigyelve, a jelenségeket reprezentáló halmazok (események) valószínűségei kielégítik a valószínűség axiómáit.

(vii) Egy kísérletsorozatban a kísérleti feltételeket megváltoztatva az adott jelenség bekövetkezésének esélye megváltozik. Ha az új kísérleti feltételt a B halmaz (esemény) reprezentálja, akkor a jelenség esélye a B-re vonatkozó feltételes valószínűséggel jellemezhető. $P(A \mid \Omega) = P(A)$ miatt minden valószínűség tekinthető feltételes valószínűségnek az Ω „biztos eseményre" (a kiindulási kísérleti feltételekre) vonatkozóan. Akkor használunk feltételes valószínűséget, ha a kísérlet feltételei az Ω reprezentálta alapfeltevésekhez képest megváltoznak. Formális logikai szempontból $P(A \mid B)$ azt jelenti, hogy a $B \to A$ következtetéshez rendelünk valószínűséget.

(viii) A valószínűségekre vonatkozó szorzásszabályt úgy alkalmazzuk, hogy a feltételes valószínűségek ismeretében következtetünk a bal oldali szorzat esemény

ismeretlen valószínűségére. A független eseményekre vonatkozó szorzásszabály ennek speciális esete. A teljes valószínűség tételt bizonyos értelemben mint a kombinatorikai esetszétválasztás valószínűségi megfelelőjét alkalmazzuk. A Bayes-tétel az induktív következtetés („visszafelé következtetés") egyik változataként interpretálható.

(ix) Ha egy kísérlettel kapcsolatos, lehetőleg minél több jelenség valószínűségeit egyszerre kívánjuk tekinteni, azaz a kísérlettel kapcsolatos „valószínűségi viszonyokat" kívánjuk áttekinteni, akkor a jelenséghez tartozó valószínűségeloszlást kell vizsgálni. Az $\Omega = \mathbf{R}^1$ és $\Omega = \mathbf{R}^2$ esetekre ezt későbbi fejezetekben részletezzük.



II.1. Gyakorlófeladatok

1. Adjon meg valószínűségeket, amelyek ismeretében következtethetünk $P(A \mid B)$ értékéből $P(B \mid A)$ értékére! (*Induktív* következtetés valószínűségi általánosítása.)

2. Mutassa meg, hogy rögzített A halmazra, ha a $P(B \mid \overline{A})$ valószínűség nagy (közel van 1-hez), akkor a $P(A \mid \overline{B})$ valószínűség is nagy. (Indirekt következtetés valószínűségi általánosítása.)

3. Igazolja a valószínűségszámítás axiómáiból, hogy ha $P(B \mid A) = 1$ és $P(A) = 1$, akkor $P(B) = 1$. Melyik klasszikus logikai következtetésnek felel meg ez az állítás?

4. A és B független halmazok, amelyek valószínűsége $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}4$. Mennyi a $P(A \mid A \cup B)$ feltételes valószínűség?

5. Bizonyítsuk be, hogy ha $P(A) = 0{,}7$ és $P(B) = 0{,}8$, akkor $P(A \mid B) \geq 0{,}625$.

6. Igazolja, hogy

a) $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A}\,\overline{B})$;

b) $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$;

c) $P(A \cup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P(AB \mid C)$.

7. Adjon példákat a síkon mint alaphalmazon

a) halmazfüggvényekre;

b) pontfüggvényekre!

II.1.1. Szorzástétel, függetlenség

8. Egy vonósnégyes próbáján vagyunk. H, M, B és C jelentse rendre azon eseményeket, hogy az első hegedű, a második hegedű, a brácsa és a cselló játszik. Fejezze ki H, M, B és C segítségével a következő eseményeket:

a) csak a cselló játszik;

b) a két hegedű játszik, de a brácsa és a cselló nem;

c) legalább egy hangszer játszik;

d) egyetlen hangszer játszik;

e) legfeljebb egy hangszer játszik;

f) a cselló játszik és a többi hangszer közül legalább egy játszik!

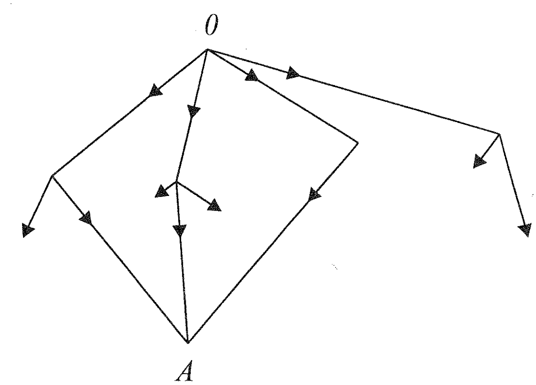
9. Vegyszerrel szúnyogirtást végeznek. Az első permetezés után a szúnyogok 80%-a elpusztul, de az életben maradottakban annyi ellenálló képesség fejlődik ki, hogy a második permetezéskor már csak az életben maradt szúnyogok 40%-a pusztul el, a harmadik irtásnál pedig csak 20%-uk.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy egy szúnyog túléli mindhárom permetezést?

b) Feltéve, hogy egy szúnyog túlélte az első permetezést, mi a valószínűsége annak, hogy a másodikat és a harmadikat túléli? Alkalmazható-e a független eseményekre vonatkozó szorzástétel?

10. Oldja meg a következő feladatot szorzásszabály segítségével: Egy fogadásra 5 angol, 3 görög és 2 bolgár diplomata érkezik egyenként. Mi a valószínűsége, hogy az első három vendég érkezési sorrendje: angol-angol-bolgár?

11. Mi a valószínűsége, hogy egy vándor az alábbi ábra O pontjából indulva az A pontba jut, ha minden útelágazásnál bármely továbbvezető utat egyforma valószínűséggel választja, de visszafelé soha nem megy?



12. Két játékos, A és B pingpongoznak egymással. Feltesszük, hogy B kétszer olyan jó játékos, mint A, azaz minden labdamenetet $\frac{2}{3}$ valószínűséggel B, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel A nyer meg. Mint ismeretes, egy játszmát az nyer meg, akinek sikerül legalább két pont előny mellett 21 vagy annál több pontot elérnie. Mi a valószínűsége annak, hogy a játszmát A nyeri meg, ha a játszma állása B javára 20 : 19?

13. Tegyük fel, hogy egy város vízellátása 0,98 valószínűséggel akadálytalan valamely napon. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy év alatt pontosan három napon nem lesz akadálytalan a vízellátás, függetlenséget feltételezve az egyes napok vízellátásai között?

14. Két út vezet A városból B városba és szintén két út B-ből C városba. Mind a négy út egymástól függetlenül, p valószínűséggel járhatatlan a hó miatt. Feltéve, hogy A-ból C-be nincs járható út, mi a valószínűsége, hogy A-ból B-be van járható út?

15. Valaki hetenként egy lottószelvénnyel játszik. Legalább hány hétig kell játszania ahhoz, hogy a hármas, négyes vagy ötös találat bekövetkezésének valószínűsége az időszak alatt nagyobb legyen, mint 0,5 ?

16. Valaki a céltábla 10-es, 20-as, 30-as, 50-es körgyűrűibe rendre $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel talál. Mi a valószínűsége, hogy 15 lövésből 5 a 10-es, 3 a 20-as, 4 a 30-as, 3 az 50-es gyűrűbe talál?

17. Egy szabályos dobókockát addig dobunk fel újra meg újra, amíg először hatost nem dobunk. Mi a valószínűsége, hogy eközben pontosan egy egyest dobunk?

18. Oldja meg az előző fejezet **6.** feladatát a szorzásszabály segítségével!

19. Három céllövő ad le egy-egy lövést egy céltáblára, egymástól függetlenül. Az elsőnél a találat valószínűsége $\frac{4}{5}$, a másodiknál $\frac{3}{4}$, a harmadiknál pedig $\frac{2}{3}$. A táblát csak a három lövés után nézik meg, és két találatot észlelnek. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a harmadik nem talált?

20. Egy kör alakú asztalnál 5 házaspár vacsorázik. Mi a valószínűsége, hogy nincs olyan nő, aki nő mellett ül, feltéve, hogy a házigazda a házaspárok tagjait mindenképpen egymás mellé ülteti?

21. Tudjuk, hogy $\frac{2}{3}$ valószínűséggel tartózkodik egy illető kocsmában. Öt kocsma bármelyikében egyenlő valószínűséggel lehet. Négyben már megnéztük, de nem találtuk. Mi a valószínűsége, hogy az ötödikben megtaláljuk? Valaki így gondolkodik: az, hogy az illetőt az ötödikben megtaláljuk, azt jelenti, hogy kocsmában van. Annak a valószínűsége pedig, hogy kocsmában van, $\frac{2}{3}$. Tehát annak valószínűsége, hogy az ötödikben megtaláljuk, $\frac{2}{3}$. Helyes-e ez a gondolatmenet?

22. Egyetlen szelvénnyel lottózom. Számaim között a nagyság szerinti középső szám a 40-es. A következő három esemény bekövetkezése közül melyik növeli jobban az ötösöm esélyét?

a) A sorsoláson az urnából először kihúzott szám a 40-es.
b) A kihúzott számok között szerepel a 40-es.
c) A kihúzott számok között a nagyság szerinti középső a 40-es.

II.1.2. Teljes valószínűség tétele, Bayes-tétel

23. A meteorológusok szerint holnap 0,5 valószínűséggel eső lesz és 0,7 valószínűséggel szél lesz. Ha eső lesz, akkor 0,3 valószínűséggel szél is lesz. Mi a valószínűsége, hogy

a) ha szél lesz, eső is lesz?
b) szél is és eső is lesz?

24. Amennyiben barátnőnk közvetlenül a randevúnk előtt megy fodrászhoz, akkor 90%, hogy elkésik a randevúról. Tízszer olyan gyakran fordul elő, hogy elkésik a randevúról, mint az, hogy randevú előtt fodrásznál volt. Ha elkésik, mi annak a valószínűsége, hogy előtte fodrásznál volt?

25. Az eső átlagosan öt napból egyszer esik. A barátaimmal átlagosan 3 napból egyszer focizunk. Amelyik napokon focizunk, azon napok egytizedében esik az eső. Ha egy napon nem esik, mi a valószínűsége, hogy focizunk?

26. Egy évfolyam 20%-a *D* szakos, 5%-a lány és 60%-a kollégista. A *D*-sek 0,8, a lányok 0,9, a kollégisták pedig 0,75 valószínűséggel mennek át elsőre a valószínűségszámítás-vizsgán. Meghatározhatók-e a következő események valószínűségei?

a) Egy véletlenül választott hallgató elsőre átmegy a valószínűségszámítás-vizsgán.
b) Egy véletlenül választott hallgató elsőre átmegy a valószínűségszámítás-vizsgán és lány.
c) Ha valaki elsőre átment a valószínűségszámítás-vizsgán, akkor lány.

27. Egy bináris csatornán a 0 jelet $\frac{1}{3}$, az 1 jelet $\frac{2}{3}$ valószínűséggel adják le. Zavarás következtében, ha 0-t adnak le, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel 1 érkezik, ha 1-et adnak le, akkor $\frac{1}{5}$ valószínűséggel 0 érkezik.

a) Ha a 0 jel érkezik, mi a valószínűsége, hogy 0-t adtak le?
b) Mi a valószínűsége, hogy 1 érkezik – figyelembe nem véve, hogy milyen jelet adtak le?

28. Egy tesztvizsgánál 20 kérdés van, mindegyikre igen vagy nem lehet a válasz. Minden kérdésnél három eset lehet: tudjuk a helyes választ – ennek $\frac{4}{7}$; azt hisszük, hogy tudjuk a helyes választ – ennek $\frac{2}{7}$; illetve nem tudjuk a helyes választ – ennek $\frac{1}{7}$ a valószínűsége, és ekkor találomra $\frac{1}{2}$–$\frac{1}{2}$ valószínűséggel válaszolunk igent vagy nemet. Mi a valószínűsége, hogy

a) legalább 14 kérdésre helyesen válaszolunk?

b) ha egy kérdésre valaki helyesen válaszol, akkor azért válaszolt helyesen, mert tudta a helyes választ?

29. Az igazak városában a lakosok 90%-a igazat mond, a hazugok városában pedig 85%-a hazudik. Mi nem tudjuk, hogy melyik városban vagyunk, egyforma eséllyel lehetünk mindkettőben. Megkérdezünk egy embert, és az azt mondja, hogy ez a hazugok városa. Mi a valószínűsége annak, hogy ez az ember hazudik?

30. Valamely forgalmas postahivatalban annak valószínűsége, hogy naponta k hibásan címzett levél érkezik, $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, ahol $\lambda > 0$ rögzített. A hibásan címzett leveleket egymástól függetlenül, egyenként $\frac{2}{3}$ valószínűséggel mégis továbbítani tudják a címzetthez. Ha egy nap 25 hibásan címzett levelet nem tudnak továbbítani, akkor mi a valószínűsége, hogy aznap 60 hibásan címzett levél érkezett?

31. A **21.** „kocsmás feladatnál" határozza meg a helyes valószínűségértéket!

32. Húsz cseresznye közül 15-ből már eltávolították a magot. Egy mohó kismalac válogatás nélkül felfal öt cseresznyét. Ha ezután véletlenszerűen kiválasztunk egy cseresznyét,

a) mi a valószínűsége, hogy van benne mag?

b) feltéve, hogy van benne mag, mi a valószínűsége, hogy a malac legalább egy magot megevett?

II.2. Szimuláció és statisztika

33. 100 embert vizsgáltak iskolai végzettségük és pártszimpátiáik szempontjából:

párt	a	b	c
8 általános	12	26	2
középiskola	2	35	3
egyetem	1	4	15

a) A 100 ember hány %-a középiskolai végzettségű?

b) Az egyetemet végzettek hány %-a híve a c pártnak?

c) Hány % egyetemista híve a c pártnak?

d) A b párt hívei közül hány % végzett legalább középiskolát?

e) A legalább középiskolát végzettek közül hány % az egyetemet végzett?

f) Pontosan függetlennek tekinthető-e a pártállás és az iskolai végzettség a fenti minta alapján?

34. Az (1, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1), (0, 1), (1, 1), (0, 1), (0, 1) (0, 0), (1, 1) vektor-adatrendszernél mennyi az 1-esek relatív gyakorisága

a) mint első koordinátának?

b) mint első vagy második koordinátának?

c) mint koordinátaösszegnek?

d) mint első koordinátának, feltéve, hogy a második koordináta is 1?

35. Egy zajos csatornának két kritikus állapota van:

a) minden egyes jel a többitől függetlenül p valószínűséggel teljesen elmosódhat;

b) minden egyes jel a többitől függetlenül p valószínűséggel bármely más jellé eltorzulhat.

Szimulálja számítógéppel a csatorna *a)*, ill. *b)* állapotát a $p = \frac{2}{3}$ és $p = \frac{1}{3}$ esetekre, feltéve, hogy a szóban forgó jelek egy input magyar nyelvű mondat betűi!

36. Írjon számítógépes programot, amelyik alkalmas arra, hogy egy adott szövegre meghatározza a magyar ábécé betűinek a szövegben előforduló relatív gyakoriságait! Futtassa a programot Arany valamely epikus műve és az egyetemi TVSZ esetére!

37. Az **51.** feladathoz kapcsolódóan szimulálja n-szer az egér próbálkozásait (a kapuk állapotait)! Vesse össze az egér sikeres próbálkozásainak relatív gyakoriságát az elméletileg várt valószínűségértékkel!

38. A **76.** feladathoz kapcsolódóan szimulálja n-szer a háremhölgyek felvonulási sorrendjeit és alkalmazza Szindbád M-stratégiáját a kiválasztásra. Határozza meg a legszebb hölgy sikeres kiválasztásának relatív gyakoriságát és vesse össze az elméletileg várt értékkel!

39. Amíg a Jótündér vérében „álomvírus" van, a Jótündér csak alszik. A vírus osztódással szaporodik: keletkezése után 1 mp-cel egy ilyen vírusból kettő lesz. Viszont a fehérvérsejtek támadása miatt minden vírus a többitől függetlenül $\frac{2}{3}$ valószínűséggel elpusztul, mielőtt még osztódni tudna. Tegyük fel, hogy a Jótündér vérébe bejut egy vírus.
Szimulálja a folyamatot sokszor, 50–50 mp-ig, és vizsgálja meg, hogy ébren van-e a Jótündér az 50. mp-ben! A kapott relatív gyakoriságot vesse össze az elméletileg várt valószínűségértékkel!

40. Az I.**24.** feladathoz kapcsolódóan szimulálja az ajándékok elosztását m-szer, és a kedvező elosztások (senki sem kapja vissza a saját ajándékát) relatív gyakoriságát hasonlítsa össze a pontos elméleti valószínűségértékkel!

41. Egy játékos a bank ellen játszik. Minden játékban, a többitől függetlenül, adott p valószínűséggel nyer és $1-p$ valószínűséggel veszít. Induláskor a játékosnak A, a banknak B tőkéje van. A játék addig folyik, amíg vagy a játékos, vagy a bank tönkre nem megy. Legyen ez az idő τ. Szemléltesse τ tapasztalati eloszlását, ill. a bank tönkremenetelének relatív gyakoriságát az A és B paraméterektől függően.

II.3. Vegyes feladatok

42. Legyenek A, B, C teljesen független eseményeket leíró halmazok egy eseménytérben. Tegyük fel, hogy $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{1}{8}$, $P(C)=\frac{1}{8}$. Mennyi a $P(A\cup B\,|\,B\cup C)$ feltételes valószínűség?

43. Legyen $A_1, A_2, \ldots, A_j, \ldots$ teljes eseményrendszer, $P(C)>0$ és az A esemény tetszőleges. Igazolja, hogy

$$P(A|C)=\sum_j P(A_j|C)P(A|A_jC).$$

44. Igazolja, hogy ha $P(A)=\frac{4}{5}$ és $P(B)=\frac{9}{10}$, akkor $\frac{7}{9}\le P(A|B)\le\frac{8}{9}$.

45. Jelölje $A\circ B$ az $(A-B)\cup(B-A)$ eseményt! Igazolja, hogy

$$P(A\circ C)\le P(A\circ B)+P(B\circ C).$$

II.3.1. Szorzástétel, függetlenség

46. 1000 papagájból 800 kék, ezek közül pedig 500 tud beszélni. Mely valószínűségeket tudja kiszámítani a következők közül?
a) P (egy papagáj tud beszélni).
b) P (egy papagáj beszélni is tud, és kék is).
c) P (egy beszélő papagáj kék).
d) P (egy kék papagáj tud beszélni).
Van-e különbség a *b)* és *d)*-beli esemény között?

47. Egy csatában a katonák 70%-a elvesztette egyik szemét, 74%-a egyik fülét, 80%-a egyik karját és 85%-a egyik lábát.
a) Becsülje meg, hogy a katonáknak legalább hány százaléka vesztette el egyszerre egyik szemét, fülét, karját és lábát!
b) A hiányzó karúak közül legalább hány százalék vesztette el egyik fülét?

48. Keressen „urnamodellt” az $\left(\frac{x}{x+y}\right)^n+\left(\frac{y}{x+y}\right)^n=\left(\frac{z}{x+y}\right)^n$ egyenlet valószínűségi modellezésére, ahol $n \geq 3$, x, y, z természetes számok (az egyenlet ekvivalens Fermat híres $x^n+y^n=z^n$ egyenletével).

49. Nagy mennyiségben szállítanak üveg- és porcelántányérokat. Szállítás közben az üvegtányéroknak 5, a porcelántányéroknak 2, az összes tányéroknak 4%-a törik el. Hányad részét teszik ki a tányéroknak az üvegtányérok?

50. Egy dobozban 3 piros és 7 zöld golyó van. Visszatevés nélkül, bekötött szemmel háromszor húzunk. Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan két piros golyót húzunk ki?
Oldja meg a szorzástétellel és a klasszikus képlettel is a feladatot!

51. Egy kisegér három folyosón juthat el egy sajtdarabhoz, és mindegyik folyosón három ajtó van. Mi a valószínűsége annak, hogy a kisegér el tud jutni a sajthoz, ha az ajtók egymástól függetlenül p valószínűséggel nyílnak ki, és kinyitásuk után nyitva is maradnak (ha van nyitott folyosó, akkor az egér megtalálja a sajtot)?

52. Tekintsük az alábbi eseményeket:
A_k: k gyerekes családban legfeljebb 1 lány van;
B_k: k gyerekes családban lány és fiú is van.
Független események-e:
a) A_3 és B_3?
b) A_4 és B_4?

53. Egy gyárban két gép működési idejére végeztek megfigyeléseket, és megállapították, hogy az I-es gép átlagban a munkaidő 60%-ában dolgozik, a II-es gép pedig a munkaidő 70%-ában, egymástól függetlenül. Mi a valószínűsége, hogy egy adott időpontban
a) mindkét gép dolgozik,
b) legalább az egyik dolgozik,

c) csak az egyik dolgozik,
d) mindkét gép áll?

54. Négy pénzdarabot feldobunk, majd megismételjük a kísérletet. Mi a valószínűsége, hogy megismétlődik az első dobás eredménye, amennyiben a pénzdarabok
a) megkülönböztethetők?
b) nem megkülönböztethetők?

55. Dobókockával addig dobunk, amíg nem dobunk ötöst. Mi a valószínűsége, hogy ezalatt nem dobunk hatost?

56. Két ember mindegyike addig dob fel egy-egy érmét, amíg az első fej kijön. Mi a valószínűsége, hogy ugyanannyi dobást végeznek?

57. Egy előadást minden tanévben más-más tanteremben hirdetnek meg, az A, B és C tantermek valamelyikében. Idén az A tanteremben hirdették meg, és rendre 0,5–0,5 a valószínűsége annak, hogy jövőre a B vagy C teremben lesz-e megtartva. A további években is hasonló szisztéma szerint választják a termeket. Mi a valószínűsége annak, hogy az idei tanévtől számított n-edik évben az előadás ismét az A teremben lesz megtartva? Mennyi a valószínűség határértéke, ha n tart a végtelenhez?

58. Az $ABCD$ tetraéder élein bolyong egy hernyó, aki minden csúcsból azonos, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel indul el valamelyik szomszédos csúcs felé. Amennyiben az A csúcsból kezdi a bolyongást, akkor mi a valószínűsége annak, hogy a hernyó
a) egyáltalán eljut a D csúcsba?
b) amennyiben eljut a D csúcsba, akkor az A csúcsból (illetve a B csúcsból, ill. a C csúcsból) érkezik oda?

59. Valaki hétről hétre egy rögzített számmal játszik az ötös lottón, és csak a többi négy számot változtatja. Négytalálatost szeretne elérni és azt állítja, hogy így nagyobb az esélye, mint hogyha mind az öt számot mindig változtatná, hiszen, amikor kijön a fix szám, akkor már csak hármas találatot kell elérnie. Számítsa ki, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy
a) kijön a fix szám és azon alkalommal négyes találatot is elér az illető?
b) mind az öt számot változtatva elér négyes találatot?
c) feltéve, hogy kijön a fix szám, elér négyes találatot?
Hasonlítsa össze az *a), b)* és *c)*-beli valószínűségeket!

60. 2^n egyforma képességű asztaliteniszező kieséses rendszerű bajnokságot játszik. Egyszer sorsolják ki a bajnokság előtt, hogy az egyes játszmák győztesei közül ki kivel játsszon. Tegyük fel, hogy minden játszmában $\frac{1}{2}$ eséllyel nyerhet mindkét játékos. A versenyzők között van a két népszerű játékos, Menő és Manó. Mi a valószínűsége annak, hogy a verseny során létrejön a Menő–Manó mérkőzés?

II.3.2. Teljes valószínűség tétele, Bayes-tétel

61. Betegek egy csoportjában a gyógyultak 10%-a szedett Béres-cseppet. A csoportban kb. négyszer annyian gyógyultak meg, mint ahányan Béres-cseppet szedtek. Mi a valószínűsége, hogy egy, a csoportból véletlenül választott, Béres-cseppet szedő személy meg is gyógyult?

62. Egy kockát kétszer feldobnak.
a) Mi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7 lesz?
b) Ha az első dobás eredményéül páros szám adódik, mi a valószínűsége, hogy a két dobás összege 7 lesz?
Melyik valószínűség nagyobb, az *a)* vagy a *b)*-beli?

63. A és B pingpongmeccset játszik úgy, hogy A kezdi az adogatást, és így az első 5 pontért ő szervál. Tudjuk, hogy az első pontot $\frac{2}{3}$ valószínűséggel A nyeri, majd minden további pontnál $\frac{3}{4}$, illetve $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyer, aszerint, hogy az előző pontot ő nyerte-e vagy sem. (Tehát egy pont megnyerésének a valószínűségét csak az befolyásolja, hogy az előző pontot ki nyerte.)
a) Mi annak a valószínűsége, hogy az 1. és a 3. pontot ugyanaz a játékos nyeri?
b) Feltéve, hogy az 1. pont A-é, mi a valószínűsége annak, hogy a 3. is A-é?
c) Feltéve, hogy a 3. pont A-é, mi a valószínűsége annak, hogy az 1. is A-é?

64. Egy számolásnál az egyik lépés azért kritikus, mert háromszor olyan gyakori, hogy itt valaki hibázik, mint az, hogy helyesen jár el. Ha sikeresen túljut ezen a lépésen, akkor 1 valószínűséggel nem követ el több hibát. Ha viszont téved ennél a lépésnél, akkor 30% eséllyel még egy újabb hibát is elkövet, amely pontosan kompenzálja az elsőt. Ha csak annyit tudunk, hogy valaki helyes eredményt kapott, akkor mi a valószínűsége annak, hogy végig helyesen számolt?

65. A házaspárok részvételi arányáról az Egyesült Államok egy elnökválasztásán a következő adataink vannak. Annak a valószínűsége, hogy szavaz a férj, $\frac{3}{5}$; hogy szavaz a feleség, $\frac{1}{2}$. Azon feleségek között, ahol a férj szavaz, a feleség $\frac{2}{3}$ valószínűséggel szavaz.
a) Ha egy házaspárról csak azt tudjuk, hogy a feleség szavaz, mi a valószínűsége, hogy férje is szavaz?
b) Két házaspárt véletlenszerűen kiválasztva, mi a valószínűsége, hogy e 4 személy közül pontosan 1 férfi és 1 nő vesz részt a választáson?

66. A vizsgázók 75%-a A szakos, 15%-a B szakos, 10%-a C szakos. Annak a valószínűsége, hogy egy hallgató ötöst kap, az A szakosoknál 0,4, a B szakosoknál 0,7, a C szakosoknál 0,6. Ha Kis Pistiről csak annyit tudunk, hogy ötösre vizsgázott, akkor rendre milyen valószínűséggel A, B, illetve C szakos?

67. Egy tárgyból A, B és C vizsgáztat, A 5-ször gyakrabban, mint B, C 2-szer gyakrabban, mint A. A bukási arány B-nél 3-szor akkora, mint A-nál. Egy hallgatóról tudjuk, hogy megbukott. Mi a valószínűbb: az, hogy A-nál vagy az, hogy B-nél vizsgázott?

68. Az iskolában úgy hírlik egy tanító bácsiról, hogy igen szeszélyes: ha valaki felkészült, akkor is 0,35 az esélye annak, hogy egyest kap, de ha nem készült, akkor is az esetek 15%-ában megússza egyes nélkül a feleltetést. Jancsika csak p valószínűséggel megy felkészülten az iskolába. Ha Jancsika egyest kap, akkor milyen p értékek esetén valószínűbb a tanító bácsi tévedése, mint Jancsika készületlensége?

69. A-ról köztudott, hogy nem szigorú vizsgáztató. Holnap csak egyetlen tanár vizsgáztat, és $\frac{2}{5}$ az esélye annak, hogy a vizsgáztató A. Barátom legalább $\frac{3}{4}$ valószínűséggel átmegy a vizsgán, ha A vizsgáztat, de legalább $\frac{1}{2}$ valószínűséggel megbukik, hogyha más vizsgáztat. Igazolja, hogy ha a barátom vizsgája nem sikerül, akkor legfeljebb $\frac{1}{4}$ az esélye annak, hogy A buktatta meg!

70. Egy bináris csatornán $\frac{1}{3}$ valószínűséggel az 1, $\frac{2}{3}$ valószínűséggel a 0 jelet kell leadnunk. Ha már leadtunk egy jelet, akkor ugyanazt a jelet még négyszer ismételve leadjuk a biztonság kedvéért. A zaj miatt minden egyes jelnél 0,4 annak a valószínűsége, hogy másik jel érkezik, mint amit leadtunk. Ezért vett jelnek az ötös sorozat alapján azt tekintik, amelyikből több érkezik. Mi a valószínűsége, hogy ugyanazt a jelet veszik, mint amit leadtunk?

71. Két urnánk van, az egyikben két fehér és öt piros, a másikban három fehér és négy piros golyó van. Valaki véletlenszerűen kiválaszt mindkét urnából egy-egy golyót, és átteszi azt a másik urnába – egyidejűleg, majd húz az első urnából.

a) Mi a valószínűsége, hogy piros golyót húzunk?

b) Feltéve, hogy piros golyót húzunk, mi a valószínűsége, hogy azonos színű golyókat cseréltünk?

72. Egy „amerikai” párbaj szabályai a következők: A párbajozó 50 fehér és 50 piros golyót oszthat el két urnába tetszés szerint. Ezután bekötött szemmel húz $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$ valószínűséggel valamelyik urnából. Ha fehér golyót húz, akkor életben marad, ha pirosat, akkor meghal. Hogyan ossza el a két urnában a golyókat, ha kedves az élete?

73. Ketten egymástól függetlenül p valószínűséggel hazudnak, illetve $1-p$ valószínűséggel mondanak igazat. Ha tudjuk, hogy mind a ketten azt állítják, hogy a múlt héten kijött a lottón a hetes szám, ez erősíti-e igazmondásuk tényét? Állítását p-től függően diszkutálja!

74. Egy üzemben a kikerülő áru 75% valószínűséggel első osztályú. A kikerült termékeket vizsgálatnak vetik alá. Annak valószínűsége, hogy egy I. osztályú árut nem I. osztályúnak minősítenek: 0,02. Annak a valószínűsége, hogy egy nem I. osztályút I. osztályúnak minősítenek: 0,05. A vizsgálaton I. osztályúnak minősített áruk hány százaléka lesz várhatóan valóban I. osztályú?

75. Két kosárlabda-játékos, A és B versenyeznek, hogy ki tud kevesebb próbálkozással kosarat dobni. Az A játékos minden próbálkozásánál $\frac{2}{3}$ valószínűséggel talál, B pedig csak $\frac{1}{2}$ valószínűséggel, a többi dobástól és egymástól függetlenül. Mi a valószínűsége annak, hogy mégis B nyer (azonos számú próbálkozás esetén egyik játékos sem nyer)?

76. Szindbád az előtte egymás után megjelenő N háremhölgy közül az ún. M-stratégiával választ egyet. Ez annyit jelent, hogy M számú hölgyet megnéz, majd ezután az első olyasvalakire rámutat, aki az összes előzőnél szebb. Bizonyítsa be, hogy ha a háremhölgyek minden lehetséges sorrendjének ugyanakkora az esélye, valamint szigorú szépségsorrendbe állíthatók, akkor annak a valószínűsége, hogy ezzel a stratégiával a legszebbet találja el az összes hölgy közül,

$$\frac{M}{N}\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{M+1}+\ldots+\frac{1}{N-1}\right).$$

77. A börtönben három cellában három halálraítélt várakozik az ítélet végrehajtására. Azt is tudják már, hogy közülük valamelyik kegyelmet kapott, de hogy melyikük, az az utolsó pillanatig titok. Életben maradásuk valószínűsége így egyenként $\frac{1}{3}$. Az egyik rab így gondolkodik: A másik két rabtársam közül az egyik biztosan meghal. Tehát vagy én, vagy a másik rabtársam marad életben – azonos eséllyel. Tehát megmenekülésem esélye már $\frac{1}{2}$, azaz megnőtt.

Helyesen gondolkodott-e?

78. *(az előző feladat folytatása)* A börtönőr tudja, hogy ki kap kegyelmet, de nem szabad elárulnia. Az egyik rab a következőre kéri a börtönőrt: nevezzen meg a másik kettő közül valakit, akit kivégeznek, ezzel végül is semmi lényegeset nem fog elárulni, hiszen a rabok is tudják, hogy a másik kettő közül valaki meghal. A börtönőr gondolkodik, és arra jut, hogy valóban nem árul el ezzel semmit, ami a kérdező számára lényeges, és megnevez egy kivégzendőt a másik két rab közül. Ezután a kérdező rab így gondolkodik: vagy ő maga hal meg, vagy a még meg nem nevezett harmadik rab, tehát menekülési esélye most már $\frac{1}{2}$, vagyis menekülési esélye megnőtt.

Sikerült-e a kérdező rabnak túljárnia a börtönőr eszén, vagy saját magát csapta-e be?

79. Egy vetélkedő főnyereménye egy gépkocsi, amely három zárt ajtó valamelyike mögött van elrejtve. A vetélkedő játékos kiválaszt egy ajtót, de mielőtt a játékvezető elárulná, hogy van-e az ajtó mögött gépkocsi, kinyit a másik két ajtó közül egy olyat, amelyik mögött semmi sincsen, majd felajánlja a játékosnak, hogy újból választhat a még csukott két ajtó közül. Érdemes-e a játékosnak változtatnia az eredeti választásán?

80. Egy bizonyos betegséggel kapcsolatban egy orvosi teszt 0,95 valószínűséggel helyes diagnózist ad, ha az illető beteg, de 0,02 valószínűséggel téves diagnózist ad, ha az illető egészséges. A lakosságnak átlag két ezreléke szenved ebben a betegségben. Feltéve, hogy a teszt szerint beteg valaki, mi a valószínűsége, hogy mégis egészséges?

81. Egy felvételi tesztvizsgán a felvételre alkalmasak 80%-a ír sikeres vizsgát, az alkalmatlanoknak pedig 25%-a. A jelentkezőknek általában 40%-a alkalmas a felvételre. Mennyi a felvettek között a valóban alkalmasok aránya?

82. A lakosság 10%-a szenved átlagosan egy bizonyos betegségben. A betegség kimutatására egy olyan vizsgálatot alkalmaznak, amelyik 90% biztonsággal helyes diagnózist szolgáltat. Egy páciensen két vizsgálatot végeznek egymástól függetlenül. Mi a valószínűsége, hogy a páciens beteg, ha

a) mindkét vizsgálat pozitív?
b) pontosan az egyik vizsgálat pozitív?

83. Két urna mindegyikében két golyó, pontosan egy piros és egy fehér golyó van. Bekötött szemmel húzunk mindkét urnából egy-egy golyót és betesszük őket egy harmadik urnába, anélkül, hogy megnéznénk őket, majd hozzájuk teszünk egy piros golyót. Annak valószínűsége, hogy ekkor a harmadik urnából piros golyót húzunk, $\frac{2}{3}$, hiszen teljes valószínűség tételt használva az ismeretlen színű két golyó lehetséges színeloszlásai szerint:

$$P(p) = P(pf)P(p \mid pf) + P(fp)P(p \mid fp) + P(pp)P(p \mid pp) + P(ff)P(p \mid ff) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

Mivel $\frac{2}{3}$ a piros golyó kihúzásának valószínűsége, most az urnában két piros és egy fehér golyó van. Tehát eredetileg egy fehér és egy piros golyó volt, vagyis nem lehetett azonos színű két golyó! Ez ellentmondás!
Hol a hiba a gondolatmenetben?

II.4. Ellenőrző kérdések

84. Igazak-e a következő állítások?

a) A valószínűség axiómáiban nem szerepel a relatív gyakoriság fogalma.
b) Ha az A és B pozitív valószínűségű események függetlenek, akkor $AB = 0$.
c) Minden valószínűség tekinthető feltételes valószínűségnek.
d) $P(A) = 0$ ekvivalens azzal, hogy A lehetetlen esemény.

85. Igaz-e, hogy

a) minden valószínűség egy relatív gyakoriság?
b) rögzített n-re az események relatív gyakorisága n adott kísérletnél egy valószínűségi mérték Ω-n?

86. Pontfüggvények vagy halmazfüggvények-e a következők $\mathbf{R}^2$-en:

a) terület,
b) számosság,
c) origótól vett távolság,
d) az (m, n) egész koordinátájú pontokon értelmezett számsorozat.

87. Tegyük fel, hogy egy A esemény valószínűsége $\frac{1}{n}$, ahol n nagy szám. Igaz-e, hogy ez azt jelenti az A-ra vonatkozó n kísérletnél, hogy

a) nagy valószínűséggel legalább 1-szer bekövetkezik A?
b) kb. egyszer következik be A?
c) átlag az n-edikre következik be először az A?
d) átlag egyszer következik be A?

88. Szabályos érmével fej–írás dobássorozatot végeztünk, és tíz fej dobást értünk el egymás után. Számíthatunk-e nagyobb valószínűséggel ezután írás dobásokra, mint a kísérlet megkezdése előtt? Válaszánál mérlegelje, hogy nem kerül-e ellentmondásba azzal, hogy általában arra számítunk, hogy a fej és írás dobások számai kiegyenlítődnek.

89. Igaz-e, hogy egy szelvénnyel lottózva, biztosan lesz ötös találatunk,

a) ha elég sokáig lottózunk?
b) ha elméletileg végtelen sokszor lottózunk?

90. Egy A eseményről nem tudjuk, hogy bekövetkezett-e vagy sem. De ha bekövetkezik, akkor tudjuk, hogy a B esemény több, mint 95% valószínűséggel bekövetkezik. Kísérletet végezve B-re, azt kapjuk, hogy B nem teljesül. Következtethetünk-e ebből arra, hogy az A esemény legfeljebb 0,05 eséllyel következett be?

91. Régi vicc: „Egy betegség túlélésének valószínűsége $\frac{1}{10}$. Az orvos így vigasztalja páciensét: az a kilenc betegem, aki ebben a betegségben szenvedett, már meghalt, így tehát Önnek nem kell aggódnia." Van-e a páciensnek oka az aggodalomra?

92. Kétszer egymás után feldobunk egy szabályos érmét. Igazolható-e matematikailag, hogy a dobások eredményei független események?

93. Ekvivalens-e az A és B események függetlenségével $P(B) > 0$ esetén az, hogy
a) $P(A \mid B) = P(A)$?
b) $AB = 0$?

94. Ekvivalens-e az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események teljes függetlenségével az, hogy $P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1) \ldots P(A_n)$?

95. Ugyanazon jelenségre független kísérleteket hajtunk végre. Változatlanok-e közben a kísérleti körülmények? Ha igen, miért nem kapjuk mindig ugyanazon eredményt? Ha nem, miért mutat a jelenség viselkedése bizonyos állandóságot?

96. Adott egy P valószínűségi mérték a számegyenesen és ismerjük a $G(a, b) = P[a, b\,)$ értékeket (a és b értéke lehet $\pm\infty$ is). Meghatározza-e az összes $G(a, b)$ érték a $P(a, b)$, illetve a $P(\{a\})$ valószínűségeket?

97. Egy üdítőitalokra vonatkozó piackutatás eredménye a következő: 1000 megkérdezett közül 811 kedveli a rostosat (R), 753 a Pepsit (P), 418 a Coca Colát (C). 570 kedveli R-t és P-t. 356 R-t és C-t, 348 P-t és C-t. 297 olyan megkérdezett volt, aki mindhárom üdítőt kedveli. Vegyük észre, hogy ellentmondás van a fenti adatokban! Miért?

98. Mi a valószínűsége, hogy három pénzdarabot feldobva három egyforma dobást, tehát három fejet vagy három írást kapunk?
Valaki így gondolkodik: Két dobás biztosan egyforma lesz, így csak az kell, hogy a harmadik érmén ugyanezt kapjuk, ennek valószínűsége pedig $\frac{1}{2}$. Tehát a kérdezett valószínűség $\frac{1}{2}$. Helyes-e ez a gondolatmenet?

99. Hétszer feldobunk egy dobókockát. Mi a valószínűsége, hogy 3-szor egyest vagy kettest, 2-szer hármast, 2-szer négyest, ötöst vagy hatost dobunk?
Valaki a szorzástételt alkalmazza, és így gondolkodik: Annak valószínűsége, hogy háromszor egyest vagy kettest dobunk, $\binom{7}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^4$. Feltéve, hogy már háromszor egyest vagy kettest dobtunk, annak valószínűsége, hogy kétszer hármast dobunk a fennmaradó dobásokból, $\binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$. Annak valószínűsége, hogy a hátralevő két dobás négyes, ötös vagy hatos, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$. Így a keresett valószínűség a szorzástétel értelmében:
$$\binom{7}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^4\binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$
Helyes-e ez a gondolatmenet?

100. Egy urnából, amely két fehér és egy piros golyót tartalmaz, húzunk egy golyót véletlenül. Megváltozik-e a piros golyó húzásának valószínűsége, ha még a húzás előtt kiveszünk egy golyót, de nem nézzük meg?

III. Valószínűségi változók eloszlása (eloszlások $\mathbf{R}^1$-en)

(i) Változón – ezután: *valószínűségi változón* – értünk egy $\mathbf{R}^1$-en futó, szabad, algebrai (matematikai individuum-) változót. Jelölése: X, Y, Z, ... stb.
Egy X valószínűségi változó eloszlása *diszkrét* (X diszkrét), ha az x_1, x_2, $\ldots$, x_k, ... értékekre rendre $p_1, p_2, \ldots, p_k$, ... valószínűségértékek koncentrálódnak, ahol $\sum_k p_k = 1$ ($p_k \geq 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$). Ekkor

$$P(X \in A) = \sum_{\{k: x_k \in A\}} p_k ,$$

ahol $A \subseteq \mathbf{R}^1$ tetszőleges.
Egy X valószínűségi változó eloszlása (abszolút) *folytonos* (X folytonos), ha van olyan $f(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ tulajdonságú $f(x)$ függvény (X sűrűségfüggvénye), hogy

$$P(X \in A) = \int_A f(x)dx$$

igaz minden olyan $A \subseteq \mathbf{R}^1$-re, ahol a jobb oldal értelmes (az integrál Riemann-impropius integrál).
Egy X valószínűségi változó eloszlása *kevert*, ha léteznek A és B diszjunkt halmazok, hogy $R^1 = A \cup B$ és B-nek az A-ra, illetve B-re csonkított eloszlásai rendre diszkrétek, illetve folytonosak.
Egy X valószínűségi változó eloszlása szinguláris, ha minden valós érték 0 valószínűségű, de nincs sűrűségfüggvénye.

Általában az eloszlások olyan σ-halmazalgebrákon értelmezettek, amelyek tartalmazzák az intervallumokat (Borel σ-algebrák, Lebesgue σ-algebrák). Egyszerűség kedvéért azonban, hacsak az ellenkezőjét nem említjük, eloszláson a feladatoknál diszkrét, folytonos vagy kevert eloszlást értünk.

(ii) Eloszlások egységes megadása, eloszlásfüggvény:
$F(x)$ egy X valószínűségi változó eloszlásának eloszlásfüggvénye, ha minden x-re:

$$P(X < x) = F(x) .$$

Minden $a < b$-re igazak a következők:

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) , \quad P(\{a\}) = F(a+0) - F(a) .$$

Folytonos eloszlás esetén:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt , \quad F'(x) = f(x) ,$$

az utóbbi majdnem minden x-re.
Eloszlásfüggvényt karakterizáló tulajdonságok:
a) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ és $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$,
b) $F(x)$ monoton növekvő,
c) $F(x)$ balról folytonos.
Bizonyos értelemben kölcsönösen egyértelmű a kapcsolat a lehetséges egydimenziós eloszlások mint halmazfüggvények és a lehetséges eloszlásfüggvények mint pontfüggvények között. Ha $F(x)$ egy eloszlásfüggvény tulajdonságú függvény, akkor a $P([a, b)) = F(b) - F(a)$ összefüggéssel az intervallumokra értelmezett P halmazfüggvény egyértelműen kiterjeszthető eloszlásként az intervallumok által generált Borel σ-algebrára.

(iii) Néhány nevezetes eloszláscsalád:
Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számokon *diszkrét egyenletes* eloszlás ($E(n)$, $n = 1, 2, \ldots, n$):

$$p_k = \frac{1}{n} .$$

Binomiális eloszlás ($B(n, p)$, $0 < p < 1$):

$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \text{ ahol } q = 1 - p.$$

Geometriai eloszlás ($G(p)$, $0 < p < 1$):

$$p_k = p \cdot q^{k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \text{ ahol } q = 1 - p.$$

Poisson-eloszlás ($P(\lambda)$, $\lambda > 0$ valós):

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Az (a, b) *intervallumon egyenletes* eloszlás ($E(a, b)$):

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \text{ ha } a \le x \le b, \; f(x) = 0 \text{ egyébként.}$$

Exponenciális eloszlás (Exp (λ), $\lambda > 0$ valós):

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}, \text{ ha } x \ge 0, \; f(x) = 0 \text{ egyébként.}$$

Normális eloszlás ($N(m, \sigma)$, m valós, σ pozitív valós):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < \infty).$$

(iv) A P eloszlású X valószínűségi változóhoz tartozó n dimenziós mintatér minden pontjához hozzárendelhető egy véletlen diszkrét eloszlás, egy az adott mintaértékhez tartozó diszkrét egyenletes eloszlás, azaz, az adott mintához tartozó *tapasztalati eloszlás.*
A nagy számok erős törvényeinek következményeként, a tapasztalati eloszlás $n \to \infty$-re konvergál P-hez, 1 valószínűséggel.

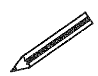
Megjegyzés: A valós analízis két alapvető függvényfogalma a *pontfüggvény* (a halmaz elemeihez rendel valós értéket, pl. sin x) és a *halmazfüggvény* (a halmaz bizonyos részhalmazaihoz rendel valós értéket, pl. hosszúság) fogalma. Hasonlóan az eloszlás–eloszlásfüggvény kapcsolathoz, kölcsönösen egyértelmű a kapcsolat a halmazfüggvények és a valamirevaló pontfüggvények között. Például a diszkrét, folytonos, szinguláris halmazfüggvényeknek

rendre megfelelnek bizonyos lépcsős függvények, folytonos függvények és tiszta ugró függvények. Megmutatható, hogy hasonlóan az általános eloszlásokhoz, e függvénytípusokból minden valamirevaló valós függvény kikeverhető.

(v) A véletlentől függő mennyiségeket a *valószínűségi változó* fogalmával modellezhetjük.
Ha egy véletlen mennyiségnek
– legfeljebb megszámlálhatóan sok lehetséges értéke van, akkor eloszlása *diszkrétnek* tekinthető;
– nincs kitüntetett, azaz pozitív valószínűségű értéke, és feltételezzük, hogy eloszlása nem szinguláris, akkor (abszolút) *folytonos* eloszlásúnak tekinthető.

Konkrét eloszlásra vagy *tapasztalati* – statisztikai – úton következtethetünk, vagy bizonyos *logikai* feltevésekből, mint pl. a következő nevezetes eloszlások esetén:
Ha a véletlen mennyiség jelentése
– az, hogy n darab független p valószínűségű esemény közül hány következik be, akkor $B(n, p)$ eloszlással modellezhetünk;
– az, hogy egy p valószínűségű esemény hányadszorra következik be egy független kísérletsorozatnál először, akkor p paraméterű geometriai eloszlással modellezhetünk.
$B(n, p)$ nagy n és kis p esetén közelíthető $n{\cdot}p$ paraméterű Poisson-eloszlással.
Amennyiben egy véletlen mennyiség
– az (a, b) intervallumba esik és egy-egy részintervallumba esés valószínűsége csak a részintervallumok hosszától függ, akkor (a, b)-n egyenletes eloszlással modellezhetünk;
– „örökifjú" tulajdonságú, akkor exponenciális eloszlással modellezhetünk;
– sok, független, az egészhez képest kicsiny mennyiség összege, akkor normális eloszlással modellezhetünk.

(iv) *Empirikus statisztika:* az X véletlen mennyiségre vonatkozó $X_1, X_2, \ldots, X_m$ mérésekhez tartozó tapasztalati eloszlás az a diszkrét eloszlás, amelyre $P(\{X_i\}) = \frac{k_i}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, ahol k_i az X_i gyakorisága az adott méréssorozatban. Az elméleti eloszlás nagy n-re jól közelíthető a tapasztalati eloszlással.



III.1. Gyakorlófeladatok

1. Milyen valós c értékekre lehetséges, hogy van olyan geometriai eloszlás, amely szerint a páratlan számok halmazának valószínűsége c-szer akkora, mint a páros számok halmazának a valószínűsége?

2. Igaz-e az alábbi állítás? Ha X n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlású és $m < n$, akkor az $X \le m$ feltétel mellett X feltételes eloszlása m-edrendű p paraméterű binomiális eloszlás.

3. Igazolja, hogy ha X geometriai eloszlású, akkor

a) igaz a következő tulajdonság:

$$P(X = n + k \mid X > n) = P(X = k) \qquad (k, n > 0).$$

b) igaz X-re az örökifjú tulajdonság.

4. A geometriai eloszlást csonkítjuk a páratlan számok halmazára. Határozza meg az így kapott eloszlást!

5. Egy kevert P eloszlás diszkrét részét úgy kapjuk meg, hogy az $\frac{1}{3}$ paraméterű geometriai eloszlás minden tagját a felére csökkentjük. A folytonos rész sűrűségfüggvénye a 0,5 paraméterű exponenciális eloszlás sűrűségfüggvényének a fele.

a) Határozza meg a $[0, 1]$, $(0, 1)$, $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ intervallumokba esések valószínűségeit!

b) Adja meg az eloszlás eloszlásfüggvényét!

c) Módosulna-e a *b)*-re adott válasz, ha az eloszlásfüggvény definíciója $F(x) = P(X \le x)$ lenne?

6. X standard normális eloszlású. Határozza meg a következő valószínűségeket:

a) $P(|X| < 0{,}03)$,

b) $P(X > -0{,}03)$,

c) $P(X < 6{,}1)$.

d) Határozza meg y-t, ha $P(X < y) = 0{,}1425$.

7. Egy folytonos X valószínűségi változó eloszlása a negatív féltengelyre koncentrálódik és $f(x)$ sűrűségfüggvénye olyan, hogy $f(x) = -x \cdot P(X < x)$, ha $x < -1$. Határozza meg $f(x)$-et!

8. Létezik-e olyan folytonos eloszlás az $(1, \infty)$ intervallumon, amelynek sűrűségfüggvénye minden $1 < x$ helyen arányos

a) x reciprokával,

b) x reciprokának négyzetével.

9. Az alábbi függvények közül melyek eloszlásfüggvényei egy eloszlásnak? Ha eloszlásfüggvény, akkor adja meg az eloszlás típusát:

a) $F(x) = \sin x \quad (0 \le x \le 1)$;

b) $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x \quad (-\infty < x < \infty)$;

c) $F(x) = x^2 \quad (0 \le x \le 1)$;

d) $F(x) = \frac{x}{1+x} \quad (x > 0)$;

e) $F(x) = \frac{1}{3}[x] \quad (x \in (0,4))$;

f) $F(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & (x \in (0, 1)) \\ (1+x)\frac{1}{3} & (x \in [1, 2]) \end{cases}$;

g) $F(x) = \frac{1}{7}(\{x\} + 2[x]) \quad (x \in (0, 4))$.

10. Melyek sűrűségfüggvények az alábbiak közül?

a) $f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (x > 1)$.

b) $f(x) = 0{,}5 \quad (2 \le x \le 3)$.

c) $f(x) = \ln\frac{1}{x} \quad (0 < x < 1)$.

d) $f(x) = c\,x^2 \quad (0 \le x \le 3)$.

e) $f(x) = \sin x \quad (-\pi/2 \le x \le \pi)$.

11. Specializálja és ábrázolja a következő véletlen számértékű jelenségek eloszlását minél pontosabban. Közülük melyek eloszlásai modellezhetők nevezetes eloszlásokkal?

a) Rulettkerék kerületének mely pontján tartózkodik a golyó.
b) Szélerősség a Balaton adott pontján, adott időben.
c) Hányadik versenyen karambolozik először egy autóversenyző?
d) Amennyi holnap reggel a dollár árfolyama.
e) Véletlen szám, amelynek eloszlásfüggvénye kielégíti az $y' = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x > 0)$ differenciálegyenletet.
f) Egy véletlenül választott felnőtt lakos havi jövedelme.
g) Egy véletlenül választott felnőtt lakos havi fizetése.
h) Futballmeccsen esett gólok száma.
i) Tíz tizenegyesből hány megy be.
j) Az égbolt hány százalékát borítja felhő.
k) Teknősbéka költési ideje.
l) Egy rézmozsár élettartama.
m) Olyan, pozitív egész számokra koncentrálódó eloszlás, melynél a k értékre jutó valószínűség fordítottan arányos az $1/k^2$ értékkel.
n) Az évi öngyilkosságok száma egy városban.

o) Forgalmas autóúton negyedóra alatt egy adott helyen hány autó vesz fel stopposokat.
p) Zajszint egy forgalmas közlekedési csomóponton.
r) Éjfél után hányadik percben próbálnak felhívni telefonon.

12. Két kockával dobunk. Határozza meg a dobott számok összegének mint valószínűségi változónak az eloszlását!

13. Egy urnában 7 golyó van, pirosak és zöldek. Három golyót húzunk visszatevés nélkül véletlenül: két pirosat és egy zöldet. Adja meg az urnában a húzás után található piros golyók számának eloszlását, feltéve, hogy a golyók minden színeloszlása azonosan valószínű!

14. Egy 22 fős osztályban nyolcan nem készültek egy tárgyból. A tanár hét tanulót feleltet. Adja meg a készületlen felelők számának eloszlását!

15. Három számot választunk $(0, 1)$-ben egyenletes eloszlás szerint függetlenül. Adja meg a legnagyobb választott szám eloszlását!

16. Egy szelvénnyel játszunk az ötös lottón minden héten, a 2 és 87 fix számokkal, csak a többi három számot változtatjuk. Adja meg a következő valószínűségi változók eloszlásának típusát, amennyiben nevezetes eloszlás!

a) Ahány hét a 2 és 87 egyidejű kihúzása után eltelik, amíg mindkettőt ismét egyszerre húzzák ki.
b) Ahány beérkezett szelvényen a 2-t és a 87-et egyszerre tippelik egy héten.
c) Ahányszor a 2 kihúzása esetén a 87 is kijön, csak kevés számú húzást alapul véve.
d) Ahány találatunk van a 2 és 87 egyidejű kihúzása esetén.

17. Sok év statisztikája áll rendelkezésre arra nézve, hogy naponta hány lakástűz volt Budapesten. A napi négyes gyakoriság ugyanannyiszor fordult elő, mint az ötös gyakoriság. Becsülje meg, hogy a napok körülbelül hány százalékában fordult elő a kettes gyakoriság!

18. Egy bolha ugrál a számegyenesen. Az origóból indul. Másodpercenként egy egységnyit ugrik jobbra vagy balra $\frac{1}{2}$ valószínűséggel.

a) Tudjuk, hogy öt másodperccel ezelőtt az 1 pontban volt, most pedig a 0 pontban van. Mi a valószínűsége, hogy egy másodperccel ezelőtt a -1 pontban volt?

b) Jelölje X_n a bolha helyét n ugrás után. Tegyük fel, hogy n páros. Határozza meg X_n eloszlását!

19. Tegnap 5000 levél érkezett be a postahivatalba. Annak valószínűsége, hogy egy levél címezetlen, 0,001.

a) Mi a valószínűsége, hogy tegnap 25-nél több címezetlen levél érkezett?

b) Binomiális, Poisson- vagy mindkét eloszlás alkalmazható-e a címezetlen levelek számának eloszlására?

20. Egy futószalagot leállítanak, valahányszor a gyártásnál hibás termék kerül le róla. A selejt valószínűsége p. Határozza meg

a) a két leállás között elkészült termékek számának,

b) a selejtszériák hosszának

eloszlását!

21. Valaki egy hármas lakáscsere-hirdetést ad fel az Expressz újságban. Szerinte az első napon legfeljebb két jelentkező lesz a hirdetésre. Érdemes-e vele abban fogadni, hogy téved? Diszkutálja a problémát!

22. Bergengóciában a választások második fordulójára csak két párt maradt. A közvélemény-kutatás szerint az 500 szavazókörzet mindegyikében az emberek 24%-a az A pártra, 23%-a a B pártra fog szavazni, de a többiek csak a helyszínen választanak a két párt közül 0,5–0,5 valószínűséggel. Egy barátom szerint a B párt kis szerencsével még elnyerheti a parlamenti többséget. Mi a valószínűsége annak, hogy a szavazókörzeteknek több mint a felében a B párt jelöltje nyer (egy szavazókörzetben átlagosan háromezren szavaznak)?

23. Egy örökifjú tulajdonságú villanykörténél annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál tovább üzemel, $\frac{2}{3}$. 200 ilyen égőt helyezünk el a városban. Mi a valószínűsége annak, hogy közülük 150 égő még a 200 órát sem éli meg?

24. 1000 darab piros lámpa közül 800 élte túl az 1 óra, és 751 élte túl a 2 óra használatot. Utóbbiak közül pedig csak 452 élte túl a további 1 óra használatot. Tekinthetjük-e exponenciális eloszlásúnak a piros lámpák élettartamát?

25. A (0, 1) intervallumban egyenletes eloszlás szerint választunk egy számot. Mi a valószínűsége, hogy

a) racionális számot választunk?

b) olyan számot választunk, amelynek végtelen decimális kifejtése nem tartalmaz egyes számjegyet?

26. Egy távolsági busz egyenletes eloszlás szerint érkezik, munkanapokon 1 és 1^{15}, ünnepnapokon 1 és 1^{10} között. Utazásaim egyharmada ünnepnapokra, kétharmada munkanapokra esik. Adja meg a buszra várakozás idejének eloszlását!

III.2. Szimuláció és statisztika

27. Adja meg a következő mérési adatokhoz tartozó tapasztalati eloszlásfüggvényt:

–4,5; –3,8; 0; 1,6; 5,8; 9; 9; –3,8; 0; 0; –4,5; –3,8; 6,7; 1,6; 8,9.

28. 100 munkavállaló fizetését „ezertalléros" kategóriákba sorolva a következő értékeket kapták:

8000– 9000	10
9001–10 000	23
10 001–12 000	24
12 001–13 000	21
13 001–14 000	12
14 001–15 000	10

Adja meg a fenti értékekhez tartozó hisztogramot!

29. Generáljon n darab, a (0, 1)-ben egyenletes eloszlású véletlen számot, ábrázolja a hozzájuk tartozó tapasztalati eloszlásfüggvényt és vesse össze az egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényével!

30. A **44.** feladathoz kapcsolódóan, M-et válassza a számítógépen egészként ábrázolható összes természetes számok közül egyenletes eloszlás szerint, majd – ismét véletlenszám-generátorral – válasszon egy M-nél nem nagyobb természetes számot egyenletes eloszlás szerint. Rögzített M-re végezze el n-szer ezt a kísérletet és szemléltesse a számjegyeken (1, 2, ..., 9) a kapott számok *első számjegyeinek* így nyert relatív gyakoriságait. Vizsgálja, hogy adott M-nél kedvező-e az 1, 2, 3 és 4 számjegyekre fogadni – az 5, 6, 7, 8, 9 ellenében.

31. Szimuláljon egy n hosszúságú fej–írás dobássorozatot és szemléltesse a fejek számához mint valószínűségi változóhoz tartozó tapasztalati eloszlásfüggvényt. Vesse össze a megfelelő elméleti binomiális eloszlással. Módosítsa a kísérletet úgy, hogy a fej dobás valószínűsége 0,01 legyen, és n = 100-ra szemléltesse a kapott tapasztalati eloszlást. Vesse össze a megfelelő Poisson-eloszlással!

32. Generáljon n lottóhúzást, ahol n elég nagy szám, és vizsgálja, hogy egy előre rögzített számötössel hányszor lesz négyes találata. A kapott relatív gyakoriság értékét vesse össze az elméleti valószínűségértékkel:
a) binomiális,
b) Poisson-eloszlást feltételezve!

33. Egy bolha ugrál a számegyenesen az origóból kiindulva. Másodpercenként egyet ugrik jobbra, egyet balra. Valószínűségi változó, hogy hány másodperc után érkezik vissza az origóba. Végezzen n kísérletet ezen valószínűségi változóra, és ábrázolja a kapott tapasztalati eloszlást! Mi a pontos eloszlás?

34. Adott k rögzített különböző zenei hang és ezeken egy P eloszlás. Utóbbi szerint n-szer választunk hangokat, egymástól függetlenül. Szólaltassa meg a kapott hangsort a számítógéppel. Végezze el a kísérletet, ha a hangsor a hagyományos hétfokú skála!

III.3. Vegyes feladatok

35. Valamely geometriai eloszlásnál a páros számok halmazának a valószínűsége feleakkora, mint a páratlan számok halmazának a valószínűsége. Mennyi az öttel osztható számok halmazának a valószínűsége?

36. Igazolja, hogy a $G(x)=1-pe^{-\lambda x}-(1-p)e^{-\mu x}(x>0,\ \lambda,\ \mu>0,\ 0\le p\le 1)$ függvény eloszlásfüggvény.

37. Egy valószínűségi változó Cauchy-eloszlást követ. Mennyi a valószínűsége, hogy kettőnél kisebb az értéke, feltéve, hogy 1-nél nagyobb értéket vesz fel?

38. Tegyük fel, hogy X standard normális eloszlású és $P(X<x)=0{,}2$. Mennyi x értéke?

39. Egy folytonos eloszlás a (0, 1) intervallumra koncentrálódik. Lehetséges-e, hogy
a) $f(x) < F(x)$ minden $x \in [0, 1)$-re,
b) $f(x) > F(x)$ minden $x \in [0, 1)$-re,
ahol $f(x)$, ill. $F(x)$ az eloszlás sűrűség-, ill. eloszlásfüggvénye?

40. Az X valószínűségi változó $f(x)$ sűrűségfüggvénye nulla a (0, 1) intervallumon kívül, a (0, 1) intervallumban pedig arányos az $\frac{1}{\sqrt{x}}$ függvénnyel. Határozza meg $f(x)$-et!

41. Legyen $F(x) = A\,e^{-Bx}\ (x \ge 0)$.
a) Milyen A és B értékekre lesz $f(x)$ egy valószínűségi változó sűrűségfüggvénye?
b) Adja meg a választott eloszlás eloszlásfüggvényét!

42. Egy normált P eloszlás a $[0, \infty)$ intervallumra koncentrálódik. Bizonyítsa be, hogy

$$P(X > x + y \mid X > x) = 2 \cdot P(X > y)$$

akkor és csak akkor áll fenn minden $x, y > 0$ esetén, ha az eloszlás eloszlásfüggvénye a következő alakú:

$$F(x) = 1 - 0{,}5e^{-\alpha x},\ \text{ha } x > 0, \quad F(x) = 0 \text{ egyébként} \quad (\alpha > 0).$$

43. Legyen $f(x)$ és $g(x)$ egy-egy valószínűségeloszlás sűrűségfüggvénye. Lehetséges-e, hogy
a) $f(x) \le 0{,}75g(x)$ minden x-re?
b) $f(x) + g(x) \le 1$ minden x-re?

44. Valamilyen eljárással generálunk egy nagy természetes számot: M-et, majd az első M darab természetes szám közül egyenletes eloszlás szerint választunk egy számot. Fogadást kötünk egy tétre: ha a másodszorra választott szám első számjegye 1, 2, 3 vagy 4, akkor megnyerjük a tétet, ha az első számjegy 5, 6, 7, 8 vagy 9, akkor elveszítjük.
Előnyös-e számunkra ez a fogadás? Diszkutálja a választ M-től függően!

45. Egy kevert eloszlást a következőképpen értelmezünk: $\frac{1}{4}$ valószínűség egyenletesen oszlik el a (0, 5) intervallumon, a 0, 2, 4 pontok mindegyike pedig $\frac{1}{4}$ valószínűségű. Határozza meg az alábbi intervallumokba esések valószínűségeit: (0, 3], (0, 3), $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, $(-\infty, \infty)$!

46. Legyenek $f(x)$, illetve $F(x)$ egy eloszlás sűrűség-, illetve eloszlásfüggvényei. Igazolja, hogy

a) $x\int\limits_x^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt \to 0, \quad \text{ha } x \to \infty.$

b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)\, f(x)\, dx = 0{,}5.$

47. Legyenek az $X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots$ valószínűségi változók egy p valószínűségű A eseményre vonatkozó független kísérletsorozat karakterisztikus valószínűségi változói. Tekintsük az $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_\alpha$ összeget, ahol feltesszük, hogy α az X_i-ktől független valószínűségi változó, továbbá Poisson-eloszlású, λ paraméterrel. Számítsa ki a teljes valószínűség tétel felhasználásával Y eloszlását!

48. Adott egy folytonos, egy darab szigorú maximumhellyel rendelkező $f(x)$ sűrűségfüggvény. Határozza meg azt a c értéket, amelyre a $P(|X-c| < \varepsilon)$ valószínűség maximális, ahol ε rögzített és az X sűrűségfüggvénye $f(x)$!

49. A tanult nevezetes eloszlások közül melyik illik legjobban az alábbi valószínűségi változók modellezésére?

a) Hányadik autó vesz fel, amikor kiállok az országútra, mert autóstoppal akarok utazni?

b) 10 autó közül hány vesz fel stopposokat?

c) 10 perc alatt hány autó áll meg stopposoknak?

50. Határozza meg az ötös lottón kihúzott, nagyság szerint középső szám eloszlását!

51. Egy hegyi túrán 5 magyar és 4 angol diák vesz részt. Három háromszemélyes sátorban éjszakáznak. Igazságos sorsolással döntik el, hogy ki melyik sátorba kerül. Adja meg a „kétnyelvű" sátrak számának az eloszlását!

52. A „Kocogj velünk!" mozgalom keretében tavaly futóversenyt rendeztek a Duna-kanyarban. A pályát sajnos kullanccsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukon egy, 75-en pedig két kullancsot. Becsülje meg ennek alapján, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen?

53. Igazolja, hogy az n-edrendű, a és b paraméterű hipergeometrikus eloszlás tart a $B(n,p)$ binomiális eloszláshoz, ha $a, b \to \infty$ és $\frac{a}{a+b} \to p$. Az eloszlások jelentésére hivatkozva magyarázza meg ezt a tényt!

54. Egyetemünkön minden hétfőn 18 h-kor sakkszakkör működik egy kis teremben. Annak valószínűsége, hogy egy foglalkozásra senki nem megy el, $e^{-\lambda}$, ahol λ ismert pozitív konstans. Mi a valószínűsége annak, hogy egy adott foglalkozáson részt vevők mindegyike talál magának partnert (a foglalkozáson részt vevők végig ugyanazzal a partnerrel játszanak)?

55. Egy forgalmas autópálya melletti eldugott kisvendéglőhöz délután három és négy óra között kétszer akkora valószínűséggel érkezik két autó, mint egy autó. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egyetlen autó sem érkezik három és négy óra között?

56. Nagyszámú lövést adnak le egy kör alakú célpontra. A nagy távolság miatt azonban az egyes találatok valószínűsége kicsiny. Ezután megismételjük a lövéssorozatot egy feleakkora területű célpontra. Igaz-e, hogy az n-ből k találat valószínűsége kétszer akkora az első sorozatnál, mint a második sorozatnál?

57. Annak valószínűsége, hogy egy veszélyeztetett cseresznyéskertben egy cseresznyében két kukac van, kétszer akkora, mint az, hogy nincs kukac benne. Mi a valószínűsége annak, hogy

a) 20 cseresznyében egyáltalán nincs kukac?

b) csak egy kukac van egy cseresznyében?

c) 20 cseresznyében összesen 20 kukacot találnak?

58. Négy postaládában összesen 12 levelet találtak. Feltéve, hogy az egyes levelek azonos valószínűséggel kerültek a négy postaláda bármelyikébe, határozza meg az első postaládába került levelek számának az eloszlását! Feltéve, hogy a harmadik postaládába 6 levél került, határozza meg az első ládába került levelek számának az eloszlását!

59. Egy örökifjúnak mondott villanykörtetípusról tesztelés után megállapították, hogy az izzó körülbelül azonos eséllyel ég ki x hónapnál hamarabb, x és $x + 1$ hónap között valamely időpontban, illetve $x + 1$ hónapnál később. Mekkora az x?

III.4. Ellenőrző kérdések

60. Igaz-e, hogy kölcsönösen egyértelmű a kapcsolat a
a) valószínűségi változók és az eloszlások között?
b) valószínűségi mértékek mint halmazfüggvények és az eloszlásfüggvények mint pontfüggvények között?

61. Tekinthető-e nem triviális (nem konstans) valószínűségi változónak
a) egy esemény valószínűsége?
b) egy eloszlás legvalószínűbb értéke?
c) n kísérlet során egy esemény relatív gyakorisága?
d) n kísérlet során egy valószínűségi változóra számított mintaátlag?

62. Igaz-e, hogy egy folytonos eloszlás esetén az eloszlás
a) sűrűségfüggvénye, $f(x)$ egyértelműen meghatározott?
b) eloszlásfüggvénye, $F(x)$ egyértelműen meghatározott?
c) $F'(x) = f(x)$ minden valós x-re?
d) sűrűségfüggvényének $f(x)$ értéke megadja az x érték valószínűségét?

63. *a)* Igaz-e, hogy ha egy természetes szám értékű valószínűségi változó örökifjú tulajdonságú, akkor geometriai eloszlású (**3.** *b)* feladat állításának megfordítása)?
b) Lehetséges-e, hogy egy X diszkrét valószínűségi változó geometriai eloszlású, de mégsem azt jelenti, hogy egy független kísérletsorozatnál hányadszorra következik be először egy adott A esemény?

64. Igazak-e a következők?
Egy eloszlás
a) sűrűségfüggvénye folytonos, ha folytonos az eloszlás,
b) eloszlásfüggvénye folytonos, ha folytonos az eloszlás,
c) folytonosságával ekvivalens az eloszlásfüggvény folytonossága,
d) diszkrét, amennyiben tapasztalati eloszlás.

65. Minden eloszlásra igaz-e, hogy
a) van eloszlásfüggvénye?
b) van sűrűségfüggvénye?

66. Van-e különbség
a) eloszlás és eloszlásfüggvény,
b) valószínűségeloszlás és valószínűségi mérték,
c) folytonos eloszlás és folytonos eloszlásfüggvénnyel rendelkező eloszlás között?

67. Meghatározzák-e egy X valószínűségi változóhoz tartozó
a) $P(X = x)$ értékek X eloszlását?
b) $P(X \le x)$ értékek X eloszlásfüggvényét?
c) Meghatározza-e X eloszlásfüggvénye X sűrűségfüggvényét, feltéve, hogy létezik sűrűségfüggvény?

68. Lehet-e $f(x)$ eloszlásfüggvény, ha:
a) $F(0) = 0,\ F(3) = 0{,}63,\ F(6) = 0{,}64,\ F(9) = 0{,}12$?
b) $F(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, ha $x \ge 0$, $F(x) = 0$ egyébként?

69. Lehet-e $f(x)$ sűrűségfüggvény, ha
a) $f(0) = 0,\ f(1) = 100,\ f(1{,}01) = 0$?
b) $f(x) = x + \dfrac{1}{2}$, ha $-\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{3}{2}$, $f(x) = 0$ egyébként?

70. Említse meg néhány következményét annak, ha az eloszlásfüggvény definíciója
a) $F(x) = P(X \le x)$,
b) $F(x) = P(X > x)$,
c) $F(x) = P(X = x)$
lenne!

71. Létezik-e olyan diszkrét egyenletes eloszlás, amelyik végtelen sok értékre koncentrálódik?

72. Sok – kicsi – független. Két nevezetes eloszláscsaláddal kapcsolatban is szerepel e három tulajdonság egyszerre. Melyik ez a két eloszláscsalád, és nevezze meg mindkettő esetében, hogy mi az, ami sok, mi az, ami kicsi, és mi az, ami független!

73. Helyesek-e, ill. értelmesek-e a következő, nevezetes eloszlások alkalmazására vonatkozó állítások? Ha nem, akkor módosítsa őket úgy, hogy helyesek legyenek!

a) Ha egy X számkimenetelű véletlen kísérletnek n db kimenetele lehetséges, akkor X eloszlása modellezhető diszkrét egyenletes eloszlással.

b) Ha egy X véletlen egész szám jelentése az, hogy egy p valószínűségű esemény n db független kísérletből „átlag hányszor következik be", akkor X eloszlása binomiális.

c) Ha egy X véletlen nemnegatív egész szám jelentése az, hogy nagyszámú, kis valószínűségű, független eseményből hány következik be, akkor X eloszlása modellezhető Poisson-eloszlással.

d) Ha egy X véletlen természetes szám jelentése az, hogy egy p valószínűségű eseményre vonatkozó független kísérletsorozatnál hányadik kísérlet az, amikor az esemény először nem következik be, akkor X eloszlása modellezhető geometriai eloszlással.

e) Ha egy X véletlen mennyiség olyan, hogy van két azonos mértékű halmaz, amelyekbe X nem egyenlő valószínűséggel esik, akkor X-re egyenletes eloszlás nem alkalmazható.

f) Ha egy X véletlen mennyiség nagyszámú, független, „kis valószínűségű mennyiség" összege, akkor X eloszlása modellezhető normális eloszlással.

g) Ha egy X véletlen mennyiség tetszőleges intervallumba esésének valószínűsége csak az intervallum hosszától függ, akkor X eloszlása tekinthető exponenciálisnak.

74. Tegyük fel, hogy egy érmével a *fej* dobás valószínűsége p, ahol $0 \le p \le 1$, rögzített. Kódoljuk a fej dobást egyessel, az írás dobást nullával. E megfeleltetésnél kölcsönösen egyértelmű a kapcsolat a végtelen fej–írás dobássorozatok és a $[0, 1]$ intervallumbeli – bináris alakban elképzelt – valós számok között. Definiáljuk a $[0, 1]$ intervallum tetszőleges A részhalmazára a P valószínűséget úgy, hogy az A-ba esés valószínűsége annak a valószínűsége, hogy egy végtelen fej–írás dobássorozat bináris kódoltja, mint 0 és 1 közötti valós szám, A-ba esik, feltéve, hogy ez a valószínűség létezik.
Diszkrét, folytonos vagy szinguláris $[0, 1]$-en ez az eloszlás?

75. Egy véletlenül választott magyar ember életének években mért hossza valószínűségi változónak tekinthető. Milyen eloszlást érez jogosnak a lehetséges 0, 1, 2, … kimeneteleken? Más-e az eloszlás, hogyha nem Magyarországon, hanem valamely egyéb országban vizsgálódunk? Hogyan nézne ki az eloszlás, ha nem ma, hanem pl. 1944-ben gondolkodnánk?

IV. Skalár valószínűségi változók (egydimenziós eloszlások) paraméterei. Paraméterszámolás*

(i) *Várható érték* (*átlagérték*): diszkrét valószínűségi változóra (*diszkrét* eloszlásra)

$$M(X) = \sum_i x_i P(X = x_i),$$

feltéve, hogy $\sum_i |x_i| P(X = x_i) < +\infty$.

Folytonos valószínűségi változóra (*folytonos* eloszlásra)

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx,$$

feltéve, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx < +\infty$, ahol $f(x)$ az X sűrűségfüggvénye és az integrál Riemann-(improprius) integrál.

A várható érték *lineáris funkcionál,* azaz

$$M(c_1 X + c_2 Y) = c_1 M(X) + c_2 M(Y).$$

A várható érték minimáltulajdonsága: $M((X-c)^2)$ minimális, ha $c = M(X)$.

Szórás:

$$D(X) = \sqrt{M(X - M(X))^2}.$$

* Az elméleti összefoglaló a IV–V. fejezetre közösen vonatkozik.

A *szórásnégyzetre (varianciára)* fennáll, hogy

$$D^2(X) = M(X^2) - M^2(X),$$

feltéve, hogy a szereplő mennyiségek léteznek. Itt $M(X^2) = M_2$ az X második momentuma.

Azaz *diszkrét* valószínűségi változóra:

$$D^2(X) = \sum_{i=n}^{\infty} x_i^2 P(X = x_i) - M^2(X),$$

folytonos valószínűségi változóra

$$D^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X).$$

Ha X és Y független valószínűségi változók, akkor

$$D^2(c_1 X + c_2 Y) = c_1^2 D^2(X) + c_2^2 D^2(Y).$$

Várható érték és szórás kapcsolata: *Csebisev-egyenlőtlenség*

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) > 1 - \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}$$

minden $\varepsilon > 0$ valós számra.

Standardizálás: az

$$\frac{X - M(X)}{D(X)}$$

valószínűségi változó 0 várható értékű és 1 szórású.

Átlagos ingadozás: $M|X - M(X)|$.

Medián: X-nek mediánja minden a érték, melyre $F(a) \le \frac{1}{2} \le F(a+0)$, ahol $F(x)$ az X eloszlásfüggvénye. Tehát, ha $F(x)$ szigorúan monoton, akkor az az a érték, amelyre $F(a) = \frac{1}{2}$.

A medián minimáltulajdonsága: $M|X - c|$ minimális, ha c a medián.

Módusz: Diszkrét valószínűségi változó minden olyan lehetséges értéke, amelynél nincs valószínűbb érték.
Minimáltulajdonságok a varianciára (Steiner-):

$D^2(X-c)$ minimális, ha $c = M(X)$,
$D^2|X-c|$ minimális, ha c a medián.

(ii) *Néhány nevezetes eloszlás várható értéke, szórása és módusza:*

	várható érték	*szórás*
Binomiális	np	$\sqrt{np(1-p)}$
Poisson-	λ	$\sqrt{\lambda}$
Geometriai	$\frac{1}{p}$	$\frac{\sqrt{1-p}}{p}$
(a, b)-n egyenletes	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{\lvert b-a\rvert}{2\sqrt{3}}$
Exponenciális	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$
Normális	m	σ

A binomiális eloszlás módusza $[(n+1)p]$, illetve, hogyha $(n+1)p$ egész szám, akkor az $(n+1)p-1$ érték is. A Poisson-eloszlás módusza $[\lambda]$, illetve, ha λ egész szám, akkor a $\lambda-1$ érték is. A geometriai eloszlás módusza 1.

(iii) *Normális és binomiális eloszlás kezelése*
Ha egy valószínűségi változó n darab független, M várható értékű és D szórású valószínűségi változó összege, akkor várható értéke nM, szórása $\sqrt{n}D$. Ez alkalmazható speciálisan a centrális határeloszlás-tételben szereplő közel normális eloszlású összegre.
Normális eloszlás *visszavezetése standard normális eloszlásra:* ha Y $N(m, \sigma)$ eloszlású, akkor

$$P(Y<x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \text{ továbbá } P(|Y|<x) = 2\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) - 1.$$

Binomiális összeg közelítése normális eloszlással:

$$\sum_{k=N}^{M}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \approx \Phi\left(\frac{M-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{N-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right), \text{ ha } n \text{ nagy.}$$

(iv) *Nagy számok* várható értékre vonatkozó *gyenge törvénye:*

$$P(|X-\bar{x}| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2(X)}{n\varepsilon^2},$$

ahol $\bar{x}$ a mintaátlag. Tehát a bal oldal 0-hoz tart, ha $n \to \infty$.
Speciálisan, valószínűségre:

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2} < \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

(v) Az n dimenziós mintatér egy pontjához tartozó valamely tapasztalati paraméter a ponthoz tartozó tapasztalati eloszlás megfelelő paramétere.
A nagy számok erős törvényének következménye, hogy ha létezik a valószínűségi változóhoz tartozó eloszlásnak várható értéke, akkor $n \to \infty$-re a *tapasztalati várható érték* az elméletihez konvergál, 1 valószínűséggel; ha viszont nem létezik, akkor 1 valószínűséggel divergens. Hasonló állítások érvényesek a többi tapasztalati paraméterre is.

Az **(iv)** és **(v)**-beli konvergenciák gyorsasága pontosabban becsülhető normális eloszlás segítségével, erre majd az utolsó, XIV. fejezetben térünk rá.

(vi) A várható értékkel a véletlen mennyiség *átlagértékét* modellezhetjük. (Tehát nem a „várható értéket" a kifejezés hétköznapi értelmében, utóbbit a módusz modellezi.)
A véletlen mennyiség *átlagérték körüli átlagos ingadozását* (a kockázatot) bizonyos értelemben a szórás modellezi. Hasonló a szerepe az abszolút értékkel mért átlagos ingadozásnak is.

vii) A véletlen mennyiségek paraméterei (pl. várható érték, szórás, módusz stb.) gyakran jól mérhetőek tapasztalatilag (statisztikailag). Ez lehetőséget ad ismert eloszláscsaládok esetén eloszlások konkrét megszorítására, az eloszláscsalád paraméterei jelentésének ismeretében.

viii) *Empirikus statisztika:* Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független méréssorozat egy adott véletlen mennyiségre. Ekkor a *tapasztalati várható érték, tapasztalati szórás, tapasztalati medián, tapasztalati módusz* rendre a méréssorozathoz rendelhető tapasztalati eloszlás mint diszkrét eloszlás várható értéke, szórása, mediánja, módusza. Így például a tapasztalati várható érték

$$\bar{x} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n},$$

illetve a tapasztalati szórás

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2}\,.$$

A tapasztalati paraméterek egyúttal a véletlen mennyiséghez tartozó eloszlás megfelelő paramétereinek egyik lehetséges becslései – feltéve, hogy a megfelelő elméleti paraméterek léteznek.
A nagy számok gyenge törvényei, illetve normális eloszlás segítségével a közelítés pontosságát, a konvergenciagyorsaságot tudjuk becsülni.

Megjegyzés: Paraméterekkel kapcsolatos feladatok egy lehetséges osztályozása:

a) Adott a valószínűségi változó eloszlása, és számítsuk ki bizonyos paramétereit (IV. fejezet).

b) Adottak bizonyos paraméterek, határozzuk meg a konkrét eloszlást az eloszláscsalád ismeretében (V. fejezet).

IV.1. Gyakorlófeladatok

1. A $p(k) = \frac{1}{30}k^2$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ képlettel értelmezett diszkrét eloszlásnak mennyi a szórása?

2. Hogyan válasszuk meg a c konstans értékét, hogy az $\frac{1}{6}$ paraméterű geometriai eloszlásból az $y = (x - c)^2$ transzformációval nyerhető eloszlás várható értéke a lehető legkisebb legyen?

3. Legyen $p_k = cp(1-p)^{2k-1}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ egy valószínűségeloszlás. Határozza meg az eloszlás várható értékét!

4. Igazolja, hogy a $(k+1)p^2(1-p)^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ formulával definiált, ún. másodrendű, p paraméterű negatív binomiális eloszlás (Pascal-eloszlás) valóban valószínűségeloszlás! Hogyan keresné meg az eloszlás móduszát?

5. Legyen egy diszkrét eloszlás a következő:

$$x_k = (-1)^k \frac{2^k}{k}, \quad p_k = \frac{1}{2^k} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Igazolja, hogy nincs várható értéke!

6. Egy eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \le 1, \\ \dfrac{2}{x^3}, & \text{ha} \quad x > 1. \end{cases}$$

Igazolja, hogy az eloszlás várható értéke létezik, de szórása nem!

7. A standard normális eloszlást csonkítjuk a $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ intervallumra. Határozza meg a kapott eloszlás várható értékét!

8. Egy X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \sin x \qquad \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right).$$

Határozza meg

a) X várható értékét,

b) mediánját!

9. Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{3}{8}x^2 \quad (0 < x < 2).$$

Határozza meg az eloszlás

a) várható értékét,

b) mediánját,

c) szórását!

10. Egy valószínűségi változó varianciája 7, várható értéke 2. Mennyi a második momentuma?

11. Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad \text{ha} \quad x > 1.$$

Mely c értékre minimális, ha van ilyen c érték,

a) az $M|X - c|$ érték?

b) az $M(X - c)^2$ érték?

12. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, M várható értékű, D szórású valószínűségi változók. Határozza meg az $\dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ átlag

a) várható értékét,

b) szórását!

IV.1.1. Nevezetes eloszlások

13. Egy futószalagot leállítanak, valahányszor hibás termék kerül le róla. Határozza meg a két leállás között készült termékek várható számát és szórását, ha a hibás gyártmányok egymástól függetlenül, egyedenként 0,07 valószínűséggel keletkeznek!

14. Háromszor olyan valószínű, hogy egy évben két ember öli magát a Szajnába, mint az, hogy 5.

a) Mire tippel, hány ember öli magát a Szajnába egy évben?

b) Mi a valószínűsége, hogy senki nem lesz így öngyilkos egy év alatt?

c) Átlagosan hány ember választja az öngyilkosságnak ezt a módját?

15. Egy színiiskolába kétlépcsős felvételivel lehet bekerülni. A vizsgabizottság szeszélyei miatt közelítőleg igaz a következő modell: az első vizsgán a jelöltek $\frac{1}{3}$ valószínűséggel felelnek meg, a második lépcsőn pedig $\frac{1}{4}$ a valószínűsége annak, hogy egy, az első szűrőn túljutott jelölt megfelel. A különböző felvételizők vizsgaeredményei nem befolyásolják egymást. Tegyük fel, hogy 35 jelentkező van.

a) Mi a bejutottak számának a várható értéke?

b) Becsüljük meg, hogy mi a felvettek legvalószínűbb száma!

16. Egy forgalmas országútszakaszon, ahol egyébként is szoktak radarozni, figyelik, hogy 5 perc alatt hány autó lépi át a megengedett sebességhatárt. Tudjuk, hogy valószínűbb az, hogy lesz ilyen autó, mint az, hogy nem lesz. Adjon minél élesebb alsó becslést annak valószínűségére, hogy pontosan 3 autó lépi át a megengedett sebességhatárt!

17. 1000 házasság közül kb. 400 válással végződik. 60 véletlenül kiválasztott házasság esetén mi a válások számának

a) várható értéke,

b) legvalószínűbb értéke,

c) szórása?

18. Árulom a lakásunkat. Egymástól függetlenül és egymás után érkeznek az árajánlatok, amelyek nagysága azonos eloszlásúnak tekinthető, F eloszlásfüggvénnyel. Elfogadom az első olyan ajánlatot, amely eléri az általam kért K Ft-ot. Határozza meg a lakás eladásáig beérkező ajánlatok számának várható értékét!

19. Egy kisvállalkozó 3 autót tart fenn bérbeadásra. Minden egyes autóra a napi kiadása 600 tallér, függetlenül attól, hogy az autót bérbe veszik-e vagy sem. Egy-egy autó napi bérleti díja 7000 tallér. Nagy a kereslet autóbérlésre, és ez a vállalkozás szinte még ismeretlen. Ha naponta átlagosan ketten kívánnak autót bérelni, akkor mennyi az üzlet átlagos napi nyeresége?

20. Egy p valószínűségű eseményre tekintsük a következő két játékot: Az egyik játéknál egy kísérletet végzünk A-ra, és a nyereség értéke $X_A - p$, ahol X_A az A esemény indikátorváltozója. A másik játéknál 100 kísérletet végzünk A-ra és a nyereség értéke $\frac{k_A}{100} - p$, ahol k_A a 100 kísérlet során kapott relatív gyakoriság.

a) Méltányos-e a két játék?
b) Melyiknél nagyobb a kockázat?

21. Azt mondják a zöldségesek, hogy 100 esetből körülbelül ötször fordul elő, hogy egy zsák krumpli súlya az előírttól 50 dekával többel tér el. Normális eloszlás alkalmazásával mire következtethetünk ebből a zsákok súlyának szórására vonatkozóan?

22. A polóniumatom bomlási ideje örökifjú tulajdonságú valószínűségi változó. Egy ilyen atom 140 nap alatt $\frac{1}{2}$ valószínűséggel elbomlik.

a) Mennyi a polóniumatom várható élettartama és szórása?
b) Mekkora az az időtartam, amikor egy polóniumatom 95% valószínűséggel elbomlik?

23. Egy gerelyhajító dobásainak hossza 78 m várható értékű, 4 m szórású normális eloszlású valószínűségi változó. Mennyi a 80 m feletti dobásainak a várható értéke?

IV.1.2. Általános eloszlások

24. Tételezzük fel rendre az A, B, C és D Ft fix nyereményeket a lottón, a 2, 3, 4, 5 találat esetére. α forintos jegyárral számolva, egy szelvénnyel fogadva, mekkora nyereségünk várható értéke?

25. Tegyük fel, hogy egy lottószelvény árát tesszük fel a ruletten a pirosra. Többet kockáztatunk-e, mint ha lottóztunk volna? Hogyan vizsgálná a problémát?

26. Határozza meg az ötös lottón kihúzott számok nagyság szerinti második legnagyobbikának a móduszát!

27. Két játékos közül az első egyszerre 3 darab forintos érmét dob fel, a második játékos pedig 2 darabot. Az nyer, aki több fejet dobott, és nyereségként megkapja a másik játékos feldobott érméit. Ha a fejek száma azonos, addig folytatják a játékot, amíg valamelyikük nem nyer. Mi az első játékos nyereségének várható értéke?

28. Péter, ha kockával páratlant dob, 10 Ft-ot veszít, ha hatost dob, 40 Ft-ot nyer, ha kettest vagy négyest dob, újból dobhat. A második dobásnál 10 Ft-ot nyer, ha párost dob, 20-at veszít, ha páratlant dob. Előnyös-e ez a játék számára?

29. Sorsjátékon 1 db 50 000 Ft-os, 10 db 5000 Ft-os, 50 db 1000 Ft-os nyeremény van, és összesen 10 000 sorsjegy. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy darab sorsjegy esetén a nyeremény várható értéke a jegy árának fele legyen?

30. Gázmolekulák sebessége Maxwell-eloszlású valószínűségi változó. Sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \le 0 \\ \dfrac{4h^3}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2h^2}, & \text{ha} \quad x > 0, \end{cases}$$

ahol $h > 0$ paraméter. Számítsa ki a sebesség várható értékét!

31. Egy sorompó a nap 24 órájából 9-et függőlegesen áll, 12-t vízszintesen. 3 órányi időt vesz naponta igénybe, amíg le és fel húzogatják, ezalatt forgása egyenletes szögsebességű. Mi a sorompókar vízszintessel bezárt szögének várható értéke?

32. Egy $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$-re koncentrált tömeg eloszlásának sűrűségfüggvénye számszorosa a $\cos x$ függvénynek. Melyik $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$-beli pontra lesz minimális e tömegeloszlásnak a pontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka?

33. Pista és Józsi egy ismeretlen eloszlású X valószínűségi változó értékére tippelnek úgy, hogy veszteségük a tipp és a tényleges érték különbségének négyzete. Pista minden játékban 7-re tippel, míg Józsi mindig 4-re. András (aki jól ért a valószínűségszámításhoz) megfigyelte, hogy hosszú távon (sok független tippelés után) Pista átlagos vesztesége 5 Ft, míg Józsié 2 Ft. Mire fog tippelni ezt látva András, és mennyi lesz az ő átlagos vesztesége?

IV.2. Szimuláció és statisztika

34. Egy X valószínűségi változóra a következőket mérték:

4; 3,5; 0; 3,5; 1; 1.

Határozza meg a mintához tartozó
a) tapasztalati eloszlásfüggvényt,
b) tapasztalati várható értéket és szórást,
c) mediánokat és kvartiliseket!

35. A 0,6; 5,2; 4,1; 3,2 adatrendszerrel kapcsolatban milyen c szám(ok)ra minimális a c-től való átlagos
a) abszolút eltérés?
b) négyzetes eltérés?

36. Egy mérési gyakorlaton építészhallgatók egy 80 m-es toronyház magasságát mérik meg, egymástól függetlenül. A 40 hallgató mérési eredményei rendre: $X_1, X_2, \ldots, X_{40}$. Tudjuk, hogy a mért értékek a valódi magasság mint várható érték körül ingadoznak, normális eloszlás szerint, 2 m szórással. Milyen értékkel közelíthetjük a mért értékeknek a valóditól való átlagos eltérését, azaz az

$$\frac{|X_1 - 80| + |X_2 - 80| + \ldots + |X_{40} - 80|}{40}$$

számot?

37. Adjon össze 40 darab [0, 1]-en egyenletes eloszlású, független véletlen számot, és standardizálja az összeget. Végezze el ezt a kísérletet n-szer, és szemléltesse a kapott eloszlást hisztogrammal! Hasonlítsa össze az eredményt a standard normális eloszlással!

38. Szemléltesse a Galton-deszka működését N emelet esetére, és vesse össze a legurult golyók elhelyezkedését a várt binomiális, ill. normális eloszlással, ha n golyóval kísérletezünk!

39. A következő adatokat kapták a heti tv-nézési időre, órában, egy 23 diákkal végzett felmérésnél: 3, 6, 14, 21, 4, 15, 20, 28, 45, 20, 5, 4, 4, 35, 10, 60, 11, 12, 9, 10. Számítsa ki a mediánt és a kvartiliseket!

40. Szimulálja n-szer a tétduplázásos rulettstratégia működését (**75.** feladat), mindig konstans 2^N-1 alapú tőkét feltételezve. Írassa ki, hogy mennyi ezalatt az összes nyeresége (vesztesége)!

41. Hogyan becsülné a következő integrál értékét $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$-beli egyenletes eloszlású véletlen számok segítségével: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$?

Normális eloszlás alkalmazása segítségével számítsa ki, hogy legalább hány mérést kell ahhoz végezni, hogy a becslés legalább 0,99 valószínűséggel 0,01-nél jobb pontossággal közelítse a valódi értéket! Hajtson is végre ennyi mérést és számítsa ki a közelítés pontosságát!

42. A **19.** feladathoz kapcsolódóan, szimulálja a vállalkozó üzletmenetét, írassa ki (esetleges) napi és havi nyereségét!

43. A **86.** feladathoz, a „bankos” játékhoz kapcsolódóan szimulálja az optimális stratégia esetére a játékot! Írassa ki a nyereséget (veszteséget)!

44. A **79.** feladathoz kapcsolódóan szimulálja az országút forgalmát és regisztrálja, hogy hány autó elhaladását kell megvárni, amíg rá tudunk kanyarodni az országútra!

45. A **83.** feladathoz kapcsolódóan, szimulálja az évi balesetek számait! A 10-edik évben esedékes biztosítási díjat vesse össze az elméletileg várttal!

IV.3. Vegyes feladatok

46. Igazolja, hogy

$$x(1-F(x))\to 0\,,\ \text{ha}\ x\to\infty\,,\ \text{illetve}\ xF(x)\to 0\,,\ \text{ha}\ x\to\infty\,,$$

ahol $F(x)$ folytonos eloszlás eloszlásfüggvénye és az eloszlás várható értéke létezik!

47. Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó csak az $x_1, x_2, \dots, x_k$ pozitív értékeket veheti fel. Igazolja, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M(X^{n+1})}{M(X^n)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{M(X^n)}=\max_{1\le i\le k}\{x_i\}\,.$$

48. Egy eloszlás értékei az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számokon: $\frac{2}{20}, \frac{1}{20}, \frac{3}{20}, \frac{6}{20}, \frac{4}{20}, \frac{1}{20}, \frac{3}{20}$. Módosítsa az eloszlást úgy, hogy

a) a módusz ne változzon, de a várható érték nőjön!
b) a várható érték ne változzon, de a módusz nőjön!

49. A 0,6 paraméterű Poisson-eloszlást csonkítsa a [2, 5] intervallumra, és számítsa ki a csonkított eloszlás várható értékét!

50. Legyen X nemnegatív egész értékeket felvevő valószínűségi változó. Igazolja, hogy $M(X)=\sum_{n=0}^{\infty}P(X>n)$.

IV.3.1. Nevezetes eloszlások

51. Egy radioaktív forrás n radioaktív részecskét bocsát ki egy bizonyos periódus alatt. Egy Geiger–Müller-számláló 10^{-4} valószínűséggel regisztrál minden egyes részecskét. Becsülje meg, legalább hány részecskét kell a forrásnak kibocsátania ahhoz, hogy a számláló 0,99 valószínűséggel legalább négy részecskét regisztráljon egy periódus alatt!

52. Egy adott üzemben gyártott harisnyák között átlag minden ezredik hibás. A harisnyákat kétszázával csomagolják dobozokba. 1000 doboz közül átlag hány olyan lesz, amely csak hibátlan harisnyákat tartalmaz?

53. Egy tankör 30 hallgatójának mindegyike egymástól függetlenül, $\frac{3}{4}$ valószínűséggel jár valószínűségszámítás-órára.

a) Átlagosan hányan vannak jelen?
b) Melyik létszám a legvalószínűbb?
c) Mennyi a jelenlévők számának szórása?

54. Egy mérésnél 0,1 valószínűséggel mérünk 10,2-nél kisebb értéket, 0,25 valószínűséggel 13,6-nál nagyobb értéket. Mennyi a mérés várható értéke és szórása (modellezzen normális eloszlással)?

55. Egy számítógéphez n terminál van hozzákapcsolva. Adott időpillanatban mindegyik $\frac{2}{3}$ valószínűséggel küld üzenetet a gépnek, de a vétel csak akkor hibátlan, ha csak egy terminál küldött üzenetet.

a) Ha 15 független időpillanatot tekintünk, akkor mi az ezen időpontok alatt a gép által hibátlanul vett üzenetek várható száma?
b) Mi a 15 időpillanat alatt a terminálok által összesen leadott üzenetek várható száma?

56. Határozza meg egy p valószínűségű A esemény n kísérletnél tapasztalt $\frac{k}{n}$ relatív gyakoriságának (n rögzített) mint valószínűségi változónak

a) az eloszlását!
b) a móduszát!

57. A binomális eloszláshoz vezető alapfeladatot módosítsuk úgy, hogy a k-adik kísérletnél a bekövetkezés valószínűsége legyen p_k, p helyett ($k = 1, 2, \ldots, n$). Határozza meg a sikeres bekövetkezések számának várható értékét és varianciáját!

58. Annak valószínűsége, hogy egy évben egyetlen repülőgép sem zuhan le, 0,1. Mire tippel, hány repülőgép fog lezuhanni a következő évben?

59. Egy bergengóc csomagolóautomata által töltött zsákok súlya normális eloszlású. A zsák súlyhiányos, ha súlya 99 kg alatti, megfelelő, ha 99 és 101 kg közötti, túlsúlyos, ha 101 kg feletti. Tudjuk, hogy kb. a zsákok 2,28%-a súlyhiányos, 81,85%-a megfelelő. Írja fel a túlsúlyos zsákok átlagsúlyát integrál alakban!

60. Egy motor a bekapcsoláskor 0,01 valószínűséggel kiég. Legyen a valószínűségi változó értéke a kiégésig végbemenő bekapcsolások száma. Határozza meg e szám eloszlását, várható értékét és szórását!

61. Egy szabályos oktaédert, melynek lapjait 1-től 8-ig megszámoztuk, újra és újra feldobunk, és feljegyezzük azt a számot, amelyre esett. Az *a)* esetben addig dobáljuk az oktaédert, amíg valamelyik szám kétszer is előfordul; a *b)* esetben addig, amíg két egymás utáni dobásnál ugyanazt a számot kapjuk. Számítsa ki mindkét kísérletnél annak a valószínűségét, hogy k-szor dobtuk fel az oktaédert, és határozza meg a kapott eloszlások móduszait is!

62. 20 ember között sorsolnak ki 9 külföldi nyaralást. A húsz személy között 12 családos.
a) Mi a valószínűsége, hogy a 9 nyertes között 7 családos?
b) Mi a kisorsolt családosok számának legvalószínűbb értéke?

63. Fogpiszkáló hossza m várható értékű, $\frac{1}{2}$ szórású, normális eloszlású X valószínűségi változó. Véletlenül kihúzunk egy fogpiszkálót egy dobozból és a következőt játsszuk: Ha $X < 5$, akkor nem nyerünk, ha $5 \le X \le 6$, akkor 12 zsetont nyerünk, ha $X > 6$, akkor 8 zsetont nyerünk.
a) Hány zseton lesz nyereségünk várható értéke m-mel kifejezve?
b) Milyen m-re lesz nyereségünk várható értéke maximális?

64. A III.**18.** feladathoz kapcsolódóan, a bolha $\frac{1}{3}$, ill. $\frac{2}{3}$ valószínűséggel ugráljon jobbra vagy balra, összesen n-szer. Határozza meg az érkezési helye koordinátájának várható értékét!

65. Biztosítótársaságok adatai alapján megállapítható, hogy bizonyos káresetek során a kár értékének nagysága olyan valószínűségi változó, melyet az $m = 0$ és $\sigma > 0$ paraméterű normális eloszlás pozitív értékekre csonkított eloszlása jellemez.
a) Írjuk fel a kérdéses csonkított eloszlás sűrűségfüggvényét!
b) Számítsuk ki a kárösszeg várható értékét!

66. Két kosaras felváltva dob. Ha az egyikük dobása sikeres, akkor abbahagyják a dobálást. Az első dobó 0,5, a második 0,6 valószínűséggel dob sikeresen. Mi a kosárra dobások számának
a) várható értéke?
b) szórása?

67. Egy autóstoppost az elhaladó autók mindegyike p valószínűséggel vesz fel. A stoppos megszámolja, hányadik autó vette fel – e szám valószínűségi változó.
a) Mennyi a várható értéke?
b) Mekkora a legvalószínűbb érték?

IV.3.2. Általános eloszlások

68. Albert és Béla a következőt játsszák. Mindketten feldobnak egy dobókockát, majd Albert annyi Ft-ot kap Bélától, amennyi a két kockán lévő pontok különbségének a négyzete. Béla meg annyit, amennyi a két kockán levő pontok összege. Melyiküknek kedvez a játék?

69. Egy szabályos pénzérmét addig dobálunk, amíg mind fejből, mind írásból kettőt nem dobunk. Az ehhez szükséges dobások számát jelölje X. Határozza meg X legvalószínűbb értékét!

70. Egy alkatrész élettartama napokban kifejezve 0,002 paraméterű, geometriai eloszlású valószínűségi változó. Feltéve, hogy 1000 nap után még üzemel, mi a még hátralevő élettartamának várható értéke?

71. Egy alkatrész élettartamának sűrűségfüggvénye $f(x)=\dfrac{2}{x^3}$, ha $x>1$. Mit állíthatunk az alkatrész élettartamának
a) átlagáról?
b) szórásáról?

72. A várható érték fogalmának felhasználásával alkosson egyszerű modellt arra, hogy n megállót villamossal utazva, érdemes-e potyázni!
Tételezzük fel, hogy a jegy ára A Ft, a potyázás bírsága B Ft és p annak valószínűsége, hogy két megálló között ellenőrrel találkozunk. Diszkutálja n-től függően a problémát!

73. Az 1, 2, …, 100 számok közül kiválasztunk hatvanat úgy, hogy mind a $\binom{100}{60}$ lehetőség esélye egyforma legyen. Határozza meg a kihúzott számok közül a nagyság szerinti 25-ödik móduszát!

74. Egy bizonyos vizsgáztatónál a vizsgáztatás időtartamának mint valószínűségi változónak a sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\frac{5}{32}x^4 \quad (0<x<2).$$

Határozza meg a vizsgáztatás idejének várható értékét, mediánját és szórását!

75. Tétduplázásos rulettstratégia: 2^N-1 zseton tőkével kezdjük a játékot és addig játszunk, amíg nem nyerünk vagy el nem fogy a tőkénk. Először felteszünk 1 zsetont a pirosra. Ha nyerünk, akkor abbahagyjuk a játékot, ha veszítünk, akkor tovább játszunk és felteszünk 2 zsetont a pirosra. Ha nyerünk, abbahagyjuk a játékot, ha veszítünk, akkor felteszünk 4 zsetont a pirosra. Ha nyerünk, leállunk, ha veszítünk, akkor felteszünk 8 zsetont a pirosra stb. Számítsa ki nyereségünk (veszteségünk) várható értékét!

76. Minimális kockázat rulettstratégia: A játékhoz összesen 1 zsetonra van szükségünk. Feltesszük pl. a pirosra az 1 db zsetont. Ha veszítünk, akkor abbahagyjuk a játékot, ha nyerünk, akkor felteszünk a pirosra 2 db zsetont. Ha veszítünk, akkor abbahagyjuk a játékot, ha nyerünk, akkor felteszünk a pirosra 3 db zsetont stb. Addig játszunk, amíg a fekete vagy a 0 ki nem jön. Írja fel a nyereség (veszteség) várható értékét szumma alakban!

77. Klára átlagosan 5 percet beszél telefonon, a beszélgetés időtartama örökifjú. Mennyi a beszélgetés díjának várható értéke, ha a telefonbeszélgetés ára percenként A Ft?

78. Feldobunk n darab pénzérmét. Azokat, amelyek „fej"-re esnek, félretesszük, a többit újra feldobjuk. Azokat, amelyek ismét „fej"-re esnek, félretesszük, a többit pedig újra feldobjuk. És így tovább, addig dobjuk fel a visszamaradó érméket, amíg csak van mit feldobnunk.
a) Határozza meg a dobások számának az eloszlását $n=2$, 3-ra!
b) Határozza meg a dobások számának a várható értékét $n=2$-re!
c) Határozza meg a dobások számának várható értékét $n=3$-ra!

79. Országút egyik sávjának forgalmát figyeljük meg a mellékútvonalról. Az egyes elhaladó autók érkezései közötti időpontok exponenciális eloszlásúak, 5 mp átlaggal. 10 mp kell ahhoz, hogy a mellékútvonalról rákanyarodjunk az országútra.
a) Mi a valószínűsége, hogy az országútra kanyarodáshoz k autót kell megvárnunk?
b) Mennyi a megvárandó autók számának várható értéke?

80. Dobókockát dobálunk addig, ameddig valamelyik dobás nem ismétlődik. Mi a szükséges dobások számának várható értéke?

81. Valaki átlagosan 4 percet beszél telefonon. Hogyan tippeljünk, hány percet fog az illető egy alkalommal beszélni, ha a tippelésünk és a valódi beszélgetés időtartama közötti abszolút eltérés átlagát szeretnénk minimalizálni (a telefonálás időtartamára exponenciális eloszlást feltételezzünk!)?

82. Mosóporvásárlásnál hatféle matricát kell összegyűjteni a minden dobozban megtalálható egyes matricákból ahhoz, hogy ingyen kapjunk egy doboz mosóport. Átlagosan hány doboz mosóport kell ehhez vásárolni?

83. Egy sportoló évi baleset-biztosítási díja $a=3000$ Ft, és $p=0{,}1$ valószínűséggel szenved egy évben balesetet. A biztosítás feltétele olyan, hogy ha egy évig nincs balesete, akkor a következő évben már csak $(p\cdot a)$ Ft-ot fizet, de ha van balesete, akkor ismét a Ft-ot. A harmadik évben, ha a második évben sem volt balesete, akkor $(p^2\cdot a)$ Ft biztosítást fizet, de ha volt a második évben balesete, akkor ismét a Ft-ot, és így tovább. Tíz évre köt valaki biztosítást. Adja meg a tizedik évben esedékes biztosítási díj eloszlását és várható értékét!

84. Én és a kisöcsém minden héten változatlanul ugyanazokat a számokat játszszuk meg a lottón egy-egy szelvényen. Szerencseszámainkból pontosan 3 közös, ami cseppet sem véletlen, hiszen jó testvérek vagyunk. Ma reggel a barátom közölte velem, hogy a kisöcsémnek 4-ese volt a lottón, bár a barátom a nyertes 5 számot nem ismerte. Számolja ki ezután találataim számának várható értékét!

85. Pista és Zoli kockáznak. Pista egy piros, Zoli egy zöld kockát dob fel. Ha Pista egyest vagy kettest dob, ő nyer és kap Zolitól 5 Ft-ot, ha Zoli hatost dob, ő a nyertes és 11 Ft-ot kap Pistától. Ha egyikük sem nyer, vagy mindketten egyszerre dobnak nyerőt, akkor nem fizetnek, hanem elölről kezdik a játékot. Zoli azt javasolja, hogy ne koptassanak két kockát, hanem inkább kérjék meg Ferit, dobáljon ő az egyetlen fekete kockájával, de a nyerési és fizetési feltételek maradjanak változatlanok. Érdemes-e elfogadni Pistának Zoli ajánlatát?

86. Egy játékos 250 Ft-ot befizet a banknak, majd egy kockával, amelynek öt oldala zöld, hatodik pedig fekete, egy sorozatot dob. Bármelyik dobás után bejelentheti, hogy nem akar tovább játszani, és ilyenkor annyiszor 100 Ft-ot kap, ahány zöldet dobott addig. Ha viszont bármikor is feketét dob, akkor vége a sorozatának és semmit sem kap a banktól. Keresse meg a játékos számára optimális stratégiát és győződjön meg arról, hogy még az is veszteséges!

87. Határozza meg az ötös lottón kihúzott számok összegének várható értékét!

88. Egy tanteremben tíz db kétüléses pad található. 10 fiút és 10 lányt ültetnek le véletlenszerűen. Hány olyan pad lesz átlagosan, amelyben fiú és lány is ül?

89. Egy tánciskolában n fiú mindegyike, egymástól függetlenül, kiszemel egy lányt az n lány közül, akivel táncolni szeretne (feltesszük most, hogy a lányok „esélyei" minden fiúnál egyenlők). Határozza meg azon lányok számának várható értékét, akiket senki sem választott! Nagy n-re kb. hányad része ez az összes lánynak?

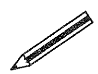
90. Véletlenszám-generátorral állítunk elő egy végtelennek tekinthető 0–1 sorozatot. Határozza meg a „szériák" hosszának eloszlását és várható értékét (széria az egymás után következő, azonos jelekből álló véges részsorozat, pl. 1000001-ben 00000 egy öt hosszúságú széria)!

91. Egy borgazda arról értesül, hogy az egyik szállító tartálykocsijának tartálya kilyukadt. Gyorsan a helyszínre siet és addig is próbálja megbecsülni, hogy az eredetileg háromnegyedéig megtöltött tartályban maradhatott-e bor, és ha igen, akkor mennyi (egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a tartály egységkocka alakú és a perforáció egyenletes eloszlás szerint keletkezhet a felületen). Mennyi a tartályban maradt bor mennyiségének várható értéke?

92. Egy közlekedési lámpa egy percig mutat zöldet és fél percig pirosat, váltakozva. Időben egyenletes eloszlás szerint érkezünk a lámpához. Határozza meg a zöldre várakozás idejének eloszlását és várható értékét!

V. Skalár valószínűségi változók (egydimenziós eloszlások) paraméterei. Adott paraméterek (eloszlások megszorítása)

Nevezetes eloszlások. Nagy számok gyenge törvényei.
Csebisev-egyenlőtlenség. Normális eloszlás kezelése.
Centrális határeloszlás-tétel



V.1. Gyakorlófeladatok

1. Létezik-e olyan
a) binomiális eloszlás, amelynek várható értéke 6-tal, szórása pedig 1-gyel egyenlő?
b) diszkrét eloszlás, amelynek várható értéke és szórása megegyezik?

2. Létezik-e olyan
a) geometriai eloszlás,
b) Poisson-eloszlás,
amelynek várható értéke kétszerese a móduszának?
Ha nem, bizonyítsa be, ha igen, akkor adja meg az illető eloszlást!

3. Egy normális eloszlású valószínűségi változó várható értéke –5, és még azt is tudjuk, hogy a [–5, 0] intervallumba esés valószínűsége 0,3. Mennyi a [–5, –4] intervallumba esés valószínűsége?

4. Legyenek X_1, X_2, ... független, azonos eloszlású valószínűségi változók, 1 várható értékkel és 25 szórásnégyzettel. Adjunk meg olyan x értéket, melyre teljesül, hogy

$$P\left(\sum_{i=1}^{742} X_i > x\right) = 0{,}34\,.$$

5. Egy 0 várható értékű, 3 szórású valószínűségi változóra 100 független kísérletet végzünk, és az $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ értékeket kapjuk.
a) Adjon meg konkrét eloszlást, amely jól közelíti az $X_1+X_2+\ldots+X_{100}$ valószínűségi változó eloszlását!
b) Adjon meg értéket, amelyik jól közelíti az $X_1+X_2+\ldots+X_{100}$ értéket!

6. Becsülje normális eloszlás segítségével a következő összeget:

$$\sum_{k=680}^{720} \binom{1000}{k} \cdot 0{,}7^k \cdot 0{,}3^{1000-k}\,.$$

7. Igazolja a Csebisev-egyenlőtlenség következő változatát:

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}\,.$$

V.1.1. Nevezetes eloszlások, gyenge törvények

8. Ugyanazt a 0–1-gyel kódolt szöveget adják le többször egymás után rádióadón. Zavarás miatt az egyes jelek egymástól függetlenül és azonos valószínűséggel eltorzulnak. Átlag 40 jel érkezik meg helyesen, 6 szórással.
a) Milyen hosszú a szöveg?
b) Mi a valószínűsége annak, hogy egy adásnál több mint 46 jel helyesen érkezik a vevőhöz?
c) Mire tippel, hány jel érkezik egy adásnál helyesen a vevőhöz?

9. Egy ambiciózus házasságszédelgő tapasztalata szerint telefonszámos hirdetéseire az első napi jelentkezők átlagos száma 4, a második napi jelentkezők átlagos száma 2. Mi a valószínűsége annak, hogy a házasságszédelgő egy hirdetésére az első két nap alatt legalább 3 telefonhívást kap?

10. Egy távolugrónak átlagosan a tizedik próbálkozásra sikerül átugrania a négy métert. Mi a valószínűsége, hogy a válogatón ez már a harmadik ugrásig sikerül?

11. Statisztikák alapján sok évre visszamenőleg vizsgálták, hogy július hónapban mi volt a balatoni vitorlásbalesetek leggyakoribb száma. Ilyen számnak a 3 adódott. Becsülje meg, hogy legalább hány év statisztikáját kellene végigböngészni ahhoz, hogy a statisztikában találjunk olyan júliust, amikor egyáltalán nem volt a Balatonon vitorlásbaleset!

12. Két kockát x-szer feldobunk. Tudjuk, hogy a dupla hatos dobások számának legvalószínűbb értéke 2. Mit állíthatunk x értékéről?

13. A heti négytalálatosok számának szórása 19. Mi a valószínűsége, hogy a jövő héten 350 négytalálatos lesz?

14. X normális eloszlású, $M(X) = 45$, $P(X < 50) = 0{,}903$. Átlagosan hány kísérletet kell elvégezni ahhoz, hogy az $X < 40$ esemény először bekövetkezzen?

15. Egy régi 6 lámpás rádió lámpáinak élettartama örökifjú tulajdonságú valószínűségi változó, 3 év várható élettartammal. Mennyi a valószínűsége, hogy
a) 5 évi használat alatt egyik lámpa sem ég ki?
b) 5 évi használat alatt pontosan 2 lámpa ég ki?

16. Egy pontosnak tekinthető ismerősünkkel 7 órakor van találkozónk. Érkezése egyenletes eloszlású, öt perc szórással. Melyik az a legkésőbbi időpont, amelyik előtt nulla a valószínűsége annak, hogy ismerősünk megérkezik?

17. Egy örökifjúnak tekinthető, folytonos üzemmódban használt izzó átlagos élettartama 1000 óra, és tudjuk, hogy tíz napig jól működött. Mi a valószínűsége, hogy nem a tizenegyedik nap első harmadában ég ki?

18. Egy gyár gyújtógyertyákat gyárt. Egy bizonyos fajta gyertya élettartama normális eloszlású valószínűségi változó 1170 óra mediánnal és 100 óra szórással. A gyár a gyertyákra garanciát vállal. Hány órás működésre szóljon a garancia, ha a gyár legfeljebb 5% garanciaigényt kíván kielégíteni?

19. Egy újságos egy óra alatt átlag 64 újságot ad el, 8 szórással. Becsülje meg annak valószínűségét, hogy az egy óra alatt eladott újságok száma 48 és 80 közé esik!

20. Apró szögeket automata csomagol. Az egy csomagba kerülő szögek számának várható értéke 5000, szórása 10. Becsülje meg azt a valószínűséget, hogy egy csomagban a szögek valódi száma az 5000-től 50-nél is többel tér el?

21. Két számítógépet egy telefonvonal köt össze, melyen az átvitt bitek egymástól függetlenül, ismeretlen p valószínűséggel romlanak el. Ezt a p valószínűséget úgy becsüljük meg, hogy n bitet továbbítunk a vonalon, és a hibás bitek relatív gyakoriságát számoljuk. Becsülje meg, legalább mekkorának kell lennie n-nek, hogy annak a valószínűsége, hogy ez a relatív gyakoriság p-től több, mint 10^{-4}-nel térjen el, kisebb legyen 0,05-nál?

22. *Az előző feladat folytatása.* Ha 2000 bitet továbbítunk, akkor legalább milyen pontossággal tudjuk becsülni p-t, legalább 0,95 biztonsággal?

23. Egy sorozatban gyártott terméknél ezer darabnak ellenőrzik a valódi súlyát, és átlagnak 5100 dkg-ot kapnak. Tudjuk, hogy a szórás 10 dkg. Adjon meg intervallumot, ahová a termék súlyának várható értéke legalább 99% biztonsággal beleesik!

V.1.2. Normális eloszlás alkalmazásai

24. Egy butikot privatizálnak, a kikiáltási ár x Ft. Azt mondja valaki, hogy 0,95 a valószínűsége annak, hogy még 100 véletlenül választott lakos havi bruttó fizetését összeadva sem tudnák a butikot megvenni. Határozza meg x értékét! Feltételezzük, hogy a havi fizetések sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{b} \cdot \exp\left(-\left(\frac{x-a}{b}\right)\right), \text{ ha } x > a; \ 0 \text{ egyébként.}$$

25. Egy dobozban sok ellenállásunk van, értékeik egymástól függetlenül 0,3 Ω és 0,5 Ω között egyenletes eloszlásúak. 100-at sorosan kötve közelítőleg mekkora a valószínűsége, hogy eredő ellenállásuk nagyobb 41 Ω -nál?

26. 1000 esetből kb. 300-szor fordul elő, hogy egy doboz málna nettó súlya több, mint 35 dkg. Becsülje meg normális eloszlás táblázat segítségével, hogy hány szem málna van egy dobozban, ha az egyes málnaszemek súlya 2 g körül ingadozik, 0,25 g szórással!

27. Egy útkereszteződésnél az átlagos zajszint 45 dB. 100 mérés közül kb. tízszer fordul elő, hogy 50 dB fölé emelkedik a zaj. Milyen gyakran fordul elő, hogy 37 dB alá süllyed a zajszint?

28. Egy célpontra 200 lövést adnak le. A találat valószínűsége minden lövésnél 0,4. Adjon meg olyan felső korlátot, amelyet a találatok száma 90% eséllyel nem halad meg!

29. Százszor feldobunk egy forintos érmét. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az írást eredményező dobások száma 45 és 50 közé esik?

V.2. Vegyes feladatok

30. Legyenek X és Y független valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

a) $D^2(XY) = D^2(X)\,D^2(Y) + M^2(X)D^2(Y) + M^2(Y)D^2(X)$.

b) Ha X és Y nem konstans, úgy $D^2(XY) = D^2(X)\,D^2(Y)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $M(X) = M(Y) = 0$.

31. Legyenek $f(x)$ és $g(x)$ független eloszlások sűrűségfüggvényei σ_1, σ_2 szórásokkal és m_1, m_2 várható értékekkel, $0 \le p \le 1$ valós. Fejezze ki m_1, m_2, σ_1, σ_2-vel a $h(x) = pf(x) + (1-p)g(x)$ sűrűségfüggvényű eloszlás szórásnégyzetét!

32. A Φ függvényt használva számítsa ki a következő kifejezés közelítő értékét:

$$\sum_{k=200}^{500} \binom{1000}{k} \frac{1}{2^{1000}}.$$

33. Van-e olyan eloszlás, amelyre egy adott pozitív ε mellett a Csebisev-egyenlőtlenség egyenlőség formájában teljesül? Ha van, adjon rá példát, ha nincs, igazolja, hogy miért nincs!

34. Folytonos eloszlás esetére igazolja, hogy ha a várható érték 0 és a medián 1, akkor a szórás nagyobb vagy egyenlő, mint $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

35. Mutassa meg, hogy ha egy normált eloszlás az $[a, b]$ intervallumra koncentrálódik, akkor a szórása legfeljebb $\frac{b-a}{2}$.

V.2.1. Nevezetes eloszlások, gyenge törvények

36. Egy gyerekcsoport minden tagja feldobja egyszer ugyanazt a lapos kavicsot és megfigyelik, hogy melyik oldalára esik. Ezt a kísérletet sokszor megismétlik és azt találják, hogy átlagosan ötször esik a kavics a „gömbölyűbb" oldalára, 2 szórással. Hány gyerek van a csoportban?

37. Ellentmond-e egymásnak az alábbi két kijelentés?

a) „A Népszavában oldalanként átlagosan 3-szor annyi a sajtóhiba, mint a Magyar Nemzetben."

b) „Annak az esélye, hogy egy oldal sajtóhibamentes, a Magyar Nemzetben 5-ször annyi, mint a Népszavában."

38. Egy vasfajta megrozsdásodásának ideje normális eloszlású 2,5 év átlagidővel és 0,25 év szórással. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy ilyen vasból készült tárgy

a) a harmadik évben megrozsdásodik?

b) a második évben megrozsdásodik?

39. Egy szeszélyes gépírónőről tudjuk, hogy gépeléskor jó napjain oldalanként átlag 1 hibát vét, rossz napjain pedig átlag 3 hibát. Ha tudjuk, hogy körülbelül minden negyedik napon bal lábbal kel fel, mi a valószínűsége, hogy összesen 1 hiba lesz az első gépelt oldalon?

40. Egy tüdőszűrő állomáson évente 30 ezer ember jelentkezik. Az utóbbi 50 év adatai alapján az évente visszarendelt betegek száma leggyakrabban k volt, tehát ez a szám tekinthető maximális valószínűségűnek a visszarendelések számát illetően. Adjuk meg az alábbi esemény valószínűségének egy lehetőleg maximális alsó korlátját: „Egy teljes éven át egyetlen visszarendelés sem történik."

41. Egy szabálytalan dobókockával végzünk kísérletsorozatot. Átlagosan a 12-edik dobásnál fordul elő, hogy másodszorra sikerül hatost dobni. Mi a hatos dobásának valószínűsége?

42. Galyatetőn nyáron 10 perc alatt átlagosan egy „csillaghullást" lehet észlelni. Mi a valószínűsége, hogy 15 perc alatt hármat észlelünk?

43. Elég jó közelítéssel igaz, hogy ha délelőtt tekintünk egy t percnyi időintervallumot, akkor ezalatt a Petőfi hídon átlagosan $\frac{t}{3}$ darab piros Opel halad át. Igazoljuk ezen hipotézis mellett, hogy az a várakozási idő, mely 9^{30} után eltelik addig, amíg az első piros Opel átmegy a hídon, exponenciális eloszlásúnak tekinthető, $\lambda = \frac{1}{3}$ paraméterrel!

44. Egy űrhajó egyórai repülés alatt 10^{-3} valószínűséggel találkozik 3 kg-nál súlyosabb meteorittal. Adjon meg olyan n-et, hogy legalább 95% legyen annak a valószínűsége, hogy 100 nap repülés alatt legfeljebb n db 3 kg-nál nehezebb meteorittal találkozik!

45. Nagyszámú, exponenciális élettartamú izzó közül kb. minden második egy évnél hamarabb kiég. Adjon meg egy olyan élettartamot, hogy kb. öt égő közül három ezt az élettartamot ne érje meg!

46. Egy levél érkezése egy adott időszakban folytonos egyenletes eloszlás szerint várható. Általában március 17-én szokott érkezni, 1 nap átlagos ingadozással. Mi a valószínűsége, hogy a levél március 16. és 22. között érkezik?

47. Egy örökifjú tulajdonságú alkatrész élettartamának átlagos ingadozása 2 hét. Ha a három hónapot túléli az alkatrész, mi a valószínűsége, hogy még három hónapot él?

48. Az elmúlt években a bergengóc határőrök a sok turista között átlag 13-nál találtak kábítószert, de azóta szemfülességük megkétszereződött, s így egy csempész lebukásának a valószínűsége kétszer akkora, mint tavaly volt. Ennek ellenhatásaként a Bergengóciába irányuló kábítószer-forgalom a harmadára csökkent. Alkalmas modell felállításával becsülje meg, hogy mekkora a valószínűsége annak, hogy az elkövetkező évben a határőrök

a) nem csípnek el kábítószercsempészt?
b) 13-nál többet csípnek el?
c) Mire tippeljünk, hány csempészt csípnek el a következő évben?
d) Mi a valószínűsége, hogy tippelésünk helyes lesz?

49. Ha egy bizonyos főiskolára pályázók közül véletlenszerűen választunk egyet, és tekintjük felvételi eredményét, akkor egy valószínűségi változót kapunk. Ennek a valószínűségi változónak a lehetséges értékei a lehetséges felvételi pontszámok, a 120-at meg nem haladó egész számok. Fogadjuk el tényként, hogy ezen a főiskolán évről évre rendszeresen négyszeres a túljelentkezés, és a felvételi ponthatár 105 pont körül van. Az alábbi kijelentések közül melyik fogadható el?

a) A jelentkezők eredményének várható értéke 105 körüli értéknek tekinthető.
b) A jelentkezők eredményének a mediánja 105 körüli értéknek tekinthető.
c) A jelentkezők eredményének a felső kvartilise 105 körüli értéknek tekinthető.
d) A jelentkezők eredményének az alsó kvartilise 105 körüli értéknek tekinthető.

50. Egy játékautomatán az előző játékoktól függetlenül bizonyos, számunkra ismeretlen valószínűséggel lehet nyerni. 150-szer játszottam az automatán. Legalább milyen biztonsággal állíthatom ezután, hogy legalább $\frac{1}{10}$ pontossággal ismerem a nyerés valószínűségét? Mennyi lenne a biztonság értéke, ha 1000 játék alapján szeretném a nyerés valószínűségét ugyanilyen pontossággal közelíteni?

51. *Az előző feladat folytatása.* 0,98 biztonsági szintet feltételezve, legalább milyen pontossággal ismerem a nyerés valószínűségét?

V.2.2. Normális eloszlás alkalmazása

52. Üzemben egy folyékony termék töltését két automata végzi. Az üvegekbe töltött mennyiség átlagosan 2 dl és normális eloszlású mindkét gép esetében. A betöltött mennyiség szórása az első gépnél 0,14 dl, a másodiknál pedig 0,08 dl. Az üvegek 60%-át az első gép tölti, a többit a második. Mi a valószínűsége, hogy egy üveget véletlenszerűen kivéve a napi készletből, abban a betöltött folyadék mennyisége a várható értéktől 0,1 dl-nél kevesebbel tér el?

53. 100-adrendű, 4 paraméterű gamma eloszlás szerint közelítőleg mennyi a (25, 30) intervallumba esés valószínűsége? A közelítést a standard normális eloszlás segítségével végezze!

54. 1000 db, két tizedesjegyre kiszámított valós számot adunk össze. Mindegyik szám kerekítési hibával adott, amelyet egyenletes eloszlásúnak tekinthetünk a (–0,05, 0,05) intervallumban. Mi a valószínűsége, hogy az összeg a valódi összegtől 2-vel kevesebbel tér el?

55. Egy transzformátormag 50 fémlemezből és a közöttük levő 49 papírlapból áll, melyek vastagsága független, azonos eloszlású valószínűségi változónak tekinthető. A megfelelő várható értékek és szórások:

	várható érték	szórás
fémlemez	0,50 mm	0,05 mm
papír	0,05 mm	0,02 mm

A transzformátormag beszerelhető, ha vastagsága 27,00 mm és 28,00 mm között van. Határozza meg közelítőleg annak a valószínűségét, hogy egy mag beszerelhető!

56. Normális eloszlás segítségével becsülje, hogy kb. mennyi a valószínűsége annak, hogy a szabályos dobókockát ezerszer feldobva, a dobott hatosok száma 150 és 180 közé esik, e határokat is megengedve!

57. Véletlenországban egy bank pénztáránál az egyik napon előreláthatóan 60 ügyfél vesz ki pénzt. A pénztárnál az átlagos kifizetés ügyfelenként 50 tallér, 20 tallér szórással. Mennyi pénzt tartson kasszájában a pénztáros, ha 0,95 valószínűséggel, minden fennakadás nélkül szeretné kielégíteni az ügyfelek igényeit?

V.3. Ellenőrző kérdések*

58. Igazak-e a következő egyenlőségek?

a) $M(X+c) = M(X) + c$.

b) $D^2(X+c) = D^2(X)$.

c) $D^2(X-Y) = D^2(X) + D^2(Y)$, ha X és Y független.

59. Igazak-e a következő állítások?

a) $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ bármely típusú eloszlásra érvényes.

b) A valószínűségi változók móduszainak összege az összegváltozó módusza.

* Az V. fejezet ellenőrző kérdései a IV. fejezetre is vonatkoznak.

c) $\mu_{cX} = c\mu_X$, ahol μ_{cX}, illetve μ_X a cX, illetve X valószínűségi változók mediánjai.

d) $P(|X-m| < 3\sigma) \approx 0{,}998$ m-től és σ-tól függetlenül, ahol X $N(m, \sigma)$ eloszlású.

60. Miért szükséges a várható érték definíciójában a

$$\sum_i |x_i| p_i < \infty, \text{ illetve az } \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx < +\infty$$

feltevés?

61. Lehetséges-e, hogy valamely X, ill. Y valószínűségi változókra

a) $M(X)$ és $M(Y)$ nem létezik, de $M(X+Y)$ létezik?

b) $M(X)$ létezik, $M(Y)$ nem létezik, de $M(X+Y)$ létezik?

c) $M(X)$ létezik, de $D(X)$ nem létezik?

d) X módusza nem létezik?

62. Igazak-e a következők?

a) Ha $M(X) < M(Y)$, akkor $M(X^2) < M(Y^2)$.

b) Ha $0 < X < Y$, akkor $M(X^2) < M(Y^2)$.

c) Ha $M(X) < M(Y)$, akkor X mediánja < Y mediánja.

63. Következik-e $P(X \geq 0) \geq P(X < 0)$-ból, hogy

a) az X mediánja nem lehet negatív?

b) X várható értéke nem lehet negatív?

64. Tegyük fel, hogy $X_1, X_2, \ldots, X_n$ egy adott rögzített, független méréssorozat az X valószínűségi változóra. Igazak-e a következő állítások?

a) Ha $M(X)$ nem létezik, akkor $\bar{x}_n$ divergens, ahol $\bar{x}_n$ a mintaátlagok sorozata.

b) Ha $\bar{x}_n$ konvergens, akkor $M(X)$ létezik.

c) Ha $D(X)$ nem létezik, akkor a méréssorozatból nyert tapasztalati szórások s_n sorozatára $s_n \to +\infty$.

65. Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ egy tetszőleges, az X valószínűségi változóval azonos eloszlású, független méréssorozat. Igazak-e a következő állítások?

a) Ha $D(X)$ nem létezik ($+\infty$), akkor a méréssorozatból nyert s_n tapasztalati szórás sorozat 1 valószínűséggel $+\infty$-hez tart.

b) Ha a méréssorozatból nyert $\bar{x}_n$ mintaátlag-sorozat 1 valószínűséggel divergens, akkor $M(X)$ nem létezik.

c) Ha $M(X)$ létezik, akkor a méréssorozathoz tartozó $\bar{x}_n$ mintaátlag-sorozat 1 valószínűséggel konvergens.

66. Legyen $X_1, X_2, X_3, \ldots$ azonos m várható értékű, de rendre $D_1, D_2, D_3, \ldots$ szórású független valószínűségi változó sorozat. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített, és tegyük fel, hogy $D_n \to 0$, ha $n \to \infty$. Igaz-e, hogy $P(|\bar{x}_n - m| \geq \varepsilon) \to 0$, ha $n \to \infty$?

67. Igaz-e diszkrét és folytonos eloszlásokra is
a) a Steiner-egyenlőtlenség?
b) a Csebisev-egyenlőtlenség?

68. Egy feleség azt mondja: „A férjem magassága átlagos, de a legtöbb férfi még ezt a magasságot sem éri el." Van-e ellentmondás a kijelentésében?

69. Egy bizonyos országban az átlagos életkor 32,7 év, az életkor mediánja pedig 33,5 év. Egy másik országban az átlag 48,7 év, a medián szintén 33,5 év. Vázolja az eloszlásokat úgy, hogy ne mondjanak ellent ezeknek a tényeknek!

VI. Valószínűségi változó skalárfüggvényének eloszlása és paraméterei ($\mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ eloszlástranszformáció)

(i) Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó eloszlása P és $t: \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ adott valós függvény. Ekkor a $t(X)$ valószínűségi változó eloszlása (vagy a P eloszlásnak a t szerinti *transzformált eloszlása*) az a Q eloszlás, amelyre

$$Q(A) = P\{x : t(x) \in A\} \qquad (*)$$

minden olyan A-ra, amelyre a szereplő valószínűségek léteznek, ahol $A \subseteq \mathbf{R}^1$. Az $\{x : t(x) \in A\}$ halmazt A *ősképének* nevezzük t-nél.

Ha az X valószínűségi változó diszkrét, és eloszlása az U halmazra koncentrálódik, akkor (*)-ban az A halmazoknak egyes pontokat, az U-ra korlátozott $t(x)$ függvény értékkészletének pontjait érdemes választani, és ekkor (*) $t(X)$ eloszlását adja közvetlenül.

Az A halmazoknak a $(-\infty, u)$ típusú intervallumokat választva, $t(X)$ *eloszlásfüggvényét* kapjuk meg:

$$G(u) = P(t(X) < u) = P\{x : t(x) < u\}.$$

Ha az X valószínűségi változó folytonos és sűrűségfüggvénye is folytonos, $t(x)$ szigorúan monoton, inverze pedig folytonosan differenciálható, akkor a $t(X)$ valószínűségi változó is folytonos és *sűrűségfüggvényére*, $g(y)$-ra a következő igaz:

$$g(y) = f(t^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dt^{-1}(y)}{dy} \right|$$

(sűrűségfüggvény-transzformáció).

Eloszlás *előállítása egyenletes eloszlásból:* ha P egy véges intervallumra koncentrálódó, szigorúan monoton $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel rendelkező eloszlás, akkor a (0, 1) intervallumon egyenletes eloszlást a $t(x) = F^{-1}(x)$ transzformáció a P eloszlásba viszi.

(ii) A $t(X)$ valószínűségi változó várható értéke (a t szerinti transzformált eloszlás várható értéke) a (*) szerinti Q eloszláshoz tartozó várható érték. Ha $t(X)$-nek létezik várható értéke, akkor
– ha X diszkrét és lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$, akkor

$$M(t(X)) = \sum_i t(x_i)p_i ,$$

– ha X folytonos, sűrűségfüggvénye $f(x)$, akkor

$$M(t(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} t(x) \cdot f(x)dx .$$

(iii) Amennyiben egy véletlen mennyiség egy másik véletlen mennyiségtől függ nem véletlen függvénykapcsolat szerint, akkor eloszlása, várható értéke meghatározható a másik véletlen mennyiség eloszlásának és a szóban forgó függvénykapcsolatnak az ismeretében.

Megjegyzés: A klasszikus analízisben tanult függvényfogalomnak a mértékelméletben leginkább az illető függvény által transzformált (egyenletes) eloszlás eredménye felel meg. Ha például a (0, 1) intervallumon értelmezett, eloszlás transzformációjára alkalmas (lásd (*)) valós függvényekre szorítkozunk, belátható, hogy bizonyos értelemben kölcsönösen egyértelmű a kapcsolat ezen függvények és az $\mathbf{R}^1$-en vett eloszlások között, ha nem teszünk különbséget két függvény között akkor, ha az egyenletes eloszlást ugyanabba az eloszlásba viszik (ekvivalenciareláció szerinti osztályozás a függvényeken). *A valós függvényeknek és az általuk transzformált eloszlásoknak ez az azonosítása a mértékelmélet egyik alapgondolata.* A klasszikus analízisben általában csak olyan függvényeket engednek meg (mérhető függvények), amelyek alkalmasak arra, hogy mértéket transzformáljanak. Az analízisben tanult függvények integrálja például úgy tekinthető, mint a függvény által transzformált eloszlás várható értéke (csupán az illető transzformált eloszlásból kiszámítható).

VI.1. Gyakorlófeladatok

1. Legyen X diszkrét egyenletes eloszlású a $0, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ ponthalmazon. Határozza meg
a) tg X eloszlását!
b) X második momentumát!

2. Legyen X $\lambda = 2$ paraméterű, Poisson-eloszlású. Határozza meg az $X/(\text{Mod } 3)$ valószínűségi változó eloszlását ($X/(\text{Mod } 3)$ jelöli a hárommal osztás maradékát)!

3. Legyen az X valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvénye $\frac{1+x^3}{2}$, ha $x \in (-1, +1)$, 0, illetve 1, ha $x < -1$, illetve $x > 1$. Legyen

$$Y = \begin{cases} X^4, & \text{ha } X \le 0, \\ X^2, & \text{ha } X > 0. \end{cases}$$

Határozza meg Y sűrűségfüggvényét!

4. Legyen X $\lambda = 1$ paraméterű, exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Határozza meg e^{-X} eloszlását!

5. X egyenletes eloszlású $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-ben. Határozza meg sin X
a) eloszlását,
b) szórását!

6. Fejezze ki egy X valószínűségi változó pozitív részének ($X^+ = \max\{0, X\}$) eloszlásfüggvényét X eloszlásfüggvényével!

7. Határozza meg $|X|$
a) eloszlását,
b) várható értékét,
c) reciprokának várható értékét, ha létezik,
feltéve, hogy X standard normális eloszlású!

8. Milyen eloszlás szerint válasszuk a kör sugarát, R-t, ha azt akarjuk, hogy a területe $\lambda = 5$ paraméterű exponenciális eloszlást kövessen?

9. Van-e olyan transzformáció, amely a negyedrendű, $\frac{1}{3}$ paraméterű binomiális eloszlást a másodrendű, $\frac{1}{2}$ paraméterű binomiális eloszlásba viszi?

10. Határozzuk meg az

$$f(x) = \begin{cases} 14x^{13}, & \text{ha} \quad 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

sűrűségfüggvényű X valószínűségi változó négyzetének
a) eloszlását,
b) mediánját!
c) Határozza meg X-nek a várható érték körüli átlagos abszolút ingadozását!

11. $X_1, \ldots, X_{1000}$ független, külön-külön $[0, 1]$-ben egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Normális eloszlás táblázat segítségével határozza meg a $P\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i^2 > 350\right)$ valószínűség közelítő értékét!

12. X-re tippelünk egy konstanssal, úgy, hogy az abszolút eltérés átlaga minimális legyen. Írja fel integrál alakban a tippelés így elkövetett (átlagolt) hibáját, ha X exponenciális eloszlású és $\lambda = 2$.

13. Legyen X sűrűségfüggvénye $f(x)$. Igazolja valószínűségszámítási meggondolásokkal, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} f(\sqrt[3]{x})\, dx .$$

14. Dobókockát dobunk fel. Ha egyes jön ki, akkor veszítünk 1 zsetont, ha kettes, hármas vagy négyes, akkor nyerünk 5 zsetont, ha ötös vagy hatos, akkor veszítünk 2 zsetont. Adja meg nyereségünk
a) eloszlását,
b) várható értékét,
c) szórását!

15. Egy bizonyos frekventált légi járatra öt kedvezményes menetjegy váltható az indulás előtti napon. Ez egy kevéssé reklámozott lehetőség. Átlag három igénylő szokott jelentkezni. Adja meg azon utasok számának eloszlását, akik lemaradnak erről a kedvezményes jegyvásárlási lehetőségről!

16. Egy szakadék mélységét kíséreljük megbecsülni egy kavics ledobásával. A kavics zuhanási idejére mért idő normális eloszlásúnak tekinthető 6 mp átlaggal, 0,1 mp szórással. Határozza meg a mért időből számított szakadékmélység
a) eloszlását,
b) várható értékét!

17. Kedvenc háziállatom olyan kövér, hogy az esetek $\frac{4}{5}$ részében nem tud besurranni a nyitva felejtett konyhaajtón anélkül, hogy meg ne lökné azt. A konyhaajtó 1 m széles, és a küszöbbel bezárt szöge a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban egyenletes eloszlású. Milyen széles a kedvenc jószágom?

18. Az origó középpontú egységkör kerületén egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot, majd vetítjük az y tengelyre. Határozza meg a vetület abszolút értékének eloszlását és várható értékét!

19. Exponenciális eloszlás szerint választunk egy számot a számegyenesen. Ezután egész számra kerekítjük, a szokásos kerekítési szabály szerint. Határozza meg az így kapott véletlen egész szám
a) eloszlását,
b) várható értékét!

20. Határozza meg a radioaktív részecske X élettartama tört részének, azaz $X-[X]$-nek eloszlását, ha X élettartamának átlaga $\frac{1}{\alpha}$.

21. Egy gyár bejáratánál sorompó van. A sorompó a nap 24 órájából kb. 9 órányit függőlegesen áll, és csak kb. 12 órányit van vízszintes helyzetben. Kb. 3. órányit tesz ki az az idő, amíg a sorompó mozgásban van. Mozgás közben a sorompó forgásának szögsebessége állandó. Tegyük fel, hogy a sorompó karjának a hossza 3 m, a forgáspontjának a földtől való távolsága 1 m. Tekintsük egy véletlen pillanatban a sorompó végének a földtől való távolságát. Adja meg ennek a valószínűségi változónak
a) az eloszlását,
b) a várható értékét!

22. Milyen eloszlás szerint válasszuk a 0 és $\frac{\pi}{2}$ közé eső φ szöget ahhoz, hogy az $(1, 0)$ vektor és az ő φ szöggel elforgatottja által kifeszített háromszög területe egyenletes eloszlású legyen 0 és $\frac{1}{2}$ között?

23. Egy véletlenül választott kocka térfogata egyenletes eloszlású 2 és 5 között. Adja meg az élének eloszlását!

24. Elfogadva, hogy a kalkulátor RND gombja által generált szám egyenletes eloszlásúnak vehető 0 és 1 között, adjon módszert a kalkulátorral olyan valószínűségi változó előállítására, amely az alábbi diszkrét eloszlások valamelyikét követi:
a) egyenletes eloszlás az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokon;
b) $p(1)=0{,}2;\ \ p(2)=0{,}2;\ \ p(3)=0{,}3;\ \ p(4)=0{,}3.$

25. Egy adás időpontja 0 és 10 perc között egyenletes eloszlásúnak tekinthető. Az adást egy átjátszón kódolják, így az adás időtartama megváltozik, egy rögzített transzformáció szerint. Határozza meg a transzformációt, ha a kódolt adás időtartama exponenciális eloszlású, 15 perc átlaggal!

26. A vihar X idő múlva tör ki a Balatonon, ahol X egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó, $\lambda=\frac{1}{3}$ óra paraméterrel. Bérbe veszek egy vitorlást A Ft/óra bérleti díjért c óra időtartamra (c konstans), és azonnal bérbe adom egy „albérlőnek" B Ft/óra bérleti díjért ($A<B$), ameddig csak lehet, tehát a min (X, c) időtartamra. Mennyi legyen a c konstans értéke, hogy a hasznom várható értéke a lehető legnagyobb legyen?

VI.2. Szimuláció és statisztika

27. 1000 db, véletlenszám-generátorral előállított egyenletes eloszlású számunk van. Egy $t(x)$ függvénybe helyettesítjük az adatokat, és azt találjuk, hogy a kapott adatrendszer tapasztalati eloszlásfüggvénye jól közelíti az $1-e^{-2x}$ függvényt. Adjon meg egy ilyen $t(x)$ függvényt!

28. Az előző feladathoz kapcsolódóan, az egyenletes eloszlású számokat az e^x függvénybe helyettesítjük. Melyik eloszlásfüggvényt közelíti jól az így kapott értékekhez tartozó tapasztalati eloszlásfüggvény?

29. Az X $(0, 1)$-ben egyenletes eloszlású valószínűségi változóra nagyszámú $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független mérési adatunk van és ismerjük a hozzájuk tartozó tapasztalati eloszlásfüggvényt. Hogyan kapjuk meg az utóbbiból az $X_1^3, X_2^3, \ldots, X_n^3$ értékekhez tartozó tapasztalati eloszlásfüggvényt?

30. A $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlás szerint választunk 100 db $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ véletlen értéket. Majd kiszámítjuk az $Y_i=\ln\frac{1}{1-X_i}$ $(i=1, 2, \ldots, 100)$ értékeket. Határozza meg azt a folytonos eloszlásfüggvényt, amelyet az Y_i-ken vett egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye – valamilyen értelemben – jól közelít!

31. Generáljon n véletlen számot $\lambda=2$ paraméterű exponenciális eloszlás szerint, majd n véletlen számot az exponenciális eloszlás $t(x)=x^2$ transzformáltja szerint. Szemléltesse és vesse össze a megfelelő tapasztalati eloszlásokat!

32. 0 és 1 között az $f(x)=2x$ $(0<x<1)$ sűrűségfüggvényű eloszlás szerint, véletlenszerűen választunk 100 darab számot, legyenek ezek $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$.

a) Körülbelül mennyi lesz az $\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}\frac{1}{\sqrt{X_i}}$ átlag értéke?

b) Hogyan válasszuk meg a c konstanst, ha az a célunk, hogy az

$$\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}\left(\frac{1}{\sqrt{X_i}}-c\right)^2$$ átlag minél kisebb legyen?

Becsülje ezen c-re ezt az átlagot!

33. Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független, $f(x) = 2x$ $(0 \le x \le 1)$ sűrűségfüggvényű mérések. Hogyan válasszuk meg c és d értékét, ha azt akarjuk, hogy nagy n esetén

a) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|X_i^2 - c\right|$,

b) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - d)^2$

minél kisebb legyen!

34. Az $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ számokat egymástól függetlenül az $f(x) = 2x$ $(0 \le x \le 1)$ sűrűségfüggvényű eloszlás szerint generáljuk. Hogyan válasszuk meg a c konstanst, ha az a célunk, hogy az

$$\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}\left(c \cdot \frac{1}{\sqrt{X_i}} - 1\right)^2$$

érték minél kisebb legyen?

35. Elfogadva, hogy egy kalkulátoron az RND gombbal generált szám egyenletes eloszlású (0, 1)-ben, adjon rendre olyan utasítássorozatot az RND-vel rendelkező kalkulátorhoz, hogy az utasítássorozat végén adódó valószínűségi változó eloszlásfüggvénye rendre az alábbi legyen:

a) 4-edrendű 0,2 paraméterű binomiális eloszlás eloszlásfüggvénye,

b) 2,5 paraméterű Poisson-eloszlás eloszlásfüggvénye,

c) $F(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad (0 \le x \le 2)$,

d) $F(x) = \frac{x}{x+1} \quad (x \ge 0)$!

36. Adott a (0, 1) intervallumon a $t(x)$ függvény. Válasszon n darab egyenletes eloszlású véletlen számot a (0, 1)-ben és transzformálja $t(x)$-szel a hozzájuk tartozó tapasztalati eloszlást. Ábrázolja a $t(x)$ függvényt a szokásos módon az (x, y) síkon, a transzformált tapasztalati eloszlást pedig az y függvényében!

37. Adott a (0, 1) intervallumon a folytonos $t(x)$ függvény. Válasszon n darab egyenletes eloszlású véletlen számot a (0, 1)-ben és transzformálja $t(x)$-szel a hozzájuk tartozó tapasztalati eloszlást. Ábrázolja a $t(x)$ függvényt a szokásos módon az (x, y) síkon, a transzformált tapasztalati eloszlás várható értékét az y tengelyen, továbbá $t(x)$ integrálközepét szintén az y tengelyen!

38. Generáljon n darab független, λ paraméterű, exponenciális eloszlású véletlen számot, egyenletes eloszlásból, eloszlástranszformációval! A kapott empirikus eloszlást hasonlítsa össze az elméletivel!

VI.3. Vegyes feladatok

39. X exponenciális eloszlású valószínűségi változó, 2 paraméterrel. Határozza meg az

$$Y = \lim_{n\to\infty}\frac{X^{n+2}}{\sqrt{4^n + X^{2n}}}$$

valószínűségi változó eloszlását – a határérték kiszámításának segítségével!

40. Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(x) = \begin{cases} c(x-2), & \text{ha } |x| \le 2, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

a) Írja fel X^2 sűrűségfüggvényét!

b) Határozza meg X szórását!

41. Tekintsük az $F(x) = \begin{cases} Ae^x, & \text{ha } x \le 0 \\ 1, & \text{ha } 0 < x \end{cases}$ függvényt!

Milyen A értékekre lesz $F(x)$ egy kevert eloszlás eloszlásfüggvénye? Adja meg a választott eloszlás $t(x) = [x] - 1$ transzformáltját ($[x]$ az x egész részét jelöli)!

42. Legyen X standard normális eloszlású és $c > 0$ rögzített. Igazolja, hogy az

$$Y = \begin{cases} X, & \text{ha } |X| < c \\ -X, & \text{ha } |X| \geq c \end{cases}$$

valószínűségi változó is standard normális eloszlású!

43. Adjon meg olyan folytonos eloszlást, mely az $y = \dfrac{1}{x}$ leképezéssel önmagába képeződik!

44. Van-e olyan folytonos eloszlás, mely
a) az $y = 1 + x$ leképezéssel önmagába képeződik?
b) az $y = -x$ leképezéssel önmagába képeződik?

45. Adjon meg egy olyan transzformációt, amelyik a (0, 1)-ben egyenletes eloszlást a 0,1 paraméterű geometriai eloszlásba viszi!

46. Határozza meg az $f(x) = 2x$ $(x \in (0, 1))$ sűrűségfüggvényű X valószínűségi változó várható értéktől való átlagos abszolút eltérését!

47. X egyenletes eloszlású $(-\sqrt{3}, -1)$-ben. Határozza meg arctg X
a) eloszlását,
b) várható értékét,
c) mediánját!

48. Hogyan válasszuk meg a c számot, ha azt akarjuk, hogy 500 db 0 és c között egyenletes eloszlású, egymástól független véletlen szám négyzetének összege 0,2 valószínűséggel kisebb legyen, mint 10?

49. Ezer darab mérést hajtunk végre egy, az (1, 3) intervallumban egyenletes eloszlású véletlen mennyiségre nézve. Tanult tételek alapján, becsülje meg a mérési eredmények
a) szorzatának logaritmusát,
b) szorzata logaritmusának eloszlását!

50. Igazolja, hogy ha X exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor $[X]$ (egész rész X) geometriai eloszlású!

51. Legyen az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, $F(x)$ folytonos és szigorúan monoton. Határozza meg az $F(X)$ valószínűségi változó eloszlását!

52. X eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & \dfrac{\pi}{2} \leq x \end{cases}$$

Adja meg c értékét úgy, hogy $M(|X^3 - c|)$ minimális legyen!

53. X sűrűségfüggvénye $f(x) = 2x$ $(0 \leq x < 1)$, c konstans. Az Y valószínűségi változót a következőképpen definiáljuk:

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{ha } X \leq c \\ X - c, & \text{ha } X > c \end{cases}$$

a) $M(Y) = ?$
b) Mekkora az a c, amelyre $M(Y)$ minimális?

54. Egyenletes eloszlás szerint választunk egy számot (0, 1)-ben. Mi a valószínűsége, hogy a szám gyökének első tizedesjegye 3?

55. Legyen X egy dobókockával dobott véletlen szám. Határozza meg:
a) $X - 3$,
b) $(X^3 - X)^2$
eloszlását!

56. Pénzdarabot dobálunk. Ha páros sorszámú dobásra következik be először fej dobás, akkor 1 zsetont nyerünk, ha páratlan sorszámúra, akkor 1 zsetont veszítünk. Adja meg a nyereségünk
a) eloszlását,
b) mediánját,
c) szórását!

57. Egy véletlenül választott lakos jövedelme eloszlásának sűrűségfüggvénye

$$\begin{cases} \dfrac{pa^2}{x^{p+1}}, & \text{ha} \quad x > a > 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

(p és a konstans). Mi a valószínűsége, hogy jövedelmének $\frac{1}{4}$ részét 10 ezer Ft-tal kiegészítve meg tud venni egy A Ft árú mosógépet (ahol $A > \frac{a}{4} + 10\,000$)?

58. Egy sorozatban gyártott csapágygolyó átmérője a technológia szerint 3 cm kell legyen. A szórás 0,1 mm. Az átmérőre normális eloszlást feltételezve, határozza meg a csapágygolyó térfogatának
a) eloszlását,
b) várható értékét!

59. Egy diszkóklubban a 6×6 méteres négyzet alakú helység közepén lóg egy egyenletes sebességgel körben forgó lámpa, ami sugár irányban vízszintesen bocsát ki egy fénynyalábot. Egy véletlen időpontban megfigyeljük az oldalfalakon körbejáró fénypontnak a hozzá legközelebb eső „saroktól" való távolságát. Határozza meg e távolság sűrűségfüggvényét!

60. Egy szabályos kocka felszíne egyenletes eloszlású a (0, 6) intervallumban. Adja meg a térfogat
a) eloszlását,
b) várható értékét!

61. Egy egység sugarú félkör segítségével választunk véletlenül egy átmérő átfogójú derékszögű háromszöget úgy, hogy a háromszög harmadik csúcsát a félköríven egyenletes eloszlás szerint választjuk véletlenül. Határozza meg a derékszöghöz tartozó magasság hosszának eloszlását!

62. Egy négyzet területét egyik oldalának lemérése után megbecsüljük. Ha az így számolt terület folytonos eloszlású $f(x)$ $(x \geq 0)$ sűrűségfüggvénnyel, akkor mennyi az oldal hosszúságának szórásnégyzete, feltéve, hogy a mért hosszúságok átlaga 2 és a számított területek átlaga 5?

63. Egy 1 oldalú, egyenlő szárú derékszögű háromszög egyik szárán egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Határozza meg a pont és a szemközti csúcs távolságnégyzetének
a) eloszlását,
b) várható értékét,
c) szórását!

64. Egy 2 hosszúságú intervallumot választunk úgy, hogy középpontja egyenletes eloszlású a (0, 10) intervallumon. A véletlen intervallum és a (0, 7) intervallum közös részének a hossza valószínűségi változó. Határozza meg ezen valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!

65. Tegyük fel, hogy egy elektromos készülék bemeneti és kimeneti feszültségei közötti összefüggést $t(x)$ mutatja, ahol

$$t(x) = \begin{cases} |x|, & \text{ha} \quad |x| \leq a \\ 0, & \text{ha} \quad |x| > a \quad (a > 0 \text{ rögzített}). \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy a bemenet $-k$ és k között egyenletes eloszlást követ. Mi lesz a kimenet eloszlása, ha
a) $0 < k < a$,
b) $a < k$?

66. Elfogadva, hogy a kalkulátor RND gombja által generált szám egyenletes eloszlásúnak vehető 0 és 1 között, adjon rendre olyan utasítássorozatokat egy ilyen kalkulátorhoz, hogy az utasítássorozat végén adódó valószínűségi változó rendre az alábbi eloszlásokat kövesse:
a) egyenletes 5 és 10 között;
b) $\lambda = 5$ paraméterű exponenciális!

67. Kétszer dobunk egy dobókockával és feljegyezzük, hogy hányszor dobtunk hárommal osztható számot. Ha X-szer ($X = 0$, 1 vagy 2), akkor kódolhatjuk-e X-et egy olyan t nem véletlen függvénnyel, hogy $t(X)$ $\lambda = 3$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó legyen?

68. Egy horgász egy halastóból naponta átlag 5 halat fog ki. Határozza meg a kifogott halak számának 5 körüli átlagos abszolút ingadozását!

69. Egy gombaárus 100 Ft/kg áron veszi a gombát és 140 Ft/kg-ért adja el a piacon. Tegyük fel, hogy a kereslet kilogrammokban mért értékének mint valószínűségi változónak az eloszlásfüggvénye:

$$F(x)=\sqrt{\frac{x}{20}}\quad (0\le x\le 20)\text{, és 0, ill. 1, ha } x<0\text{, ill. } x>20\,.$$

A napi kereslet feletti gombát már nem lehet értékesíteni, mert megromlik. Hány kg gombát vegyen a gombaárus reggelente, hogy hasznának várható értéke maximális legyen?

70. Egyenlő szárú háromszög csúcsa az origó, egyik oldala az **i** mint helyvektor, másik oldala pedig az origóból induló olyan egységvektor, amelynek csúcsa egyenletes eloszlású

a) az egységkörvonalon, a síkon;

b) az egységgömb felületén, a térben.

Határozza meg az *a)* és *b)* esetekben a háromszög harmadik oldala hosszúságának eloszlását (eloszlásfüggvényét)!

VI.4. Ellenőrző kérdések

71. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ független mérések egy adott eloszlásra. Van-e különbség a következő két eloszlás között?

a) A fenti értékekhez tartozó tapasztalati eloszlást transzformáljuk egy $t(x)$ függvénnyel.

b) A $t(x_1)$, $t(x_2)$, ..., $t(x_n)$ értékekhez tartozó tapasztalati eloszlás.

72. Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ nagyszámú mérés egy adott eloszlásra, és $t(x)$ tetszőleges folytonos függvény. Közel lesz-e a következő két eljárás eredménye egymáshoz?

a) $t(x)$-be helyettesítjük a fenti mérési eredmények átlagát!

b) Vesszük a $t(X_1)$, $t(X_2)$, ..., $t(X_n)$ értékek átlagát!

73. Transzformálható-e a $B\left(\frac{1}{3}, 4\right)$ binomiális eloszlás a $B\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ eloszlásba?

74. Legyenek P és Q eloszlások a számegyenesen és tegyük fel, hogy t monoton növekedő, valamint P-t Q-ba viszi. Igaz-e, hogy

a) P és Q eloszlásfüggvénye azonos?

b) P mediánjait t a Q mediánjaiba viszi?

c) P várható értékét t a Q várható értékébe viszi?

75. Tegyük fel, hogy f és g a számegyenesen értelmezett tetszőleges függvények, μ pedig a számegyenesen értelmezett eloszlás. Legyenek μ_f, ill. μ_g az f, ill. g által transzformált eloszlások – feltesszük, hogy léteznek ilyenek. Ekvivalenciareláció-e a megfelelő függvényeken a következő:

$$f \sim g \Leftrightarrow \mu_f = \mu_g\,?$$

76. Lehetséges-e, hogy két különböző függvény ugyanazt az eloszlást ugyanabba az eloszlásba transzformálja?

77. Legyen α egyenletes eloszlású a (0, 1)-ben. Igaz-e, hogy

a) α^2 sűrűségfüggvénye monoton növekvő?

b) $1-\alpha$ sűrűségfüggvénye monoton csökkenő?

78. Igaz-e, hogy a (0, 1) intervallumon egyenletes eloszlásból elő lehet állítani valamilyen transzformációval

a) minden diszkrét egyenletes eloszlást?

b) minden folytonos valószínűségeloszlást?

c) minden valószínűségeloszlást?

79. Van-e olyan transzformáció, amely a $\lambda = 3$ paraméterű exponenciális eloszlást a Cauchy-eloszlásba viszi?

80. Igazak-e a következő állítások?

a) Minden pozitív X valószínűségi változóra fennáll

$$M\left(\frac{1}{X}\right)=\frac{1}{M(X)}.$$

b) Van olyan X valószínűségi változó, hogy $M(X^2) = M^2(X)$.

c) Ha X diszkrét, akkor $M(X)=\sum x_i f(x_i)$, ahol f az X sűrűségfüggvénye.

d) Ha $D(X) = \sigma$, és X eloszlása c-re szimmetrikus, akkor nulla annak valószínűsége, hogy $|X-c|>\sigma$.

81. Igazak-e a következő állítások?

a) Egy valószínűségi változó eloszlása meghatározza egy adott függvényének eloszlását.

b) Minden diszkrét eloszlás transzformálható folytonossá.

c) Minden folytonos eloszlás transzformálható diszkrétté.

d) Ha egy P eloszlás transzformálható egy Q eloszlásba, akkor Q is transzformálható P-be.

82. Vezesse le tanult valószínűségszámítási tételekből a helyettesítéses integrál következő sémáját – alkalmas feltételek mellett:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} uf(\varphi(u))\varphi'(u)du\,,$$

ahol $\varphi = t^{-1}$! Fogalmazza meg a séma valószínűségszámítási jelentését!

83. Legyen $t(x)$ folytonos függvény és X egyenletes eloszlású valószínűségi változó (0, 1)-en. Mutassa meg, hogy az integrálszámítás középértéktételében szereplő

$$\int_0^1 t(x)dx = t(x_0) \quad (x_0 \in (0,1))$$

középérték tekinthető úgy, mint a $t(X)$ valószínűségi változó átlagértéke (várható értéke)!

84. Legyen $t(x)$ folytonos függvény és X egyenletes eloszlású valószínűségi változó (0, 1)-ben. Mutassa meg, hogy a $\int_0^1 t(x)dx$ integrál értéke megegyezik

a) $t(X)$ várható értékével!

b) nagyszámú, (0, 1)-ben egyenletes eloszlású mérés t transzformáltjai átlagának egy közelítésével!

c) az $\int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy$ integrállal, ahol $f(y)$ az egyenletes eloszlás t transzformáltjának sűrűségfüggvénye!

VII. Kétdimenziós valószínűségi változók eloszlása (eloszlások $\mathbf{R}^2$-n)

(i) Vektorváltozón – ezután: *vektor valószínűségi változón* – egy valós számpárokon futó szabad algebrai (individuum-) változót értünk. Jelölése: (X, Y), (U, V) ...stb.

Egy (X, Y) vektor valószínűségi változó eloszlása *diszkrét* ((X, Y) diszkrét), ha léteznek olyan (x_i, y_j) pontok a síkon és ezekhez q_{ij} valószínűségek, hogy $\sum_{i,j} q_{ij} = 1$ és $P(X = x_i, Y = y_j) = q_{ij}$ teljesül ($i = 1, 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots$). Ekkor

$$P((X, Y) \in A) = \sum_{\{(i,j):(x_i,y_j)\in A\}} q_{ij}\,,$$

ahol $A \subseteq \mathbf{R}^2$ tetszőleges.

Diszkrét eloszlás *táblázatos megadása:*

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3
y_3	q_{31}	q_{32}	q_{33}
y_2	q_{21}	q_{22}	q_{23}
y_1	q_{11}	q_{12}	q_{13}

Egy (X, Y) vektorváltozó eloszlása *folytonos*, ha van olyan $h(x, y) \geq 0$ függvény, amelyre $\iint_{\mathbf{R}^2} h(x,y)dxdy = 1$ és

$$P((X, Y) \in A) = \iint_A h(x,y)dxdy$$

minden olyan $A \subseteq \mathbf{R}^2$-re, amelyre a jobb oldal létezik és ahol az integrál Riemann-(improprius) integrál.
Komplex értékű valószínűségi változó eloszlásán a valós és képzetes részekből alkotott vektorváltozó eloszlását értjük.
A kevert, szinguláris és egyéb eloszlások hasonlóan értelmezhetők, mint egy dimenzióban. Ha nem említjük az ellenkezőjét, akkor kétdimenziós eloszláson diszkrét, folytonos vagy kevert eloszlást értünk.
Egy (X, Y) vektor valószínűségi változó eloszlásának eloszlásfüggvénye egy olyan $H(x, y)$ kétváltozós függvény, amelyre

$$H(x, y) = P(X < x,\, Y < y).$$

Hasonlóan az egydimenziós esethez, eloszlásfüggvény segítségével a különböző típusú eloszlások egységesen kezelhetők. (Az eloszlásfüggvények egyéb alkalmazásaira nézve lásd az eloszlástranszformációval foglalkozó XI. és XII. fejezeteket.)
Speciálisan, ha az eloszlás folytonos és sűrűségfüggvénye $h(x, y)$, akkor

$$\frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x \partial y} = h(x,y).$$

(ii) Egy (X, Y) vektorváltozó eloszlásának peremeloszlásai (vetületeloszlásai) külön-külön az X, ill. Y valószínűségi változók eloszlásai.
A diszkrét (X, Y) valószínűségi változó peremeloszlásai is diszkrétek, és teljesül, hogy

$$P(X = x_i) = \sum_j q_{ij}, \qquad P(Y = y_j) = \sum_i q_{ij}$$

A folytonos (X, Y) valószínűségi változó peremeloszlásai is folytonos eloszlások, és $f(x)$, ill. $g(y)$ sűrűségfüggvényeikre teljesül

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)dy, \qquad g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)dx.$$

(iii) Az X és Y diszkrét valószínűségi változók akkor és csak akkor *függetlenek*, ha

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$$

minden x_i, y_j-re $(i = 1, 2, \ldots;\; j = 1, 2, \ldots)$.

Az X és Y folytonos valószínűségi változók akkor és csak akkor *függetlenek*, ha együttes sűrűségfüggvényükre, $h(x, y)$-ra teljesül

$$h(x, y) = f(x) \cdot g(y).$$

Általában, az $F(x)$, ill. $G(y)$ eloszlásfüggvényekkel rendelkező valószínűségi változók akkor és csak akkor függetlenek, ha $H(x, y)$ együttes eloszlásfüggvényükre teljesül

$$H(x, y) = F(x) \cdot G(y).$$

Megfordítva, az $F(x)$, ill. $G(y)$ eloszlásfüggvényekkel rendelkező eloszlások (direkt-) *szorzateloszlása* az a kétdimenziós eloszlás, amelynek $H(x, y)$ eloszlásfüggvényére

$$H(x, y) = F(x) \cdot G(y).$$

(iv) (X, Y) *egyenletes* eloszlású a $T \subseteq \mathbf{R}^2$ tartományon, ha sűrűségfüggvénye

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{t(T)}, & \text{ha} \quad (x,y) \in T, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol $t(T)$ a T tartomány területe. (Speciálisan, ha T területe 1, akkor minden területtel rendelkező $A \subseteq T$ halmazba esés valószínűsége éppen A területe.)
(X, Y) *standard normális* eloszlású, ha sűrűségfüggvénye:

$$h(x,y) = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

(v) Egy vektor valószínűségi változóra vonatkozó n-dimenziós vektor mintatér minden pontjához hozzárendelhető az adott mintaértékeken vett egyenletes eloszlás, a mintához tartozó véletlen eloszlás, a *tapasztalati eloszlás*.
A nagy számok törvénye értelmében a tapasztalati eloszlás $n \to \infty$ esetén konvergál a vektor valószínűségi változó elméleti eloszlásához, 1 valószínűséggel.

(vi) Ha több véletlen skalármennyiség együttes viselkedését vizsgáljuk, akkor együttesüket vektor valószínűségi változóval modellezzük. Vektorváltozók alkalmazásának létjogosultságát leginkább az adja, hogy *külön-külön vett eloszlásuk nem határozza meg kétdimenziós (együttes) eloszlásukat*, a függetlenség esetének a kivételével.
Vektor valószínűségi változóval modellezhetünk akkor is, ha a vizsgált véletlen mennyiség fizikailag vektor.
A vektorértékű véletlen mennyiségekhez tartozó eloszlások osztályozására, származtatására nézve mindaz elmondható, ami az egydimenziós esetben.

(vii) *Empirikus statisztika:* az $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ méréssorozathoz tartozó tapasztalati eloszlás az a diszkrét eloszlás, amelyre az (X_i, Y_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ adat valószínűsége az adat előfordulásának relatív gyakorisága a mintában. A tapasztalati eloszlás nagy n-re jól közelíti az elméleti eloszlást.

VII.1. Gyakorlófeladatok

1. Szorzateloszlás-e az alábbi, táblázattal adott eloszlás?

$Y \backslash X$	-1	2	2
2	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$
-1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{2}{6}$

Mennyi $P(X+Y=1)$?

2. Keressen olyan eloszlást a síkon, melynek vetületei a tengelyeken binomiális eloszlások $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, illetve $\left(3, \frac{1}{2}\right)$ paraméterekkel!

3. Igazolja, hogy a következő, sűrűségfüggvénnyel adott P valószínűségi eloszlás vetületei egyenletes eloszlások, bár P nem egyenletes:

$$h(x, y) = \frac{1}{4}[1 + xy(x^2 - y^2)] \quad (|x| < 1, \quad |y| < 1)\,!$$

4. Egy kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}}, \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1 \quad \text{és} \quad 0 < y < x^2.$$

a) $P(X + Y < 1) = ?$
b) Határozza meg a peremeloszlásokat! Független-e a két koordináta?

5. Az (X, Y) valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a következő:

$$H(x, y) = \begin{cases} 1 + e^{-x-y} - e^{-x} - e^{-y}, & \text{ha} \quad x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

a) Határozzuk meg X és Y peremeloszlás-függvényét!
b) Számítsuk ki a $P(X < 1, Y < 1)$ valószínűséget!

6. Az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$h(x, y) = 24xy \quad (0 \le x;\ 0 \le y;\ x + y \le 1).$$

a) Független-e egymástól X és Y?
b) Határozza meg a kétdimenziós eloszlásfüggvényt!

7. Írja fel a $\lambda = 3$ paraméterű exponenciális eloszlás és az $F(x) = \dfrac{x^2}{4}$ $(0 \le x \le 2)$ eloszlásfüggvényű eloszlások szorzateloszlásának a sűrűségfüggvényét!

8. A kétdimenziós standard normális eloszlás szerint mennyi a mértéke az origó középpontú, γ nyílásszögű szögtartománynak?

VII.1.1. Adott kétdimenziós eloszlás

9. A sík következő koordinátájú pontjaiból kaphatunk rádióüzenetet, a megadott valószínűségekkel:

Y \ X	-1	2
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
0,5	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

Adja meg a koordináták eloszlását! Függetlenek-e a koordináták?

10. Két telefonbeszélgetés véletlen X és Y időtartamának együttes sűrűségfüggvénye a következő: $h(x,y) = 10 \cdot e^{-2x-3y}$, ha $0 < y < x$. Örökifjúak-e a beszélgetések?

11. A $0 < x < 1$, $x < y < \dfrac{1}{x}$ tartományra koncentrálódó síkbeli tömegeloszlás sűrűségfüggvénye $h(x, y) = \dfrac{2x}{y}$.

a) Határozza meg a vetületeloszlásokhoz tartozó sűrűségfüggvényeket!
b) Mennyi tömeg koncentrálódik a $0 \le x,\ y \le 1$ négyzetre?

12. Határozza meg azt a normált eloszlást az origó középpontú, egységnyi sugarú körlapon, amelynek sűrűségfüggvénye
a) mindenhol arányos a középponttól mért távolsággal!
b) mindenhol arányos a kerülettől mért távolsággal!

13. Egy ellenséges repülőgép felbukkanása a lokátoron egy egységnyi sugarú kör alakú területen egyenletes eloszlás szerint várható. Az elhárító lövedék koordinátáit egymástól függetlenül, az ellenséges gép felbukkanási helye koordinátáinak eloszlásával megegyező eloszlás szerint választják. Mi a valószínűsége, hogy az elhárító lövedék mindkét koordinátája kisebb abszolút értékben 0,5-nél?

14. Mit értünk a síkon intervallumon? Legyen $F(x, y)$ egy kétdimenziós eloszlás eloszlásfüggvénye. Fejezze ki $F(x, y)$-nal az intervallumba esés valószínűségét!

15. Ejtőernyős egy egységnyi oldalú szabályos háromszög alakú területre érkezhet egyenletes eloszlás szerint. Adja meg az érkezési hely egyik magasságvonal irányába eső koordinátájának eloszlását! Függetlenek-e a derékszögű koordináták?

16. Egy távoli, kör alakúnak tekinthető célpontra adnak le nagyszámú lövést. Határozza meg a becsapódási helyek súlypontja eloszlásának típusát!

17. Egy R sugarú körre rádobunk egy $r < R$ sugarú kört úgy, hogy középpontja egyenletes eloszlású legyen a nagy körön. Mi a valószínűsége, hogy a kis kör benne lesz a nagy körben?

VII.1.2. Modellalkotás eloszlásokból

18. Egy dobókockát hatszor feldobunk. Legyen X a dobott páros számok száma, Y pedig a dobott hatosok száma. Határozza meg (X, Y) eloszlását!

19. Egy dobozban 6 darab cédula van 1-től 6-ig megszámozva. Csukott szemmel egyszerre kiveszünk hármat. A kivett három cédulán lévő számokat nagyság szerint leolvassuk, így jutunk az X, Y, Z valószínűségi változókhoz ($X < Y < Z$). Adjuk meg

a) Y eloszlását!

b) X és Z együttes eloszlását!

20. Budapesten egy hétköznap a koccanásos autóbalesetek száma átlagosan 40, Miskolcon átlagosan 10, és mindkét városban Poisson-eloszlású. Meghatározható-e a két városban összesen bekövetkezett koccanásos autóbalesetek számának eloszlása? Ha igen, határozza meg, ha nem, indokoljon!

21. 4 kg-os csomagokban cukorszállítmány érkezik. A cukor mennyiségének szórása 10 dkg csomagonként. Maga a csomagolás átlagosan 10 dkg súlyt tesz ki 5 g szórással. Adja meg az egy csomagra jutó cukor és a csomagolás súlyának mint vektor valószínűségi változónak az eloszlásfüggvényét!

22. Egy urnában 4 piros, 3 fehér, 5 zöld és 2 kék golyó van. Visszatevéssel húzunk nyolcszor. Legyen X, Y, Z, U rendre a kihúzott piros, fehér, zöld, kék golyók száma. Határozza meg

a) az (X, Y, Z, U) vektorváltozó eloszlását!

b) X eloszlását!

23. A $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ egységnégyzetben adott egy $h(x, y) = 2(x^3 + y^3)$ sűrűségfüggvényű eloszlás. $0 \le x \le 1$-ben, illetve $0 \le y \le 1$-ben választunk egy-egy X, ill. Y számot $h(x, y)$ peremeloszlásai szerint, de egymástól függetlenül. Mi a valószínűsége, hogy $X^2 < Y$?

24. Ketten 12 és negyed 1 óra között érkeznek egyenletes eloszlás szerint randevújuk színhelyére. Meghatározható-e azon véletlen időtartam eloszlása, amennyit egymásra várniuk kell? Ha igen, akkor határozza meg, ha nem, akkor indokoljon!

25. Egy négyzetlapot egy véletlen irányú egyenes mentén ollóval kettévágunk, úgy, hogy a bemetszés helye a kerületen, a szöge pedig $(0, 2\pi)$-ben egyenletes eloszlású és egymástól független valószínűségi változók. Mi annak a valószínűsége, hogy a vágással keletkező tartományok egyike sem háromszög?

26. Egy kikötőbe 24 óra alatt két teherhajó érkezik egyenletes eloszlás szerint, egymástól függetlenül. Az egyiknél egy, a másiknál két órát tart a rakodás, azonban csak egy rakodóhely van. Mi a valószínűsége, hogy egyik hajónak sem kell várakoznia a rakodásra?

27. Egy botot két, egymástól függetlenül, egyenletesen választott helyen eltörünk. Mi a valószínűsége annak, hogy a középső darab hosszabb a bot felénél?

28. Mi a valószínűsége annak, hogy az $x^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei komplex számok, feltéve, hogy az együtthatók egyenletes eloszlású valószínűségi változók $(0, 4)$-ben?

29. Két örökifjú, egymástól független élettartamú izzónk van egy év várható élettartammal. Mi a valószínűsége annak, hogy ugyanabban a hónapban égnek ki?

30. Egy pontot választunk az $y > 0$ félsíkon úgy, hogy polárkoordinátáit választjuk egymástól függetlenül. A Φ véletlen polárszög eloszlása egyenletes $(0, \pi)$-ben, az R távolság eloszlásának eloszlásfüggvénye pedig $\dfrac{r}{1+r}$ $(r > 0)$.

a) Adja meg az (R, Φ) vektorváltozó eloszlását!

b) Mi a valószínűsége, hogy a pont az egységkörlap első negyedére esik?

31. Két osztópontot választunk egyenletes eloszlás szerint, egymástól függetlenül a $(0, 1)$ intervallumban. Mi a valószínűsége, hogy a keletkező három szakaszból háromszög szerkeszthető?

VII.2. Szimuláció és statisztika

32. Egy (X, Y) vektorváltozóra kapott 13 elemű minta a következő: $(1, 2)$, $(3, 1)$, $(-1, 2)$, $(1, 3)$, $(4, -6)$, $(4, -6)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 2)$, $(1, 2)$, $(1, 1)$. Határozza meg

a) a mintához tartozó tapasztalati eloszlást!

b) a mintához tartozó két tapasztalati peremeloszlást!

c) a *b)*-beli peremeloszlásokhoz tartozó szorzateloszlást!

33. A **24.** feladathoz kapcsolódva szimulálja 100-szor az érkezések időpontjait, és rendre vizsgálja, kell-e valamelyik érkezőnek 5 percnél tovább várakoznia!

Utóbbinál a kapott relatív gyakoriságot írassa ki és hasonlítsa össze az elméleti valószínűséggel!

34. A **64.** feladathoz kapcsolódóan szimulálja 150-szer a két pont kiválasztását, és határozza meg a szóban forgó feltételes relatív gyakoriságot. Vesse össze az elméletileg várt valószínűségértékkel!

35. A **63.** feladathoz kapcsolódóan szimulálja 50-szer mindhárom húrválasztási eljárást, és rendre határozza meg a kedvező esetek relatív gyakoriságait!

36. Két szabályos pénzérmével dobunk m-szer. Ha az első érme fej, akkor jobbra, ha írás, akkor balra lépünk egy egységet. Ha a második érme fej, akkor felfelé, ha írás, akkor lefelé lépünk egy egységet. Így az m-edik dobás után az (S_m, T_m) pontba jutunk. Szemléltesse a bolyongás pályáját a síkon! Ezt a kísérletet megismételjük n-szer. Szemléltesse külön-külön az S_m és T_m koordináták eloszlását!

37. A **67.** feladathoz kapcsolódóan szimulálja és szemléltesse az illető indulását otthonról és gyalogútját a vasútállomáshoz, feltüntetve elindulása és megérkezése időpontjait, valamint azt, hogy sikerült-e elérnie valamelyik vonatot! Regisztrálja, hogy 240 eset közül hányszor kési le a vonatot!

VII.3. Vegyes feladatok

38. (X, Y) lehetséges értékeit és valószínűségeloszlását a következő táblázatban foglaltuk össze:

Y \ X	0	1
2	$2p$	$4p$
1	p	$3p$
0	p	p

ahol $p = \dfrac{1}{12}$.

a) $P(X + Y = 1) = ?$
b) Független-e X és Y?

39. Adja meg két geometriai eloszlás szorzateloszlását! Mi a valószínűsége e szerint az eloszlás szerint azon pontoknak, melyeknek koordinátaösszege 10?

40. Tekintse a $h(x, y) = 6e^{-2x-3y}$ $(x > 0,\ y > 0)$ sűrűségfüggvényű eloszlást a síkon. Mennyi a $B = \{(x, y) : x + 2y \leq 5\}$ halmazba esés valószínűsége?

41. Legyen (X, Y) sűrűségfüggvénye:

$$h(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2(1-x), \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

a) Írjuk fel X és Y sűrűségfüggvényét!

b) Írjuk fel a $P\left(X < x, 1 < Y < \dfrac{3}{2}\right)$ valószínűséget mint az x változó függvényét!

c) Független-e X és Y?

42. Legyen P azon eloszlás a síkon, amelynek eloszlásfüggvénye

$$H(x, y) = x^3 y, \quad \text{ha} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{és} \quad 0 \leq y \leq 1.$$

a) Határozza meg azon téglalapba esésnek a valószínűségét, melynek átellenes csúcsai az $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$ és $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{2}{4}\right)$ pontok?

b) Szorzateloszlás-e P?

43. A síkon kevert eloszlást értelmezünk a következőképpen: Egy négyzet minden csúcsába 0,1 nagyságú tömegpontot teszünk. A négyzet kerületén 0,5 tömegmennyiséget, a négyzet belsejében pedig 0,1 tömegmennyiséget osztunk szét egyenletesen. Tekintse azt a körlapot, amelynek középpontja a négyzet egyik csúcsa, sugara pedig a négyzet oldalhosszának a fele. Mi az ezen körlapba esés valószínűsége?

44. Határozza meg az

$$f(x)=x^{-\frac{1}{2}} \quad \left(0<x<\frac{1}{4}\right) \quad \text{és} \quad g(y)=1-|y| \quad (-1<y<1)$$

sűrűségfüggvényű eloszlások szorzateloszlásának eloszlásfüggvényét a $0<x<\frac{1}{4}$ tartományon!

45. Mutassa meg, hogy nem lehet kétdimenziós eloszlás eloszlásfüggvénye a következő függvény:

$$H(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x-y}, & \text{ha} \quad x,y\ge 0,\\ 0 & \text{egyébként.}\end{cases}$$

46. (X, Y) kétdimenziós standard normális eloszlású valószínűségi változó. Írja fel az alábbi valószínűségeket egy-egy integrállal:

a) $P(X^2<1)$,
b) $P(X^2+Y^2<1)$.
c) Igazolja, hogy $P(X^2+Y^2<1)\le P(X^2<1)\cdot P(Y^2<1)$.

47. Igaz-e, hogy $h(x, y)$ egy folytonos eloszlás sűrűségfüggvénye a T halmazon, ha

a) T a sík és $h(x,y)=\dfrac{e^{-|x|}}{2}$, ha $x=y$ és 0 egyébként?

b) $h(x, y)$ ugyanaz, mint az *a)*-ban és T az $x=y$ egyenes?

c) $h(x,y)=\dfrac{e^{-|x|}}{2}$ minden $(x,y)\in\mathbf{R}^2$-re és $T=\mathbf{R}^2$?

48. Legyen (X, Y, Z) egy $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$ és $n=20$ paraméterű polinomiális eloszlású valószínűségi változó. Határozza meg X és Y együttes eloszlását!

VII.3.1. Adott kétdimenziós eloszlás

49. Egy ellipszis alakú területen meteorbecsapódást észlelnek egyenletes eloszlás szerint. Adja meg az egyik derékszögű koordináta eloszlását! Független-e a két derékszögű koordináta eloszlása?

50. Ejtőernyős egy 1500 m^2-es területre ugrik egyenletes eloszlás szerint. Sikeres az ugrás, ha egy 1000 m^2-es területen ér földet. Különdíj jár, hogyha ezen belül egy adott 10 m sugarú körön belül ér földet. Feltéve, hogy ugrása sikeres, mi a valószínűsége annak, hogy különdíjat is kap?

51. Adjon meg egy olyan tömegeloszlást a síkon, hogy peremeloszlásainak eloszlásfüggvényei rendre

$$F(x)=\sin x \quad \left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right), \quad \text{ill.} \quad G(y)=\frac{y}{1+y} \quad (y>0)$$

legyenek!

52. Egy R sugarú körbe szabályos hatszöget rajzolunk. Ezután a körlapon négy pontot választunk találomra egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy pont nem a hatszög belsejébe esik?

VII.3.2. Modellalkotás eloszlásokból

53. Tapasztalatunk szerint a céltábla 10-es, 20-as, 30-as, 50-es köreibe a találat valószínűsége rendre 0,5; 0,3; 0,15; 0,05.

a) Mi a valószínűsége, hogy 9 lövésből rendre 4 db 10-es, 2 db 20-as, 2 db 30-as és 1 db 50-es találat lesz?
b) Adja meg a 20-as találatok számának eloszlását!

54. Egy dobozban 1-től 22-ig számozott, 22 darab cédulát helyeztünk el. Véletlenszerűen kihúzunk egy cédulát. A kihúzott szám két szempontból érdekel: a 2-vel, illetve a 3-mal való oszthatóság szempontjából. Az X valószínűségi változó legyen 1, ha páros számot húzunk, és legyen 0, ha páratlant húzunk. Hasonlóképpen $Y=1$ jelentse azt az eseményt, hogy hárommal osztható a kihúzott szám, és $Y=0$ azt, hogy 3-mal nem osztható. Írjuk fel az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását!

55. 8 gyerek között 18 jutalmat sorsolnak ki, az egyes sorsolások egymástól függetlenek. Jelölje X_i az i-edik gyerek nyereményeinek számát ($i = 1, 2, \ldots, 8$) és legyen $X = X_1 + X_2 + X_3$, $Y = X_4 + X_5 + X_6 + X_7$. Határozza meg az (X, Y) vektorváltozó eloszlását!

56. Egy dobozban 30 db 40 W-os, 30 db 60 W-os és 40 db 100 W-os villanykörte van. Kiveszünk véletlenszerűen, visszatevés nélkül 20 villanykörtét. Jelentse X a mintában szereplő 40 W-os égők számát, Y pedig a 60 W-os égők számát.
a) Írjuk fel az (X, Y) valószínűségi változó eloszlását!
b) Számítsuk ki X és Y peremeloszlását!

57. Két exponenciális eloszlású izzót tekintünk, melyek élettartama független, 2 év várható értékkel. Mi a valószínűsége, hogy kiégésük között kevesebb, mint 6 hónap telik el? Kihasználja-e a megoldásban a függetlenséget?

58. „Két kikötőben éjfél és egy óra között egy-egy csempészszállítmány várható, érkezésük egyenletes eloszlású, egymástól független” – jelentik a nyomozóknak. Függetlenek-e a következő A és B események?
A: A két szállítmány érkezése között több mint 20 perc telik el.
B: Együttesen sem kell a nyomozóknak tovább várniuk a két kikötőben a szállítmányokra, mint egy órát.

59. Egy kör alakú fedőt, melynek fogója felfelé keskenyedő kúp alakú, fogójával lefelé megpörgetünk az asztalon. Megjelöljük a fedő peremén azt a pontot, amelynél végül oldalra dőlve megállapodik. Határozza meg annak valószínűségét, hogy háromszor megismételve a fenti kísérletet, a fedő centrumától a megjelölt pontokig húzott körsugarak közti szögek mind tompaszögek!

60. Három pontot választunk az egységnyi kerületű körvonalon egyenletes eloszlás szerint. Mi a valószínűsége annak, hogy nincs közöttük két olyan pont, amelyik 0,25-nél közelebb lenne egymáshoz?

61. Ketten randevút beszélnek meg 12.30 és 12.45 között. Ha mindketten egyenletes eloszlás szerint és egymástól függetlenül érkeznek, akkor mi a valószínűsége, hogy egyiküknek sem kell 5 percnél tovább várni? Mit állíthatunk akkor, ha a függetlenség feltételét elejtjük?

62. Egy 10×10 cm^2 területű, adott vastagságú törökméz ára 30 Ft. Amikor múltkor vettem egyet, az árus csak úgy körülbelül jelölte be a két oldalát, egymástól függetlenül és vágta le a darabokat, úgy, hogy egy-egy oldal egyenletes eloszlású volt 9 és 11 cm között. Minek nagyobb a valószínűsége: annak, hogy jól jártam, vagy hogy rosszul jártam?

63. (Bertrand) Körben a következő eljárásokkal választunk húrt:
a) A körív egyik pontját rögzítjük. A húr másik végpontját a körív kerületén egyenletes eloszlás szerint választjuk.
b) A kör egy rögzített sugarán választunk egyenletes eloszlás szerint pontot és vesszük a rá merőleges húrt.
c) A körtartományon választunk egyenletes eloszlás szerint egy pontot és tekintjük a hozzá vezető sugárra merőleges, az adott ponton átmenő húrt.
Számítsa ki mindhárom esetben annak valószínűségét, hogy a választott húr hosszabb a körbe írható szabályos háromszög oldalánál! Keressen még más módszereket is húr választására, és határozza meg esetükben is az iménti valószínűséget! Az *a)* és *b)* esetekben határozza meg a választandó húr hosszának várható értékét!

64. Milyen vastag legyen egy pénzérme ahhoz, hogy feldobva $\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$ valószínűséggel essen az írás, a fej oldalára, illetve az „élére”? Készítsen a problémához megfelelő modellt!

65. Van 10 golyónk és 4 dobozunk. A golyók mindegyikét a többitől függetlenül egyenlő eséllyel rakjuk a 4 doboz valamelyikébe. Tegyük fel, hogy rendre X_1, X_2, X_3, X_4 db golyó kerül az egyes dobozokba. Adja meg ezen 4-dimenziós valószínűségi változó
a) lehetséges értékeit!
b) eloszlását!

66. 13 db golyót egymás mellé rakunk. Közülük hármat kiválasztunk úgy, hogy minden lehetséges választás esélye egyforma. A kiválasztott golyók helyére válaszfalakat teszünk. Megfigyeljük, hogy rendre hány golyó van az egyes válaszfalak között. Adja meg az így származtatott 4-dimenziós valószínűségi változó
a) lehetséges értékeit!
b) eloszlását!

67. Valaki reggel 7.30 és 8 óra között indul el hazulról. Az út körülbelül 20–30 percet vesz igénybe.
a) Mi a valószínűsége, hogy az illető eléri vagy a 8.25-ös, vagy a 8.05-ös vonatot, feltéve, hogy az otthonról indulása és a pályaudvarig megtett út ideje

is egyenletes eloszlásúnak tekinthető a fenti intervallumokban és ezek egymástól függetlenek?

b) 240 munkanapból kb. hányszor kési le mindkét vonatot?

68. Két pontot választunk (0, 1)-ben egymástól függetlenül. Mi a valószínűsége, hogy a keletkező három intervallumból a középső a leghosszabb?

VII.4. Ellenőrző kérdések

69. Meghatározza-e külön-külön X és Y eloszlása rendre a

a) $P(X<Y)$,

b) $P(X=Y)$,

c) $P(X\cdot Y=0)$,

d) $P(X+Y<2)$

valószínűségeket?

70. Igaz-e, hogy egy síkbeli

a) folytonos eloszlás vetületeloszlásai is folytonosak?

b) diszkrét eloszlás vetületeloszlásai is diszkrétek?

c) kevert eloszlás vetületeloszlásai is kevertek?

d) eloszlás mindig a peremeloszlásainak szorzata?

71. A síkon egy egyenletes eloszlás a (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) pontokra koncentrálódik. Folytonos-e az eloszlás eloszlásfüggvénye a (0, 1) pontban?

72. Legyen T tetszőleges síkbeli tartomány. Igaz-e, hogy

a) egy T-n egyenletes eloszlás peremeloszlásai is egyenletes eloszlások?

b) ha egy T-n vett eloszlás vetületeloszlásai egyenletesek, akkor az eloszlás a T-n is egyenletes?

73. Legyen N a $0<x,y<1$ négyzet és $T\subseteq N$. Generálhatunk-e úgy egyenletes eloszlású vektorokat T-n, hogy N-en generálunk egyenletes eloszlású vektorokat és ezekből elhagyjuk azokat, amelyek nem esnek T-be?

74. Igazolja valószínűségszámítási megfontolással a

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\,dy\right)dx$$

összefüggést, ahol $h(x, y)$ kétdimenziós sűrűségfüggvény!

75. Mutassa meg, hogy a

$$h(x,y)=\frac{|x|}{\sqrt{8\pi}}\,e^{-|x|-\frac{1}{2}x^2y^2}\qquad (x,y\in\mathbf{R}^1)$$

sűrűségfüggvényű eloszlás $f(x)$ peremsűrűség-függvénye nem folytonos az $x=0$ pontban!

VIII. Feltételes eloszlás

(i) Ha (X, Y) eloszlása *diszkrét*, akkor Y-nak a rögzített $X = x_i$-re vonatkozó *feltételes eloszlása:*

$$P(Y = y_j \mid X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

(másképpen: a $P(X = x_i, Y = y_j)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ eloszlás 1-re normáltja).
X-nek a rögzített $Y = y_j$-re vonatkozó *feltételes eloszlása:*

$$P(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Az eloszlás táblázatos megadása esetén a feltételes eloszlás az $X = x_i$ $(Y = y_j)$ oszlophoz (sorhoz) tartozó normált eloszlás.

Ha (X, Y) eloszlása *folytonos*, akkor Y-nak rögzített $X = x$-re vonatkozó feltételes eloszlása folytonos és

$$k(y \mid x) = \frac{h(x, y)}{f(x)}$$

az $X = x$-re vonatkozó *feltételes sűrűségfüggvény*, ahol $h(x, y)$ X és Y együttes sűrűségfüggvénye, $f(x)$ X sűrűségfüggvénye, $f(x) \neq 0$ (másképpen: $k(y \mid x)$ rögzített x-re, a $h(x, y)$ sűrűségfüggvényű eloszlás 1-re normáltja y-ban).
Hasonlóan

$$l(x \mid y) = \frac{h(x, y)}{g(y)}.$$

Ha A egy az (X, Y) valószínűségi változóval kapcsolatos pozitív valószínűségű esemény, akkor X A-ra vonatkozó *csonkított* eloszlásának eloszlásfüggvénye:

$$P(X < x \mid A) = \frac{P(X < x \cap A)}{P(A)}.$$

Szorzástétel feltételes eloszlásokra diszkrét esetben:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j \mid X = x_i),$$

folytonos esetben:

$$h(x, y) = f(x) \cdot k(y \mid x).$$

A másik feltételes eloszlásrendszerre hasonló összefüggések érvényesek. Speciális esete a szorzástételnek a függetlenségre vonatkozó, VII. fejezetbeli szorzásszabály.

Az X és Y valószínűségi változók akkor és csak akkor *függetlenek*, ha az X-re (illetve Y-ra) vonatkozó feltételes eloszlások megegyeznek Y (illetve X) eloszlásával, tehát megegyeznek és nem függenek a feltételtől, azaz, pl. diszkrét esetben

$$P(Y = y_j \mid X = x_i) = P(Y = y_j) \ \text{ minden rögzített } x_i\text{-re} \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

vagy folytonos esetben

$$k(y \mid x) = g(y) \quad (\text{illetve } l(x \mid y) = f(x)).$$

(ii) *Empirikus statisztika.* Az $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ *minta* esetén Y-nak a rögzített $X = x_i$-re vonatkozó feltételes tapasztalati eloszlása az x_i értékhez rendre hozzá tartozó (x_i, y_j) értékekhez tartozó tapasztalati eloszlás. Hasonlóan értelmezhető tetszőleges, a mérési adatokkal kapcsolatos A eseményre vonatkozó feltételes eloszlás is.

(iii) Ha egy véletlen vektor egyik koordinátája ismert, rögzített, akkor a másik koordináta eloszlása: a koordinátának az adott értékre vett feltételes eloszlása, azaz a kétdimenziós eloszlás ezen értékre korlátozott normált eloszlása.

Ha a két koordinátaváltozóra nézve ismert a sík egy tartományát meghatározó valamely rögzített reláció, akkor a vektorváltozó ezen tartományra korlátozott normált eloszlása: az adott tartományra csonkított eloszlás.
A feltételes eloszlásokra vonatkozó szorzástételt általában a feltételes eloszlások ismeretében az együttes eloszlás meghatározására alkalmazzuk. Speciális eset a független eloszlásokra vonatkozó szorzástétel.

(iv) Az $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ *mérések* esetén Y-nak a rögzített $X = x_i$-re vonatkozó feltételes tapasztalati eloszlása az x_i értékekhez rendre hozzá tartozó (x_i, y_j) *mérésekhez* tartozó tapasztalati eloszlás.

VIII.1. Gyakorlófeladatok

1. Az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlása legyen

$Y \backslash X$	0	1
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

a) Adja meg az $Y = 0$ feltételre vonatkozó feltételes eloszlást!
b) Számítsa ki a $P(Y < 2 \mid X = 0)$, illetve $P(X = 0 \mid X + Y = 1)$ valószínűségeket!
c) Függenek-e a feltételes eloszlásrendszerek a feltételtől?

2. Határozza meg a

$$h(x, y) = \frac{2x}{y} \qquad \left(x < y < \frac{1}{x},\quad 0 < x \le 1\right)$$

sűrűségfüggvényű eloszlás y tengelyre vett feltételes eloszlásait (lásd még VII.**11.** feladat)!

3. Az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását jellemezze a

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}[1 + xy(x^2 - y^2)], & \text{ha } |x| \le 1,\ |y| \le 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

sűrűségfüggvény. Írja fel a $k(y \mid x)$ és $l(x \mid y)$ feltételes sűrűségfüggvényeket! Állapítsa meg, független-e X és Y?

4. Egy síkbeli eloszlás sűrűségfüggvénye $h(x, y) = 6\,xy^2 \quad (0 \le x, y \le 1)$. Igaz-e, hogy az eloszlás valamely feltételes eloszlásrendszere nem függ a feltételtől?

5. X és Y egész értékeket felvevő valószínűségi változók. X eloszlása egyenletes a $\{0, 1, 2\}$ halmazon. Az $X = i$ feltétel mellett Y feltételes eloszlása is egyenletes a 0 és $2 - i$ közé eső egész számokon, a határokat is megengedve $(i = 0, 1, 2)$. Határozza meg
a) (X, Y) együttes eloszlását!
b) a $Z = X + Y$ valószínűségi változó eloszlását!

6. *a)* Állítson elő síkbeli valószínűségeloszlást a

$$P(X = i) = \frac{6i - i^2}{35} \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

eloszlásból és az $X = i$-re vett $B(i, 0, 5)$ binomiális eloszlások rendszeréből mint feltételes eloszlásokból!
b) Adjon formulát a vízszintes egyeneseken vett feltételes eloszlásokra az *a)*-beli eloszlás esetén!

7. Egy kétdimenziós diszkrét eloszlás vetülete az x tengelyre 0,25 paraméterű geometriai eloszlás, az y tengellyel párhuzamos egyeneseken vett feltételes eloszlásai szintén geometriai eloszlások, valamennyien $\frac{1}{3}$ paraméterrel.

a) Szorzateloszlás-e az adott eloszlás?
b) Mi az y tengelyre vett vetületeloszlás?

8. Igazolja folytonos eloszlásokra
a) a teljes valószínűség tétel megfelelőjét, tehát, hogy

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)k(y\,|\,x)\,dx\,!$$

b) a Bayes-tétel megfelelőjét, tehát, hogy

$$k(y\mid x) = \frac{g(y)l(x\,|\,y)}{f(x)}\,!$$

9. X egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $(0, 1)$ intervallumon, Y eloszlása az $X = x$ feltétel mellett egyenletes a $(0, \sqrt{x})$ intervallumon. Határozzuk meg X-nek az $Y = y$ feltétel melletti feltételes sűrűségfüggvényét!

10. Egy kétdimenziós valószínűségi változó első koordinátája standard normális eloszlást követ. Ha az első koordináta x, akkor a második koordináta feltételes eloszlása $\frac{x^2}{2}$ paraméterű exponenciális eloszlás. Határozza meg a második koordináta sűrűségfüggvényét!

11. X és Y független, 3 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Határozza meg X eloszlását az $X+Y \le 3$ feltétel mellett!

12. Tíz héten át játszunk az ötös lottón 1 szelvénnyel. Jelentsék az $X_0, X_1, \dots, X_5$ valószínűségi változók rendre azt, hogy hány alkalommal volt $0, 1, \dots, 5$ találatunk. Határozza meg

a) a hat valószínűségi változó együttes eloszlását!
b) X_2-nek X_4-re vett feltételes eloszlását!

13. Dobókockát hatszor feldobunk. Jelentse X a dobott párosok, Y a dobott hatosok számát. Határozza meg X-nek Y-ra vonatkozó lehetséges feltételes eloszlásait!

14. Határozza meg az ötös lottón a legkisebb számnak a legnagyobbra vonatkozó feltételes eloszlását, ha a legnagyobb szám a 60.

15. Egy eldugott kincs helyét az (X, Y) vektorváltozó adja meg méterben, sűrűségfüggvénye

$$h(x,y) = \begin{cases} cy^2, & \text{ha } 0 \le |y| < x,\ 0 < x < 1 \\ 0 & \text{egyébként}. \end{cases}$$

Az origóból indulunk el a kincset keresni. Tőlünk keletre x_0 méterre fontos nyom található, és azt is tudjuk, hogy az $X = x_0$ feltétel mellett az $|Y| < \frac{1}{2}$ esemény esélye $\frac{1}{4}$. A c konstans meghatározása után határozza meg x_0 értékét!

16. Egyenletes eloszlás szerint választunk pontot az $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} \le 1$ ellipszistartományon. Határozza meg a lehetséges feltételes eloszlásokat!

17. Egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot

a) a $0 \le x, y \le 1$ négyzeten,
b) az *a)*-beli négyzet origó körül $\frac{\pi}{4}$-gyel elforgatottján.

Függetlenek-e a választott pont koordinátái rendre az *a)*, illetve a *b)* esetben?

18. Annak valószínűsége, hogy egy év alatt nem zuhan le repülőgép sehol a világon, $\frac{1}{100}$. Ha egy gép lezuhan, $\frac{3}{4}$ valószínűséggel meg tudják találni a fekete dobozt.

a) Határozza meg a megtalált fekete dobozok számának eloszlását!
b) Feltéve, hogy tavaly 20 fekete dobozt sikerült megtalálni, mi a valószínűsége annak, hogy 40 gép zuhant le?
c) Függetlenek-e a megtalált, illetve elveszett fekete dobozok számai mint valószínűségi változók?

19. Az, hogy egy almafán hány virág van, geometriai eloszlású valószínűségi változó, $\frac{1}{5}$ paraméterrel. Minden virágból $\frac{2}{3}$ valószínűséggel lesz alma. Mi a valószínűsége, hogy 30 alma lesz a fán?

20. Zsebrádiómon három magyar adót, a Kossuthot, a Petőfit és a Danubiust lehet fogni. 0,5 valószínűséggel a Kossuthot, 0,25, ill. 0,25 valószínűséggel a másik két adót szoktam hallgatni. Annak a valószínűsége, hogy ezeken az adókon zene megy és nem próza, rendre $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, ill. $\frac{3}{4}$. Bekapcsolom a rádióm, zene megy, de nem tudom, melyik adóra van éppen beállítva. Mi a valószínűsége, hogy a Kossuthot hallgatom?

21. Véletlenszerűen teszünk két jelet 0 és 1 közé. Az elsőt olyan eloszlás szerint tűzzük ki, melynek sűrűségfüggvénye arányos a pontnak az intervallum jobb végpontjától való távolságával. A második jelet az első jel kitűzése után a 0 és az első jel közé tesszük, olyan eloszlás szerint, melynek sűrűségfüggvénye minden pontban arányos a pontnak az origótól való távolságával.
a) Aki csak a második jelet figyeli meg, milyen eloszlást tekintsen a megfigyelése modelljének?
b) Mi a valószínűsége, hogy mindkét jel az intervallum második felére kerül?

22. A bergengóc villanykörték izzószálában szennyeződésként kén is van. A véletlentől függ, hogy mennyi. A kén grammokban mért mennyisége exponenciális eloszlású, $\lambda = 2$ paraméterrel. Ha x gramm kén van az izzószálban, akkor a körte élettartama x paraméterű exponenciális eloszlásúnak vehető.
a) Határozza meg egy véletlenszerűen választott izzó élettartamának sűrűségfüggvényét!
b) A kén javítja vagy rontja a villanykörték élettartamát, vagy független tőle?

23. Egy ejtőernyős 2 és 4 km közötti magasságban ugrik ki a repülőgépből. Az ugrás magassága egyenletes eloszlásúnak tekinthető e két határ között. Az ernyőt a zuhanás ideje alatt, időben ugyancsak egyenletes eloszlás szerint, de legkésőbb 4 km magasságban oldja ki. Adja meg az ernyő kioldása magasságának az eloszlását!

24. 0 óra és 1 óra között egy X időpontban, melynek a sűrűségfüggvénye $\frac{6}{5}\left(x+\frac{1}{3}\right)$ $(0 \le x \le 1)$, érkezik egy rádióüzenet. Az üzenet dekódolásának időtartama is valószínűségi változó, melynek eloszlása X megfigyelt értékétől függ: $X = x$ esetén a sűrűségfüggvénye $\frac{x+(y-1)^2}{x+\frac{1}{3}}$ $(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$. Mi a valószínűsége annak, hogy a dekódolás tovább tart, mint amennyit az üzenetre várni kellett éjfél után?

25. Három pontot választunk egyenletes eloszlás szerint az egységnyi kerületű körvonalon. Mi a valószínűsége annak, hogy a legrövidebb olyan körív hossza, amelyen mindhárom pont rajta fekszik, kisebb 0,5-nél?

26. Megfigyeljük, hogy egy 2 paraméterű exponenciális élettartamú izzó mely időpontban ég ki. Ha az X-edik pillanatban ég ki, akkor becsavarunk a helyére egy ugyanolyan élettartam-eloszlású égőt. Tegyük fel, hogy ez utóbbi a működésének Y-odik pillanatában ég ki. Adja meg X-nek az Y-ra vonatkozó feltételes eloszlását!

VIII.2. Szimuláció és statisztika

27. Tekintsük az (X, Y) valószínűségi változóra mért $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(1, 4)$, $(-2, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 0)$, $(-1, +1)$, $(1, -1)$, $(2, 2)$, $(1, -2)$ adatrendszert. Határozza meg a második koordináta tapasztalati feltételes eloszlását
a) az $X = 1$ feltételre vonatkozólag!
b) az $X > Y$ feltételre vonatkozólag!
c) az $X > Y$ tulajdonságú pontok kizárásával kapott értékekre!

28. Egy kétdimenziós adatrendszernél az ötös mint második koordináta relatív gyakorisága: $\frac{4}{5}$. Az ötös mint második koordináta esetén a hármas mint első koordináta relatív gyakorisága: $\frac{7}{8}$. Mi az adatrendszerben a $(3, 5)$ mérés relatív gyakorisága?

29. A **24.** „rádióadás dekódolására vonatkozó” feladathoz kapcsolódóan szimulálja n-szer a dekódolás folyamatát. Vesse össze a kísérletek során kapott relatív gyakoriságot az elméleti valószínűségértékkel!

30. A **23.** „ejtőernyős” feladathoz kapcsolódóan szimulálja és szemléltesse n-szer az ugrást, az ugrás és az ejtőernyő kioldási magasságának feltüntetésével!

31. A **22.** „kénszennyeződéses” feladathoz kapcsolódóan ellenőrizze véletlen n elemű mintán, egy n elemű kontrollmintát is alapul véve, hogy javítja vagy rontja-e a kén az izzó minőségét!

32. A **47.** feladathoz kapcsolódóan szemléltesse n kísérlet esetén a szóban forgó csonkított tapasztalati eloszlást és vesse össze az elméletivel!

VIII.3. Vegyes feladatok

33. Határozza meg a $p_{ij} = \dfrac{i+j^2}{60}$ $(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$ eloszlásnak a függőleges egyeneseken vett feltételes eloszlásai rendszerét! Függenek-e ezek a feltételtől?

34. Legyenek X és Y egymástól független, a [0, 1] intervallumon lineárisan sűrűsödő eloszlású ($f(x)=2x$ $(0<x<1)$) valószínűségi változók. Határozza meg a következő valószínűségeket:

a) $P(X+Y<1 \mid X=\frac{1}{2})$;

b) $P(X+Y<1 \mid X<\frac{1}{2})$.

35. Adja meg a következő eloszlás vetületeloszlásainak direkt szorzatát:

Y \ X	1	2
2	0,24	0,36
1	0,16	0,24

36. Legyen (X, Y) sűrűségfüggvénye:

$$h(x,y)=\begin{cases}1, & \text{ha } 0<x<1,\ 0<y<2(1-x)\\ 0 & \text{egyébként}.\end{cases}$$

Számítsa ki

a) a $k(y \mid x)$ és $l(x \mid y)$ feltételes sűrűségfüggvényeket!

b) az $F\left(x \,\middle|\, 1<Y<\frac{3}{2}\right)$ feltételes eloszlásfüggvényt!

Szorzateloszlás-e az adott eloszlás?

37. Legyen (X, Y) sűrűségfüggvénye $h(x,y)=\dfrac{1}{x}$, ha $0 \le y \le x \le 1$ és 0 egyébként.

a) Határozza meg az X-re vonatkozó feltételes eloszlásokat!

b) $P(X^2+Y^2 \le 1 \mid X=x)=?$

38. Igazolja, hogy X és Y függetlenek, ha együttes sűrűségfüggvényük, $h(x, y)$ az x és y változókra nézve faktorizálható, azaz

$$h(x,y)=r(x)\,s(y)$$

valamely r és s függvényekre!

39. Tekintse a vízszintes tengelyen az $\frac{1}{4}$ paraméterű geometriai eloszlást. A vízszintes tengely k pontján (k természetes szám) átmenő függőleges egyenesen a feltételes eloszlás legyen az $\frac{1}{k}$ paraméterű geometriai eloszlás. Az ezen eloszlásokból komponált eloszlás szerint mennyi az $\{(x,y)\colon x+y\le 4\}$ halmazba esés valószínűsége?

40. Tekintsük az első koordinátatengelyen az $\frac{1}{2}$ paraméterű geometriai eloszlást.

A vízszintes tengely n pontján (n természetes szám) átmenő függőleges egyenesen a feltételes eloszlás sűrűségfüggvénye legyen $k(y \mid n) = n\,y^{n-1}$ $(0 \le y \le 1,\quad n = 1, 2, \dots)$. Adja meg az ezen eloszlásokból komponált síkbeli eloszlást, annak vetületét a függőleges tengelyen, és a vízszintes egyeneseken a feltételes eloszlásokat!

41. Legyen X exponenciális eloszlású. Igazolja, hogy X tört része: $\{X\}$ és X egész része: $[X]$ független valószínűségi változók!

42. Adjon meg táblázattal olyan síkbeli eloszlást, melynek az első tengelyre vetett vetülete 3-adrendű, 0,25 paraméterű binomiális eloszlás, és a megfelelő feltételes eloszlásainak rendszere az alábbi táblázatból olvasható ki!

$Y \backslash X$	0	1	2	3
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{6}$

Szorzateloszlás lesz-e a kapott eloszlás?

43. Legyen

$$k(y|x) = \begin{cases} \dfrac{2y}{x^2}, & \text{ha } y \in [0, x] \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

a) $P\left\{(x, y) : y > \frac{x}{2}\right\} = ?$

b) Határozza meg a másik peremsűrűség-függvényt!

44. Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = cx^2$ $(0 < x < 2)$. Az $X = x$ feltétel mellett Y egyenletes eloszlású 0 és x között.

a) $c = ?$

b) $P\left(X > \frac{1}{2} \mid X < \frac{3}{2}\right) = ?$

c) $P\left(Y > \frac{1}{2} \mid X < \frac{3}{2}\right) = ?$

d) $P\left(X > \frac{3}{2} \mid Y = \frac{1}{2}\right) = ?$

45. Egy kétdimenziós valószínűségi változó első koordinátájának eloszlásfüggvénye $F(x) = 1 - (x+1)e^{-x}$ $(x > 0)$. A második koordinátának az elsőre vonatkozó feltételes eloszlásfüggvénye: $F(y|x) = \frac{2y}{x}$ $\left(0 < y < \frac{x}{2}\right)$. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy az első koordináta kisebb 3-nál, feltéve, hogy a második koordináta egyenlő 1-gyel!

46. Két, egymástól független valószínűségi változó külön-külön p paraméterű geometriai eloszlást követ. Feltéve, hogy az összegük 5-tel egyenlő, adja meg az együttes eloszlásukat és a külön-külön vett eloszlásukat is!

47. Egy kalkulátoron két, egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlásúnak tekinthető véletlen számot generálunk. Az elsőt változatlanul hagyjuk, a másodikat megszorozzuk 2-vel, így jutunk az X és Y véletlen számokhoz. Megegyezünk abban, hogy a kísérletet csak akkor tekintjük érvényesnek, ha a $8(X - X^2) \ge Y$ feltétel teljesül. Ilyen feltétel mellett az X valószínűségi változónak mi az eloszlása?

48. Legyenek X és Y független, α_1, illetve α_2 paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változók. Igazolja, hogy X az $X + Y = n$ feltételre nézve binomiális eloszlású!

49. Tízszer feldobunk egy pénzdarabot. Legyen X a dobott írások száma, Y pedig az a szám, ahányadikra sikerült először fejet dobni (ha nem sikerült, akkor Y értéke legyen 0). Határozza meg Y-nak X-re vonatkozó feltételes eloszlásait!

50. Jelölje X, illetve Y az A, illetve B pártra a választásokon leadott szavazatszázalékokat egy helységben. X és Y együttes sűrűségfüggvénye az alábbi:

$$h(x,y)=\begin{cases}0{,}8(x+xy+y), & \text{ha } 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\\ 0 & \text{egyébként}.\end{cases}$$

Az Y értékét megfigyelve kell tippelnünk, hogy bekövetkezik-e az $X<\frac{1}{2}$ esemény. Y melyik megfigyelt értéke esetén a legkisebb annak a valószínűsége, hogy hibásan tippelünk?

51. Két telefonbeszélgetés időtartamának együttes sűrűségfüggvénye

$$h(x,y)=ce^{-2x-3y}\quad (x,y\ge 0).$$

Független-e a két beszélgetés időtartama?

52. Tíz dobókockát feldobunk, és X darab kettest kapunk. Ezután még egyszer feldobjuk a tíz kockát és Y darab páratlan számot kapunk. Adja meg

a) (X, Y) eloszlását!

b) Y-nak X-re vonatkozó feltételes eloszlását!

53. Feldobunk n db dobókockát. Azokat, amelyek a 6-os oldalukra esnek, még egyszer feldobjuk. Adja meg az utóbbi dobásoknál kapott páros dobások számának eloszlását!

54. A Bóvli Channel nevű tv-adón este 9 órakor $\frac{1}{2}$ valószínűséggel film, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel klip, $\frac{1}{6}$ valószínűséggel reklám megy. Feltéve, hogy 10 alkalommal próbálkozva 5-ször film, 2-szer klip, 3-szor reklám ment, mi a valószínűsége, hogy a reklám rendre az 1., 2. és 3. alkalmakra esett?

55. A babona úgy tartja, hogy a csillaghullások száma úgy befolyásolja az öngyilkosságok számát, hogy kb. 100 csillaghullásra jut egy öngyilkos.

a) Amennyiben júliusban 1200 volt a csillaghullások száma, akkor egy babonás ember szerint mi annak a valószínűsége, hogy júliusban 5 öngyilkosság lesz?

b) Tegyük fel, hogy egy nyári hónapban átlagosan 1000 csillaghullás van. Egy babonás ember szerint mi annak a valószínűsége, hogy általában egy nyári hónapban 5 öngyilkosság lesz?

56. Egy autóverseny előfutama a starthelyekért folyik. Tíz autó indul az előfutamon, az autók kb. egyformán esélyesek. Annak a valószínűsége, hogy egy autó magát a versenyt megnyeri, fordítottan arányos az előfutamon elért helyezésével. Mi a valószínűsége, hogy a versenygyőztes autó az előfutamon is az első három helyezett között volt?

57. Legyen $h(x,y)=\frac{1}{8}(x^2-y^2)e^{-x}\quad (0<x<\infty,\ |y|<x).$

a) $f(x)=?$

b) $g(y)=?$

58. Feldobok egy piros dobókockát, majd még annyi fehéret, ahányat a piros kockával dobtam.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege 40-nél nagyobb (az összegbe a piros kockán dobott értéket is belevesszük)?

b) Feltéve, hogy a dobott számok összege 40-nél is nagyobb, mi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege pontosan 41?

59. Hét urna valamelyikéből húzunk golyót, egyenlő valószínűséggel mindegyikből. Háromban 2 fehér és 1 piros, kettőben 2 fehér, kettőben 3 piros és 1 fehér golyó van. Feltéve, hogy fehér golyót húztunk, mi a valószínűsége, hogy a csak fehér golyókat tartalmazó urnákból húztunk?

60. Egy forgalmas útkereszteződésnél annak valószínűsége, hogy 20 s-ig nem halad át autó, 0,01. Annak valószínűsége, hogy 20 s alatt egy autó túllépi a megengedett sebességhatárt, 0,15. Feltéve, hogy 20 s alatt 8 autó is túllépte már a sebességhatárt, mi a valószínűsége, hogy kevesebb, mint 30 autó haladt át?

61. Egy egységnyi átfogójú derékszögű háromszög derékszögnél lévő C csúcsát úgy választjuk véletlenül, hogy vetületpontja az átfogó egyik felén egyenletes eloszlású legyen. Ezután a kisebbik befogón választunk egy pontot, szintén egyenletes eloszlás szerint.

a) Adja meg a befogón választott pontnak a befogó átfogóval közös végpontjától vett távolságának az eloszlását!

b) Ha tudjuk, hogy e távolság $\frac{1}{3}$, mi lesz C vetületpontjának eloszlása a fél átmérőn?

62. A (0, 1)-ben az $x+\frac{1}{2}$ sűrűségfüggvényű eloszlás szerint választunk véletlenül egy $X = x_0$ pontot. Az x_0 abszcisszájú egyenes $y \in (0, 2)$ szakaszán pedig az $\frac{1}{2}\cdot\frac{2x_0+y}{2x_0+1}$ sűrűségfüggvényű eloszlás szerint választunk egy Y pontot. Mi a valószínűsége, hogy az $\{(x,y): y \geq 2x^2,\ \ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ tartományba jutunk?

63. Először egy X pontot választunk egyenletes eloszlás szerint a (0, 1) intervallumban, majd egy Y pontot 0 és X között, szintén egyenletes eloszlás szerint. Mi a valószínűsége, hogy a (0, 1)-ben keletkező mindhárom intervallum hossza kisebb $\frac{1}{2}$-nél?

64. Egy atlétikai versenyen az egyik távolugró első ugrása 750 cm és 810 cm között egyenletes eloszlású. Feltéve, hogy első ugrása x cm volt, tudjuk, hogy második ugrásának várható értéke x, szórása $\frac{40}{\sqrt{12}}$, és egyenletes eloszlású valamely intervallumon. Mi a valószínűsége, hogy a két ugrás közül legalább az egyik 8 m feletti?

65. Egy X számot választunk 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint. 0 és a kiválasztott szám négyzete között ugyancsak egyenletes eloszlás szerint választunk egy másik Y számot. Ez utóbbinak mi a sűrűségfüggvénye? Független-e X és Y?

66. Az (X, Y) pont koordinátáit két lépésben választjuk meg. Először egy kockával dobunk, és a dobás eredményét vesszük X-nek, utána a $(0, X)$ intervallumon egyenletes eloszlás szerint választjuk meg Y értékét.

a) Adja meg X-nek az $Y = 2{,}2$ feltételhez tartozó feltételes eloszlását!

b) Mennyi az

$$A=\left\{(x,y): \frac{1}{3}x < y < \frac{2}{3}x\right\}$$

halmazba esés valószínűsége az együttes eloszlás szerint?

67. A (0, 0), (1, 1), (1, 0) pontok által meghatározott háromszöglap belsejében egy véletlen B pontot jelölünk ki úgy, hogy először az (1, 0), (1, 1) pontok által meghatározott szakaszon egyenletes eloszlás szerint választunk egy A pontot, és ezután a B-t az A és a (0, 0) pont közötti szakaszon vesszük fel egyenletes eloszlás szerint. Határozza meg

a) a B pont eloszlását a háromszöglap belsejében!

b) a B pont abszcisszájának az eloszlását!

c) a B pont ordinátájának az eloszlását!

68. Péter és Pál, akik biztosítónál dolgoznak, abban állapodnak meg egymás között, hogy amennyiben a dec. 31-ig bejelentett évi lakástüzek száma páros, akkor Péter, ha páratlan, akkor Pál készíti el az éves kimutatást. Egy évben átlag 200 tűzeset szokott történni.

a) Feltéve, hogy Péter készíti el az éves kimutatást, adja meg a tűzesetek számának eloszlását!

b) Igazságos volt-e Péter és Pál egyezsége?

69. Tegyük fel, hogy a házaspárok 10%-a gyermektelen, 30%-a 1 gyermekes, 40%-a 2 gyermekes, 20%-a 3 gyermekes. Feltételes eloszlások alkalmazásával adjuk meg egy véletlenszerűen választott gyermekes házaspár fiúgyerekei számának eloszlását (feltesszük, hogy a fiú és lány születésének valószínűsége egyenlő)!

70. Legyenek X és Y független, exponenciális eloszlású, λ paraméterű valószínűségi változók. Csonkítsuk az együttes eloszlást az $X \leq Y$ feltétel szerint. Határozza meg e csonkított eloszlás X-re vonatkozó feltételes eloszlását!

71. Elektronikus üzenetet várunk éjfél és 1 óra között. Érkezése az $f(x)$ folytonos eloszlásfüggvénnyel rendelkező eloszlás szerint várható. Feltéve, hogy a T időpontig még nem érkezett meg az üzenet, mi a valószínűsége annak, hogy T és $T + \tau$ között megérkezik ($\tau > 0$)?

VIII.4. Ellenőrző kérdések

72. Legyen (X, Y) folytonos valószínűségi változó. Igazak-e minden x, y-ra a következők:

a) $h(x, y) = f(x) \cdot k(y \mid x)$?

b) $k(y|x) = \dfrac{h(x,y)}{f(x)}$?

c) $P(Y = y \mid X = x) = \dfrac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}$?

d) $H(x, y) = f(x)\, K(y \mid x)$, ahol H, F, K rendre az *a)*-beli sűrűségfüggvényeknek megfelelő eloszlásfüggvények?

73. Meghatározza-e $h(x, y)$-t

a) $f(x)$ és $l(x \mid y)$?

b) $k(y \mid x)$ és $l(x \mid y)$?

74. Legyen (X, Y) egy Q eloszlású pont a síknak egy T tartományán. Ugyanolyan Q eloszlású ponthoz jutunk-e, ha először az x tengelyen választunk véletlenül egy X_0 koordinátát X eloszlásával megegyezően, majd Q-nak az X_0-ra vett feltételes eloszlása szerint egy Y_0 koordinátát az $x = X_0$ egyenesen?

75. Igaz-e, hogy ha $f(x)$ és $k(y \mid x)$ folytonos eloszlások sűrűségfüggvényei minden rögzített x-re, akkor az $f(x)$ és $k(y \mid x)$ szorzata, mint kétváltozós függvény, sűrűségfüggvény?

76. Lehetséges-e, hogy egy kétdimenziós eloszlás egyik feltételes eloszlásrendszere folytonos, de az eloszlás maga nem folytonos?

77. Legyen T véges területű, tetszőleges tartomány a síkon. Igaz-e, hogy

a) a T-n vett egyenletes eloszlás feltételes eloszlásai a függőleges egyeneseken ugyancsak egyenletesek?

b) ha egy T-n vett eloszlás valamely peremeloszlása és a rá vonatkozó feltételes eloszlások egyenletesek, akkor a T-n vett eloszlás egyenletes?

c) lehetséges, hogy a T-n vett valamely eloszlás feltételes eloszlásai a függőleges egyeneseken egyenletesek, de a vízszintes egyeneseken nem?

d) ha a vízszintes és függőleges feltételes eloszlások is egyenletesek, akkor a T-n vett eloszlás is egyenletes?

78. Egy téglatartományra koncentrálódó, $h(x, y)$ sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlásra

$$h(x, y) = r(x) \cdot s(y)$$

valamely r és s nemnegatív függvényekre. Igaz-e, hogy az eloszlás szorzateloszlás?

IX. Többdimenziós valószínűségi változó (többdimenziós eloszlás) paraméterei

(i) *Várható érték vektor* a koordinátaváltozók (a megfelelő peremeloszlások) várható értékeiből alkotott vektor.
Az $X + jY$ *komplex valószínűségi változó* várható értéke az $M(X) + jM(Y)$ komplex szám.

(ii) *Kovarianciamátrix:* a második momentumokból álló

$$K_{(X,Y)} = \begin{pmatrix} D^2(X) & \operatorname{cov}(X,Y) \\ \operatorname{cov}(Y,X) & D^2(Y) \end{pmatrix}$$

mátrix, ahol cov (X, Y) az (X, Y) vektorváltozó *kovarianciája*, az

$$M[(X - M(X))\cdot(Y - M(Y)]$$

mennyiség. Igaz a következő:

$$\operatorname{cov}(X, Y) = M(X\,Y) - M(X)\,M(Y),$$

ahol $M(X\,Y)$ diszkrét esetben a $\sum_{i,j} x_i y_j r_{ij}$, folytonos esetben az $\iint_{\mathbf{R}^2} xyh(x,y)\,dxdy$ összefüggéssel számolható.
Ha X és Y független, akkor cov $(X, Y) = 0$.
Tetszőleges X és Y valószínűségi változókra igaz, hogy

$$D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y) + 2\operatorname{cov}(X, Y)\,.$$

Az (X, Y) vektorváltozó korrelációs hányadosa az

$$R(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D(X)D(Y)}$$

mérőszám. Ismert, hogy $|R(X, Y)| \leq 1$.
Az Z komplex valószínűségi változó kovarianciája az

$$M((Z - M(Z))\overline{(Z - M(Z))})$$

komplex szám.

(iii) *Feltételes eloszlásokkal kapcsolatos paraméterek:* feltételes várható érték, feltételes medián, feltételes módusz, feltételes szórás. Ezek rendre a megfelelő feltételes eloszlások hasonló paraméterei, és függvények, hogyha a feltételt változtatjuk.
A feltételes és perem várható érték függvények közötti kapcsolatra vonatkozik a teljes várható érték tétel:
Ha (X, Y) diszkrét, akkor

$$M(Y) = \sum_i M(Y \mid X = x_i)\cdot p_i\ ;$$

ha (X, Y) folytonos,

$$M(Y) = \int_{\mathbf{R}^1} M(Y \mid X = x)\cdot f(x)dx\,,$$

feltéve, hogy ezen mennyiségek léteznek.

(iv) *Empirikus statisztika*
Ha $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ az (X, Y) vektorváltozóra vonatkozó minta, akkor a tapasztalati várható érték, tapasztalati kovarianciamátrix, tapasztalati kovariancia, tapasztalati feltételes paraméterek rendre a mintához tartozó tapasztalati eloszlás hasonló, megfelelő paraméterei.
Így pl. a tapasztalati várható érték vektor a koordináták $\bar{x}_1$, illetve $\bar{x}_2$ átlagaiból alkotott $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ vektor, a tapasztalati kovarianciamátrix az

$$\begin{pmatrix} s_1 & \overline{\operatorname{cov}}(X,Y) \\ \overline{\operatorname{cov}}(Y,X) & s_2 \end{pmatrix}$$

mátrix, ahol

$$\overline{\operatorname{cov}}(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{x}_1)(Y_i-\bar{x}_2),$$

s_1, ill. s_2 pedig a koordinátákhoz tartozó tapasztalati szórások.

IX.1. Gyakorlófeladatok

1. A VIII. fejezet **39.** feladatához kapcsolódóan, amennyiben (X, Y) a szóban forgó kétdimenziós eloszlás, határozza meg Y

a) várható értékét,

b) móduszát,

c) (X, Y) várható érték vektorát!

2. Igazolja, hogy

a) $M(X)=\iint_{\mathbf{R}^2} x\,h(x,y)\,dxdy$,

$M(Y)=\iint_{\mathbf{R}^2} y\,h(x,y)\,dxdy$;

b) $M(t(X))=\iint_{\mathbf{R}^2} t(x)\,h(x,y)\,dxdy$,

$M(t(Y))=\iint_{\mathbf{R}^2} t(y)\,h(x,y)\,dxdy$;

feltéve, hogy a szereplő integrálok abszolút konvergensek.

3. Egy síkbeli eloszlás sűrűségfüggvénye

$$h(x,y)=\frac{1}{2y}\quad\left(0<x<1,\ x<y<\frac{1}{x}\right).$$

Határozza meg az y tengelyre vett

a) feltételes medián függvényt,

b) feltételes szórásnégyzet függvényt,

c) peremeloszlás várható értékét, amennyiben létezik!

4. A $(0, 2)$ intervallumban választunk egy X számot az $\frac{x}{2}$ sűrűségfüggvényű eloszlás szerint, majd $X = x_0$ esetén a $(0, x_0)$ intervallumban egy másik Y számot a $\frac{2y}{x_0^2}$ sűrűségfüggvényű eloszlás szerint. Y értékét nem ismerjük. Melyik az a konstans, amellyel Y-ra tippelne, amennyiben a négyzetes hibát kívánja minimalizálni?

5. Az (X, Y) vektorváltozó sűrűségfüggvénye

$$h(x,y)=16x^3y^3,\quad \text{ha}\quad 0\le x,y\le 1.$$

Számítógéppel 100 véletlen számpárt generálunk a fenti eloszlás szerint, és ezek közül kiválasztjuk azon (x_i, y_i) számpárokat, amelyeknél $x_i < y_i$ fennáll. Becsülje meg az így kiválasztott y_i értékek átlagát!

6. X és Y együttes eloszlását a következő táblázatban adjuk meg:

$Y \backslash X$	0	1
1	0,04	0,5
0	0,4	0,06

Számítsuk ki az X és Y korrelációs hányadosát!

7. Legyenek X és Y rendre független, $\frac{1}{2}$ valószínűségű események indikátorváltozói. Igazolja, hogy $X+Y$ és $|X-Y|$ korrelálatlanok, de nem függetlenek!

8. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye:

$$h(x,y)=\begin{cases}\frac{6}{5}(x+y^2), & \text{ha } 0<x<1,\ 0<y<1\\ 0 & \text{különben}.\end{cases}$$

a) Számítsuk ki X és Y korrelációs hányadosát!

b) Mennyi $D^2(X+Y)$?

9. Legyen az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0, \pi]$ intervallumon. Határozzuk meg a $(\sin(X), \cos(X))$ valószínűségi változó pár kovarianciamátrixát!

10. Írja fel a két $N(2, 1)$ eloszlású, egymástól független valószínűségi változóhoz tartozó kovarianciamátrixot!

11. A VIII. fejezetbeli **18.** „repülőgép-szerencsétlenséges" feladathoz kapcsolódóan, határozza meg a megtalált fekete dobozok számának

a) várható értékét és szórását,

b) várható értékét, feltéve, hogy n gép zuhant le!

12. Egy forgalmas helyen kéregető koldus határozottan állítja, hogy du. 2 és 2^{10} között pontosan annyi esélye van annak, hogy 4-en adakoznak, mint annak, hogy 5-en. Azt is állítja, hogy ha valaki ad, akkor 0,1 valószínűséggel ad 1 garast, 0,6 valószínűséggel 2 garast és 0,3 valószínűséggel 5 garast. Mennyi a délután 2 és 2^{10} közötti bevételének várható értéke?

13. Egy érmével addig dobunk, amíg először fejet kapunk. Feltesszük, hogy az első fej a második, a harmadik vagy a negyedik dobásra adódik. (Ha ez nem következne be, akkor a kísérlet érvénytelen.) Ezek után annyi dobókockát dobunk fel, ahányadik dobásra az első fejet kaptuk, és megnézzük, hány hatost kaptunk. Adja meg a dobott hatosok számának

a) várható értékét,

b) a fej dobások számára nézve vett feltételes móduszt!

14. A VIII. fejezetbeli **24.**, „dekódolás" feladathoz kapcsolódóan, határozza meg a dekódolás Y időtartamának

a) várható értékét,

b) az $Y = y$-ra vonatkozó feltételes várható érték függvényt!

15. Legyen az X valószínűségi változó $Y = y$ feltétel melletti feltételes sűrűségfüggvénye, ill. Y sűrűségfüggvénye:

$$l(x \mid y) = \begin{cases} \dfrac{2x}{y^2}, & \text{ha } 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}; \qquad g(y) = \begin{cases} 3y^2, & \text{ha } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{egyébként}. \end{cases}$$

Képzeljük el, hogy az X, Y valószínűségi változó párra nézve nagyon sok független megfigyelést végzünk és X 4000 esetben esik 0,2 és 0,2001 közé.

a) Ha a 4000 esetben az Y-ra vonatkozó megfigyelések eredményeit átlagoljuk, milyen eredményre számíthatunk?

b) Általában, 4000 db X-re vonatkozó mérést átlagolva, kb. milyen értékre számíthatunk?

16. Határozza meg cov (X, Y) abszolút értékét, ha X, illetve Y az ötös lottó heti nyerőszámai közül a párosak, illetve páratlanok számát jelentik!

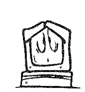
17. Jelentse X egy szövőgépen 1 óra alatt előforduló szálszakadások számát. A gépet kezelő munkásnak egy szál megkötözésére $\frac{1}{4}$ percre van szüksége. Az az időmennyiség, melyet a munkás 1 órán belül nem szálkötözésre fordít, szintén valószínűségi változó, jelölje Y. Határozza meg Y-hoz és az egy órán belül szálkötözésre fordított időhöz tartozó kovarianciamátrixot!

18. A $(0, 1)$ intervallumban választunk egy X véletlen számot egyenletes eloszlás szerint. Ha x-et választottunk, akkor $\sqrt{x}$ és $2\sqrt{x}$ között választunk egy másik, Y véletlen számot, szintén egyenletes eloszlás szerint.

a) Határozza meg (X, Y) kovarianciamátrixát!

b) Mennyi $D^2(X + Y)$?

19. Két, egymástól függetlenül bekötött, átlagosan 2 évig működő izzó élettartamai örökifjúnak tekinthető valószínűségi változók. Mi ezen élettartamok együttes eloszlásának kovarianciamátrixa?



IX.2. Szimuláció és statisztika

20. Egy (X, Y) vektorváltozóra a következő adatokat mérték: (1, 1), (1, 1), (–1, 1), (0, 1), (3, 2), (–4, 1), (0, 0), (0, 3), (10, 1), (2, 3), (3, 2), (1, –1). Határozza meg

a) az $Y = 1$-re vonatkozó feltételes tapasztalati várható értéket, móduszt, mediánt és szórást,

b) X-nek az $X^2 + Y^2 < 2$ feltételre vonatkozó feltételes várható értékét,

c) a tapasztalati kovarianciát és tapasztalati korrelációs hányadost,
d) a tapasztalati kovarianciamátrixot!

21. A Föld két pontján nyolcszor egy-egy hőmérsékletmérést hajtanak végre egyidejűleg, és rendre a következő eredményeket mérik:

$$-10, -15, -20, +2, +4, +30, +20, +5$$

$$-8, -1, 0, -2, +10, 0, +5, -3$$

Határozza meg a két méréssorozatból számítható tapasztalati kovarianciát és tapasztalati korrelációs hányadost!

22. Szimuláljon számítógépen n lottóhúzást! Határozza meg
a) a húzásonkénti legkisebb számok átlagát,
b) a húzásonkénti legkisebb és legnagyobb kihúzott számok tapasztalati korrelációs hányadosát!
Vesse össze a fenti tapasztalati adatokat az elméleti értékekkel!

23. Az 5. feladathoz kapcsolódóan, hajtsa végre a számpárok generálását és határozza meg az $x_i < y_i$ tulajdonságú y_i-k átlagát! Az utóbbit vesse össze az **5.** feladat eredményével!

24. A **14.** feladathoz és a VIII. **24.** feladathoz kapcsolódóan, szimulálja n-szer a rádióadást és dekódolását! Határozza meg a dekódolások idejeinek átlagát és vesse össze az elméleti várható értékkel!

IX.3. Vegyes feladatok

25. Egy (X, Y) vektorváltozó eloszlása a következő:

$Y \backslash X$	-1	1	2
3	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$
2	0	0	$\frac{1}{7}$
0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{2}{7}$

Határozza meg az Y szórását és az Y-ra vonatkozó
a) feltételes szórás,
b) feltételes módusz
függvényt!

26. Legyenek X és Y diszkrét, pozitív egész értékeket felvevő valószínűségi változók a következő együttes eloszlással:

$$P(X=i, Y=j) = \frac{1}{(i+j-1)(i+j)(i+j+1)} \qquad (i=1,2,\ldots;\ j=1,2,\ldots).$$

Mutassa meg, hogy az eloszlásnak nem létezik várható értéke!

27. (X, Y) eloszlásfüggvénye $F(x,y) = (\sin x)(\sin y)$ $\left(0 \le x,\ y \le \frac{\pi}{2}\right)$. Határozza meg a kovarianciamátrixot!

28. Az (X, Y) vektorváltozó sűrűségfüggénye

$$h(x,y)=\frac{4}{9\pi}(x^2+xy+2),\ \text{ha } x^2+y^2\le 1,\quad 0 \text{ egyébként.}$$

Mennyi X feltételes várható értéke, amennyiben $Y=\frac{\sqrt{3}}{2}$?

29. X egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon. Ha $X=x$, akkor Y sűrűségfüggvénye:

$$2xy,\ \text{ha}\ y\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{x}}\right),\quad 0 \text{ egyébként.}$$

Mennyi Y

a) várható értéke?

b) mediánja?

30. Legyenek az $X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots$ valószínűségi változók azonos eloszlásúak. Legyen továbbá

$$Y=X_1+X_2+\ldots+X_\alpha,$$

ahol az α pozitív egész értékeket felvevő valószínűségi változó, mely az X_j valószínűségi változóktól független. Számítsuk ki Y várható értékét!

31. A VIII. fejezetbeli **40.** feladathoz kapcsolódóan, határozza meg a várható érték vektort!

32. Igazolja, hogy ha (X, Y) 0 kovarianciájú vektorváltozó, akkor $(X+a, Y+b)$ is 0 kovarianciájú, ahol a és b konstansok!

33. (X, Y) eloszlása a következő:

$Y \backslash X$	-1	1	2
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
0	0	0	$\frac{1}{4}$
-2	$\frac{1}{6}$	0	0

a) Adja meg (X, Y) kovarianciamátrixát!

b) Mennyi $D^2(X+Y)$?

34. (X, Y) eloszlása

$Y \backslash X$	0	1
1	p_2	p_3
0	p_1	p_2

valamint tudjuk, hogy $R(X, Y)=1$. Mi az összefüggés p_1, p_2 és p_3 között?

35. Tudjuk, hogy az A és B eseményre $P(A)=P(B)=0{,}6$, továbbá az X_A és X_B indikátorváltozók korrelációs együtthatója $\frac{1}{6}$. Határozza meg $P(A \mid B)$-t!

36. Igazolja, hogy ha X és Y olyan valószínűségi változók, hogy rendre csak 2-2 lehetséges értékük van, akkor korrelálatlanságukból következik függetlenségük!

37. Létezik-e a $h(x,y)=\frac{4}{x^3y^3}$ $(1\le x<\infty, 1\le y<\infty)$ sűrűségfüggvényű valószínűségi változónak kovarianciamátrixa?

38. X, Y és Z független Poisson-eloszlású valószínűségi változók, rendre α, β és γ paraméterekkel. Határozza meg az $(X+Z, Y+Z)$ valószínűségi változó kovarianciáját!

39. X és Y $R = -\dfrac{3}{4}$ korrelációs együtthatójú valószínűségi változók. Várható értékeik és szórásaik: $M(X) = 4$, $M(Y) = 6$, $D(X) = D(Y) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Bizonyítsa be, hogy $P(8 < X + Y < 12) > \dfrac{15}{16}$.

40. Legyen X standard normális eloszlású, $c > 0$ rögzített és

$$Y = \begin{cases} X, & \text{ha } |X| < c \\ -X, & \text{ha } |X| \geq c. \end{cases}$$

Fejezze ki cov (X, Y)-t a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye segítségével!

41. Dobókockát feldobunk, majd még annyiszor dobjuk fel, ahányast dobtunk. Mennyi az utóbbi dobássorozatból elért hatosok számának
a) várható értéke?
b) szórása?

42. Dobókockát hatszor feldobunk. Jelentse X a dobott párosok, Y pedig a dobott hatosok számát. Határozza meg a dobott hatosok számának
a) várható értékét,
b) szórását,
feltéve, hogy tudjuk, hogy n db páros számot dobtunk! (Lásd még a VIII. **13.** feladatot!)

43. Egy utóvizsgán A, B és C tanár vizsgáztathat rendre $\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{2}{3}$ valószínűséggel. A tanár $\dfrac{1}{4}$, B tanár $\dfrac{1}{2}$, C tanár $\dfrac{1}{4}$ valószínűséggel buktat. 50 vizsgázó esetén mi a sikeresen vizsgázók számának
a) várható értéke?
b) szórása?

44. A VIII. fejezet **9.** feladatához kapcsolódóan, határozza meg az $X = x$-re vonatkozó
a) feltételes várható érték,
b) feltételes szórásnégyzet
függvényt!

45. Az 1 hosszúságú OA szakaszon választunk egy X pontot egyenletes eloszlás szerint, majd az OX szakaszon egy másik Y pontot ugyancsak egyenletes eloszlás szerint.
a) Adja meg az OX és OY távolságokhoz tartozó kovarianciamátrixot!
b) Mennyi $D^2(OX + OY)$?

46. Tekintsünk egy olyan derékszögű háromszöget, melynek a befogói párhuzamosak a koordinátatengelyekkel, az átfogó egyik végpontja a rögzített (C_1, C_2) pont, a másik végpontja pedig a

$$h(x, y) = \frac{1}{4} e^{-\left(\frac{x+y}{2}\right)} \quad (x > 0,\ y > 0)$$

sűrűségfüggvényű eloszlás szerinti véletlen pont. Melyik az a (C_1, C_2) pont, melyre a befogók
a) összegének,
b) négyzetösszegének
várható értéke minimális?

47. Legyen X és Y az ötös lottó sorsolásánál kihúzott első és második szám. Határozza meg cov (X, Y) -t!

48. Adott a $(0, 1)$ intervallumban egy rögzített c érték. Egyenletes eloszlás szerint választunk $(0, 1)$-ben egy X számot. Milyen c értékre lesz az $|X - c|$ távolság és X korrelálatlan?

X. Regresszió

(i) *Általános regresszió.* Ha egy (X, Y) valószínűségi változó esetén Y értékét kívánjuk közelíteni úgy, hogy X értékét egy előre rögzített $r(x)$ függvénybe helyettesítjük és

a) megkívánjuk, hogy az $M((Y - r(X))^2)$ átlagos négyzetes hiba (röviden négyzetes hiba) minimális legyen az olyan lehetséges $r(x)$ függvényeket tekintve, amelyekre ez a hiba egyáltalán értelmezett, akkor $r(x)$-nek az

$$r(x) = M(Y \mid X = x)$$

feltételes várható érték függvényt kell választani, feltéve, hogy e függvény létezik. Ezen $r(x)$ függvényre az $Y - r(X)$ várható értéke 0 lesz, szórása pedig minimális.

b) megkívánjuk, hogy az $M(|Y - r(X)|)$ átlagos abszolút eltérés hiba minimális legyen az olyan lehetséges $r(x)$ függvényeket tekintve, amelyekre ez a hiba egyáltalán értelmezett, akkor $r(x)$-nek pontosan az

$$r(x) = \mu(Y \mid X = x)$$

feltételes medián függvényt kell választani, feltéve, hogy e függvény létezik.

A fentiekben a koordináták szerepe felcserélhető, tehát, ha például X értékét kívánjuk Y értékével közelíteni egy $r(y)$ valós függvény segítségével, és az átlagos négyzetes hibát kívánjuk minimalizálni, akkor az $r(y) = M(X \mid Y = y)$ feltételes várható érték függvény adja az optimális közelítést.

Ha (X, Y) tetszőleges diszkrét valószínűségi változó és pl. Y értékét kívánjuk közelíteni úgy, hogy X értékét egy előre rögzített $r(x)$ függvénybe behelyettesítjük, megkívánva, hogy a közelítés a lehető legnagyobb valószínűséggel helyes legyen, akkor a feltételes eloszlások móduszait kell $r(x)$ közelítő függvényként választani.

(ii) *Lineáris regresszió.* Ha az **(i)**-beli *a)* típusú feladatnál a lehetséges tippelőfüggvények osztályát az $r(x) = ax + b$ lineáris függvényekre korlátozzuk, akkor az optimális tippelőfüggvény a *regressziós egyenes*, melynek implicit egyenlete:

$$\frac{y - m_2}{\sigma_2} = R(X, Y)\frac{x - m_1}{\sigma_1},$$

ahol m_1, m_2, σ_1, σ_2 rendre X, illetve Y várható értékei, szórásai, $R(X, Y)$ a korrelációs hányados, feltéve, hogy e mennyiségek léteznek. Hasonló a másik regressziós egyenes egyenlete.

(iii) *Tapasztalati regressziós egyenes.* Ha az (X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n) az (X, Y) valószínűségi változóra vett minta és e pontokat valamely $ax + b$ egyenesen fekvő $(X_i, aX_i + b)$ pontokkal kívánjuk úgy helyettesíteni, hogy a helyettesítéssel elkövetett

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(Y_i - (aX_i + b))^2\right)$$

átlagos négyzetes hiba minimális legyen (legkisebb négyzetek elve), akkor $ax + b$ pontosan az az egyenes, amelyet az elméleti regressziós egyenesből úgy kapunk, hogy a benne szereplő paramétereket – a fenti adatokból nyert – empirikus paraméterekkel, tehát az empirikus várható értékekkel, szórásokkal, korrelációs hányadossal helyettesítjük.

(iv) Ha egy (X, Y) vektorváltozóban szereplő egyik koordinátát – pl. a másodikat – tippeljük (közelítjük) a másik érték – pl. az első koordináta – ismeretében, valamely előre rögzített $r(x)$ tippelő- (közelítő) függvényt használva (felkészülve az első koordináta minden lehetséges értékére), akkor attól függően, hogy hogyan minősítjük a tippelés (közelítés) hibáját, $r(x)$-nek a feltételes várható érték, illetve a feltételes módusz függvényt választjuk. Amennyiben lineáris függvény segítségével tippelünk (közelítünk) és a négyzetes hibát kívánjuk minimalizálni, akkor az optimális tippelőfüggvény a regressziós egyenes.

Az R korrelációs együttható értékéből leolvasható, hogy milyen szoros a lineáris összefüggés X és Y között: ha $|R| = 1$, akkor X és Y között 1 valószínűséggel lineáris kapcsolat van; ha $R = 0$ ($\operatorname{cov}(X, Y) = 0$), akkor X és Y között nincs kapcsolat.

(v) *Empirikus statisztika.* Ha egy vektor valószínűségi változóra nézve n mérésünk van és ezeket rögzített egyenesre illeszkedő vektorokkal kívánjuk helyettesíteni (lineárisan közelíteni) úgy, hogy az elkövetett négyzetes hiba minimális legyen, akkor az empirikus regressziós egyenest választjuk. Az empirikus korrelációs hányados az empirikus regressziós egyenes meredekségével interpretálható.

X.1. Gyakorlófeladatok

1. Legyen a diszkrét (X, Y) eloszlása a következő:

$Y \backslash X$	0	1	2
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

Határozza meg a regressziós függvényt, ha a négyzetes hiba átlagát kívánjuk minimalizálni és

a) Y ismeretében kívánjuk X-et közelíteni,

b) X ismeretében kívánjuk Y-t közelíteni úgy, hogy X-ből lineáris függvénnyel tippelünk Y-ra!

2. Egy síkbeli diszkrét eloszlás feltételes eloszlásai az $x = n$ egyeneseken n és p_n paraméterű binomiális eloszlások. Hogyan közelítené az X érték ismeretében Y-t, ha

a) a lehető legnagyobb valószínűséggel helyesen kíván közelíteni,

b) a közelítés átlagos négyzetes hibáját szeretné minimalizálni?

3. Egy (X, Y) valószínűségi változó feltételes sűrűségfüggvénye:

$$l(x\,|\,y) = \frac{1}{2\sqrt{x}\cdot(1-y)}, \quad \text{ha } 0 \le y \le 1 \text{ és } y^2 \le x \le 1;$$

peremeloszlása:

$$g(y) = 2(1-y), \quad 0 \le y \le 1.$$

Hogyan közelítené Y ismeretében X-et, ha

a) az átlagos abszolútérték-eltérést,

b) az átlagos négyzetes eltérést,

c) lineáris függvénnyel tippelve, az átlagos négyzetes eltérést kívánja minimalizálni?

4. Az előző **3.** *b)* kérdéshez kapcsolódóan, határozza meg a tippelésnél elkövetett átlagos hibát, egyszeres integrál alakban!

5. Az egységkörön választunk egyenletes eloszlás szerint egy (X, Y) pontot. Az X koordináta ismeretében hogyan közelítené $|Y|$-t, feltéve, hogy az abszolút értékben elkövetett hiba átlagát kívánja minimalizálni?

6. Egy kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$h(x, y) = 60xy^2 \quad (0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x).$$

Tegyük fel, hogy csak a második koordinátát tudjuk megfigyelni és az első koordinátát a második koordinátából az $x = \frac{2}{3}(1-y)$ képlet alapján becsüljük.

a) Elképzelhető-e ennél jobb módszer, ha a négyzetes eltérés várható értékét kívánjuk minimalizálni?

b) Adja meg integrál alakban a tippelés átlagos négyzetes hibáját!

7. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$h(x,y)=\frac{1}{8}(x+y+2) \qquad (-1\le x,y\le 1)\,.$$

Határozza meg $X+Y$ eloszlásfüggvényét egyszeres integrál alakban!

8. (X, Y) kovarianciamátrixa $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Van-e lineáris kapcsolat X és Y között?

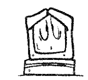
9. Egy érmét addig dobálunk, amíg fejet nem dobunk. Ezután egy dobókockát annyiszor dobunk fel, ahányadszorra elértük a fej dobást, legyen ez a szám X. Jelölje Y azt, hogy hány hatos dobást értünk el. Hogyan tippelne X-ből Y-ra
a) tetszőleges függvénnyel,
b) lineáris függvénnyel,
ha a tippelés átlagos négyzetes hibáját kívánja minimalizálni?

10. Statisztikai adatok szerint annak valószínűsége, hogy ikerszületéskor mindkét gyermek fiú, 0,32, s azé, hogy mindkettő lány, 0,28. Annak valószínűsége, hogy az első iker fiú és a második lány, egyenlő annak valószínűségével, hogy az első iker lány és a második fiú. X legyen 1, ha az első iker fiú, és 0, ha lány. Az Y valószínűségi változó vonatkozzék a második ikerre, hasonlóképpen. Számítsuk ki az X és Y korrelációs együtthatóját! Hogyan tippelne Y-ból X-re lineáris függvénnyel, ha a tippelés átlagos négyzetes hibáját kívánja minimalizálni?

11. Két véletlen számot generálunk számítógéppel. Először -1 és 1 között egyenletes eloszlás szerint választunk egy véletlen számot, majd, ha ez a szám X volt, $-|X|$ és $|X|$ között ugyancsak egyenletes eloszlás szerint választjuk a második számot. Ezen második számra tippelünk előre egy c konstans értékkel úgy, hogy veszteségünk (a második szám és a tipp külünbségének négyzete) átlagosan minimális legyen. Mennyi lesz a legjobb tippelés mellett átlagos veszteségünk?

12. A VIII. fejezetbeli **23.** feladathoz kapcsolódóan, hogyan tippeljünk az ugrás magasságából a kioldás magasságára? Törekedjünk az abszolút értelemben elkövetett hiba átlagának minimalizálására!

13. Két, egymástól függetlenül bekötött, átlagosan 2 évig működő izzó élettartama örökifjúnak tekinthető valószínűségi változó. Hogyan tippelne az egyik élettartamából a másik élettartamára, ha az abszolút értékben elkövetett hiba átlagát kívánjuk minimalizálni? (Lásd még a IX. fejezet **19.** feladatát!)



X.2. Szimuláció és statisztika

14. Tekintsük a $(0,-1), (1,2), (3,4), (-1,1), (1,-2), (3,3), (7,6), (8,0)$ adatrendszert.
a) Adja meg az adatrendszerhez tartozó empirikus korrelációs hányadost, $\underline{R}$-t!
b) Írja fel az adatrendszerhez tartozó regressziós egyenes egyenletét!

15. Egy város egyik piacán 10 egymás után következő napon megfigyelést végeztek a nyári alma felhozatalára és egységárának alakulására vonatkozóan. Az adatokat a következő táblázat tartalmazza:

Sorszám	*Felhozatal* q	*Egységár* Ft/kg
1.	0,4	85
2.	0,7	90
3.	0,9	86
4.	1,2	80
5.	1,2	78
6.	1,1	75
7.	1,4	69
8.	1,5	65
9.	1,5	66
10.	1,3	65

a) Számítsuk ki a felhozatalra és az egységárra vonatkozó empirikus korrelációs együtthatót, $\overline{R}$-t!
b) Határozzuk meg a fenti adatokhoz illeszthető regressziós egyenes egyenletét!

16. Válassza meg az A amplitúdót úgy, hogy az $y = A \sin x$ függvény a „legkisebb négyzetek elve" szerint a legjobban közelítse az $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ adatrendszert, tehát $\sum_{i=1}^{n} (Y_i - A \sin X_i)^2$ a lehető legkisebb legyen!

17. Egy pont első koordinátáját, X-et standard normális eloszlás szerint választjuk, a második koordinátát pedig X^2 paraméterű exponenciális eloszlás szerint.
a) Szimulálja n-szer a kísérletet és ábrázolja a kapott pontokat!
b) Ábrázolja a generált n darab x koordinátára a kétféle elméleti regressziós függvényt!

18. A VIII. fejezetbeli **30.**, „ejtőernyős" feladathoz kapcsolódóan, a kétféle regressziós függvény felhasználásával, a kapott ugrásmagasság-adatokból tippeljen az ernyő kioldása magasságára! A kapott magasságokat ábrázolja és hasonlítsa össze az eredeti ugrásmagasság-adatokkal!

19. Az **33.** „izzólámpás" feladathoz kapcsolódóan, szimulálja az n véletlen vásárlást és az izzók elhasználódását! Alkalmazza n-szer a döntési eljárást és regisztrálja, hogy hányszor döntött helyesen!

X.3. Vegyes feladatok

20. Az **1.** feladathoz kapcsolódóan, X ismeretében hogyan tippelne Y-ra,
a) ha a legnagyobb valószínűséggel helyesen szeretne tippelni,
b) ha egy valós függvénnyel az átlagos négyzetes hibát szeretné minimalizálni?
c) Hogyan tippelne Y-ból X-re, ha lineáris függvénnyel szeretné az átlagos négyzetes hibát minimalizálni?

21. Legyen (X, Y) egyenletes eloszlású a $P_1\,(0, 0)$, $P_2\,(1, 0)$, $P_3\,(0, 2)$ pontok által meghatározott háromszögön. Számítsuk ki Y-nak X-re vonatkozó regressziós függvényét úgy, hogy az átlagos négyzetes hibát minimalizáljuk!

22. Egy kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $\frac{1}{6}xy$ $(0 < x < 2,\ x < y < 2x)$. Milyen $r(y)$ függvénnyel érdemes a második koordinátából az elsőre tippelni, ha a célunk az, hogy a tippelésnél elkövetett hiba négyzetének átlagos értéke sok kísérlet esetén lehetőleg minél kisebb legyen,
a) ha feltesszük, hogy $r(y)$ lineáris,
b) ha $r(y)$ tetszőleges valós lehet?

23. Ugyanaz a probléma, mint az előző feladatban, de feltesszük, hogy $r(y)$ csak $c\sqrt{y}$ alakú függvény lehet!

24. Tegyük fel, hogy a $h(x, y)$ sűrűségfüggvényű (X, Y) valószínűségi változó $k(y \mid x)$ feltételes sűrűségfüggvényének minden x-re y-ban egy db maximumhelye van és folytonos. Hogyan válasszuk meg az $r(x)$ görbét, ha a

$$P\left(|Y - r(X)| > \frac{1}{2}\right)$$

hibavalószínűséget kívánjuk maximalizálni?

25. A VIII. fejezetbeli **40.** feladathoz kapcsolódóan, hogyan tippelne egy adott y értékből n értékére, ha a lehető legnagyobb valószínűséggel helyesen szeretne tippelni?

26. X és Y két véges szórású valószínűségi változó. Legyen $\alpha = X + Y$, $\beta = X - Y$. Bizonyítsa be, hogy ha
a) tudjuk, hogy β-nak α-ra vonatkozó regressziós egyenese konstans, akkor X és Y szórása egyenlő,
b) tudjuk, hogy X és Y azonos eloszlású, akkor β-nak α-ra vonatkozó regressziós egyenese konstans nulla!

27. Valaki egy kalkulátoron az RND gomb segítségével két véletlen számot generál: X-et és Y-t. Utána kiszámolja az XY szorzatot is és az Y/X hányadost is. Közli velünk a szorzatot, és nekünk ennek alapján a hányados értékére kell tippelnünk. Milyen $r(x)$ függvényt használjunk a tippelésre, hogy a négyzetes hiba várható értéke minimális legyen? Használhatunk-e ugyanezen célra lineáris függvényt?

28. A VIII. fejezet **18.** „repülőgép-szerencsétlenséges" feladathoz kapcsolódóan hogyan tippelne a szerencsétlenségek számának ismeretében a megtalált fekete dobozok számára,

a) ha maximális valószínűséggel helyesen szeretne tippelni,

b) ha tippelése átlagos négyzetes hibáját kívánja minimalizálni?

29. Többpártrendszer esetén az egyes pártokra leadott szavazatok aránya valószínűségi változó. Tegyük fel, hogy a Zöldek az összes szavazatok X hányadát, a Demokraták pedig Y hányadát nyerik el, együttes eloszlásuk

$$h(x,y)=\begin{cases}24xy, & 0\le x,\ 0\le y,\ x+y\le 1\\ 0 & \text{egyébként}.\end{cases}$$

Ha a Demokraták az összes szavazatok 40%-át kapták, mennyire számíthatnak átlagosan a Zöldek? A tippelésnél az abszolút értékben elkövetett hiba átlagát minimalizálja!

30. Tegyük fel, hogy (X, Y) eloszlása az $x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0$ negyedkörön olyan, hogy a sűrűség mindenhol arányos az origótól vett távolság négyzetével. Határozza meg az $r(x)$ függvényt úgy, hogy $(Y-r(X))^2$ várható értéke minimális legyen, és írja fel integrál alakban ezen várható értéket! Hogyan válasszuk $r(x)$-et, ha még azt is kikötjük, hogy lineáris függvény legyen?

31. Köztudomású, hogy a hajók méretei és a kapitányuk életkora között szoros összefüggés van. Jelölje X a kémény magasságát, Y a hajó hosszát és U a kapitány életkorát (méterben, illetve években; csak egész értékeket vehetnek fel). Együttes eloszlásuk:

$$P(Y=j, X=m\,|\,U=n)=\begin{cases}\dfrac{1}{n(4n+1)}, & \text{ha } 3n\le j\le 7n \text{ és } 1\le m\le n\\ 0 & \text{egyébként}.\end{cases}$$

A kapitány korának Verne-féle közelítése:

$$P(U=n)=\begin{cases}\dfrac{1}{100}, & \text{ha } n=15\\ \dfrac{99}{5000}, & \text{ha } 31\le n\le 80\\ 0 & \text{egyébként}.\end{cases}$$

Az Overkil cirkáló hossza 93 m, kéménye 4 m magas. Hány éves a kapitány?

32. Magyarországon a 18 év feletti férfiak testmagasságának átlagos értéke 178 cm, szórása 10 cm. Nőknél ezek az adatok: 166 cm, illetve 8 cm. Labdarúgó-mérkőzéseken a szurkolók 90%-a férfi, 10%-a nő. Mindkét nem testmagasságát normális eloszlásúnak véve:

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy 170 cm-nél alacsonyabb szurkoló nő!

b) Adja meg x függvényében annak a valószínűségét, hogy egy x cm magas szurkoló férfi!

c) Hogyan tippeljünk a szurkolók testmagasságából a nemükre, ha a célunk az, hogy a lehető legnagyobb valószínűséggel helyesen tippeljünk?

33. Zseblámpához kétféle izzót lehet kapni: magyart vagy németet. Az esetek $\frac{4}{5}$ részében magyart, $\frac{1}{5}$ részében pedig németet szoktam venni. Az izzók élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető. A magyar izzók átlagosan kb. $\frac{1}{2}$ évig, a német izzók átlagosan csak kb. $\frac{1}{10}$ évig jók. Hogyan következtetne az izzó élettartamából a „nemzetiségére", ha a lehető legnagyobb valószínűséggel helyesen szeretne tippelni?

X.4. Ellenőrző kérdések*

34. Lehet-e kovarianciamátrix?

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

35. Következik-e a korrelálatlanságból a függetlenség, és fordítva?

36. (X, Y) kovarianciamátrixa: $\begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}$. Van-e olyan a érték, amelyre X és Y lineárisan független, ill. van-e olyan, hogy lineárisan függő?

37. Az optimális tippelőfüggvényre vonatkozó minimalizációs tételek igazak-e diszkrét eloszlásokra?

38. Igaz-e, hogy $M(Y - r(X)) = 0$, ha $r(x)$
a) a feltételes várható érték függvény,
b) a feltételes medián függvény,
c) a regressziós egyenes?

39. Igaz-e, hogy
a) ha X függvénye Y-nak, akkor $R(X, Y) = 1$,
b) ha X lineáris függvénye Y-nak, akkor $R(X, Y) = 1$,
c) ha $R(X, Y) = 1$, akkor majdnem biztos, hogy X függvénye Y-nak?

40. Meghatározza-e X-nek Y-ra vonatkozó regressziós egyenese Y-nak X-re vonatkozó regressziós egyenesét?

41. Mire következtethetünk a korrelációs hányados előjeléből?

42. Milyen összefüggés ismert a regressziós egyenes közelítésének hibája és a korrelációs hányados között?

* Az ellenőrző kérdések a IX. és X. fejezetekre vonatkoznak.

43. Következik-e az alábbiakból egyenként, hogy X mediánja nagyobb, mint Y mediánja:
a) $P(X \geq Y) \geq P(X \leq Y)$,
b) $P(X \geq Y) = 1$?

44. Igaz-e, hogy ha X és Y független, akkor Y-nak X-re vonatkozó regressziós görbéi megegyeznek X-nek Y-ra vonatkozó regressziós görbéivel?

XI. Valószínűségi változók skalárfüggvényének eloszlása és paraméterei ($\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1$ eloszlástranszformáció)

(i) Tegyük fel, hogy az (X, Y) vektorváltozó eloszlása P és $t : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1$ adott valós függvény. Ekkor a $t(X, Y)$ valószínűségi változó eloszlása (P-nek a t szerint transzformált eloszlása $\mathbf{R}^1$-en) az a Q eloszlás, amelyre

$$Q(A) = P\{(x, y) : t(x, y) \in A\}), \qquad (*)$$

ahol $A \subseteq \mathbf{R}^1$ és t olyan, hogy a jobb oldali valószínűség értelmezett, és feltesszük, hogy az intervallumokra Q biztosan értelmezett.
Ha az (X, Y) változó diszkrét, akkor (*)-ot érdemes egyelemű A halmazokra tekinteni, legalábbis $t\,(X, Y)$ összes lehetséges pozitív valószínűségű értékére.

Az A halmazoknak a $(-\infty, u)$ típusú intervallumokat választva, (*)-ból $t(X, Y)$ eloszlásfüggvényét kapjuk:

$$G(u) = P\{(x, y) : t(x, y) < u\}\,.$$

$t(X, Y)$ sűrűségfüggvénye ebből differenciálással vagy $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ transzformációval, majd vetítéssel számolható.
Ha $t(x, y) = x + y$, valamint X és Y független, akkor Q az X és Y eloszlások *konvolúciója*.

(ii) Ha $t(X, Y)$-nak van várható értéke, akkor
ha (X, Y) diszkrét, (x_i, y_j) értékekkel, akkor

$$M(t(X,Y)) = \sum_{i,j} t(x_i, y_j)\, r_{ij}\;;$$

ha (X, Y) folytonos, $h(x, y)$ sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$M(t(X,Y)) = \iint_{\mathbf{R}^2} t(x,y)\, h(x,y)\, dx dy\,.$$

XI.1. Gyakorlófeladatok

1. (X, Y) eloszlása a következő:

$Y \backslash X$	0	1
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Számítsuk ki az $X\,Y$ valószínűségi változó
a) eloszlását,
b) várható értékét,
c) szórását!

2. Határozza meg a $B\left(5, \frac{1}{4}\right)$ és $B\left(8, \frac{1}{4}\right)$ binomiális eloszlások konvolúcióját!

3. Legyen (X, Y) egyenletes eloszlású a $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$ téglán. Számítsuk ki az $X - Y$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

4. Legyenek X és Y független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Határozza meg $[X] + [Y]$ eloszlását!

5. X, illetve Y m_1, ill. m_2 várható értékű, σ_1, ill. σ_2 szórású, c kovarianciájú valószínűségi változók. Hogyan kell tippelni Y ismeretében X-re, ha
a) $x = y + b$ alakú,
b) $x = a\,y$ alakú
függvénnyel kívánunk tippelni, és a hiba négyzetének várható értékét minimalizáljuk!

6. Az $f(x) = 2x$ $(0 < x < 1)$ sűrűségfüggvényű eloszlást konvolválja a $g(x) = 3x^2$ $(0 < x < 1)$ sűrűségfüggvényű eloszlással! Hogyan határozná meg $f(x)$-nek önmagával vett konvolúcióját?

7. (0, 1)-ben választunk két pontot egymás után, egymástól függetlenül rendre a $\frac{2}{3}(2x+y)$ $(0 \le x, y \le 1)$ sűrűségfüggvényű eloszlás peremeloszlásai szerint. Mi a valószínűsége, hogy az elsőnek választott szám nagyobb, mint a második?

8. Tekintsen egy valószínűségi változót, mely egyenletes eloszlású a sík egységnyi sugarú körlapján. Határozza meg a valószínűségi változó négyzetének várható értékéből vont négyzetgyököt, illetve a valószínűségi változó abszolút értékének várható értékét! Ellenőrizze, hogy a két érték nem egyenlő!

9. Az origó középpontú, egység sugarú körlapon vett egyenletes eloszlást a $t(x, y) = e^{x^2+y^2}$ transzformációnak vetjük alá. Mennyi a transzformált eloszlás
a) várható értéke,
b) mediánja?

10. Egy kétdimenziós valószínűségi változó első koordinátájának a sűrűségfüggvénye $f(x) = 2x$ $(0 < x < 1)$. Ha az első koordináta x, akkor ilyen feltétel mellett a második koordináta $1 + x$ paraméterű exponenciális eloszlást követ. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a két koordináta összege kisebb 1-nél!

11. X és Y független valószínűségi változók, rendre $f(x)$ és $g(y)$ sűrűségfüggvényekkel. Igazolja, hogy az XY valószínűségi változó $r(z)$ sűrűségfüggvényére

$$r(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cdot g\left(\frac{z}{u}\right) \cdot \frac{1}{|u|}\, du\,.$$

12. X és Y független valószínűségi változók. X sűrűségfüggvénye $f(x) = 2x$, ha $0 < x < 1$, egyébként 0. Y pedig azt jelöli, hogy két pénzérmét feldobva, hány fejet kaptunk. Határozza meg X^Y eloszlását!

13. Adjon meg olyan körszimmetrikus eloszlást az origó középpontú egységnyi sugarú körlapon, melynek transzformáltja a $t(x, y) = x^2 + y^2$ leképzés szerint a (0, 1) intervallumon egyenletes eloszlás!

14. Annak valószínűsége, hogy a Balatonon nem történik egy évben súlyos vitorlásbaleset, 0,001, azé pedig, hogy a Genfi tavon nem történik egy évben súlyos baleset, 0,005. Adja meg a két tavon együttesen bekövetkező évi vitorlásbalesetek számának eloszlását!

15. Két kockával dobunk. Határozza meg a dobások abszolút eltérésének
a) eloszlását,
b) várható értékét!

16. Valaki villamossal és autóbusszal jut el a munkahelyére. A várakozási idő villamosra 0 és 5 perc között, a várakozási idő autóbuszra 0 és 15 perc között egyenletes eloszlású. Határozza meg az összes várakozási idő eloszlását!

17. A rendőrség arról értesül, hogy a jövő héten két összehangolt terroristaakcióra kerül sor, mindkettő időpontjának eloszlása a héten egyenletesnek vehető. Jelölje az egy-egy csoport által végrehajtott akció időpontját rendre X és Y. Ki tudjuk-e számítani a két terroristaakció között eltelt $Y - X$ időtartam
a) eloszlását,
b) várható értékét,
c) szórását?

18. *Az előző feladat folytatása:* Módosul-e válasza, ha $Y - X$ helyett $|Y - X|$-t tekintjük, vagy az akciók időpontjai között függetlenséget tételezünk fel?

19. Ágyúval egy célpontra tüzelnek, melyről feltesszük, hogy egy derékszögű koordináta-rendszer középpontja. A golyó az (X, Y) koordinátájú pontba csapódik. X és Y függetlenek és normális eloszlásúak $m = 0$, $\sigma = 1$ paraméterértékekkel. Számítsuk ki, hogy

a) milyen eloszlású a lövedék becsapódási helyének a célponttól való távolságnégyzete,
b) mi a távolságnégyzet várható értéke?

20. A $(0, 1)$-ben választunk egy X számot a $2x$ sűrűségfüggvényű eloszlás szerint, majd ezután ha $X = x$, akkor a $(0, x)$ intervallumban választunk egy Y számot a $\frac{2y}{x^2}$ sűrűségfüggvényű eloszlás szerint. Határozza meg $M\left(\frac{X}{Y}\right)$-t!

21. Egy 1 oldalhosszúságú négyzet két átellenes oldalán választunk egyenletes eloszlás szerint egy-egy pontot. Határozza meg a két pont távolságának
a) eloszlását,
b) mediánját!

22. Ismert, hogy a derékszögű háromszög megszerkeszthető a befogók átfogóra vett vetületeiből. Tegyük fel, hogy ezen utóbbi vetületek hosszait véletlenül választjuk egyenletes eloszlás szerint $(0, 1)$-ben, ill. $(0, 2)$-ben egymástól függetlenül. Határozza meg az ezen vetületekből szerkesztett derékszögű háromszög átfogóra merőleges magasságának
a) eloszlását,
b) várható értékét!

23. Két számot választunk a $(2, 4)$ intervallumban, egymástól függetlenül. Számítsa ki a választott kisebbik szám
a) eloszlását,
b) várható értékét!

24. Egység sugarú körlapon véletlenszerűen választunk egy pontot, és az origótól való távolságára tippelünk. Ha a valódi távolság α és a tippünk S, akkor $100 \cdot |\alpha - S|$ Ft-ot kell fizetnünk. Hogyan tippeljünk, ha minimális átlagos büntetésre törekszünk? Mennyi az átlagos veszteségünk az optimális stratégia mellett?

25. 1 deciliternyi koktélt kívánunk keverni úgy, hogy a koktél $\frac{2}{3}$ dl ginből és $\frac{1}{3}$ dl Martiniből álljon. E két alkotót egymástól függetlenül adagoljuk. Feltesszük, hogy mindkettőnél legfeljebb 10%-os hibát követhetünk el, egyenletes eloszlás szerint, tehát pl. a ginnél legfeljebb $\pm\frac{2}{30}$, a Martininál $\pm\frac{1}{30}$ hibát követhetünk el. Mi a gin arányának átlaga a koktélban?

XI.2. Szimuláció és statisztika

26. Transzformálja az $(1, 0), (0, 2), (2, 1), (0, 1), (0, 1), (1, 0), (2, 0), (1, 2), (0, 1)$ adatokat a $t(x, y) = x + y$ függvénnyel! Határozza meg és szemléltesse a nyert tapasztalati eloszlást és tapasztalati várható értéket!

27. A **9.** feladathoz kapcsolódóan, generáljon n pontot egyenletes eloszlás szerint az 1 sugarú körön és transzformálja e pontokat az $e^{x^2+y^2}$ függvénnyel! Szemléltesse az így nyert tapasztalati eloszlást és a hozzá tartozó mintaátlagot! Hasonlítsa össze az elméleti eloszlással és átlaggal!

28. Az (X, Y) vektorváltozó sűrűségfüggvénye

$$h(x, y) = \begin{cases} 6x^2 y, & \text{ha } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{egyébként}. \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy 1000 független kísérletet végzünk az (X, Y) vektorváltozóra és a kísérleti eredmények $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{1000}, y_{1000})$.

a) Körülbelül mennyi lesz az $\frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000}\frac{y_i^2}{x_i^2}$ átlag?

b) Melyik eloszlással közelíthetjük az adatokból nyert $\frac{y_i^2}{x_i^2}$ értékekhez tartozó tapasztalati eloszlást?

29. Adott N, λ, n esetén generáljon n darab független, közel N-edrendű, λ paraméterű, gamma eloszlású véletlen számot! Ilyet N darab független exponenciális véletlen szám összeadásával kaphat. A kapott empirikus eloszlást hasonlítsa össze az elméleti gamma eloszlással. Nagy N-re vesse össze a kapott tapasztalati eloszlást a megfelelő közelítő normális eloszlással!

30. A **16.** feladathoz kapcsolódóan szimulálja az összes várakozási időt, valamint annak mediánját és átlagát!

31. A **64.** feladathoz kapcsolódóan szimulálja n-szer a verseny eredményeit! Hasonlítsa össze a győztes eredményeire kapott tapasztalati eloszlásfüggvényt az elméletivel!

32. Két telefonhívást várunk este. A hívási időpontok egyenletes eloszlásúak 8 és 10 óra között és függetlenek. Szimulálja n-szer a két beérkező hívás időpontját, számítsa ki a két hívás között eltelt időtartamok átlagát és hasonlítsa össze a hívások között eltelt időtartam elméleti várható értékével!

XI.3. Vegyes feladatok

33. Határozzuk meg az alábbi két diszkrét eloszlás konvolúcióját!

x	1	2
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

x	1	2	3
p	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

34. Legyen (X, Y) sűrűségfüggvénye:

$$h(x,y)=\begin{cases}2, & \text{ha} \quad 0<x<1, \quad 0<y<x\\ 0 & \text{különben}.\end{cases}$$

Számítsa ki $X+Y$ sűrűségfüggvényét!

35. Határozza meg, hogy az $\frac{1}{3}$ paraméterű indikátor eloszlás (elsőrendű binomiális eloszlás) és az $\{1, 2, \ldots\}$ halmazon vett $\frac{2}{3}$ paraméterű geometriai eloszlás konvolúciója szerint mennyi a valószínűsége az 5-nek?

36. (X, Y) eloszlása az alábbi diszkrét eloszlás:

$Y \backslash X$	-1	0	1
2	0	0	$\frac{3}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$
0	0	0	0
-1	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{2}{9}$

a) Mennyi $P(X^2+Y^2=2 \mid XY \geq 0)$?
b) Adja meg X^2+Y^2 eloszlását!
c) Határozza meg a koordináták szorzatának várható értékét!

37. A X. **21.** feladathoz kapcsolódóan adja meg integrál alakban az ottani optimális tippelés átlagos négyzetes hibáját!

38. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$h(x,y)=\begin{cases}0{,}25, & \text{ha} \quad 0<x,\ y<2\\ 0 & \text{egyébként}.\end{cases}$$

Számítsa ki az $\frac{X}{Y}$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

39. Legyen X, Y és $\frac{X}{Y}$ sűrűségfüggvénye rendre $f(x)$, $g(y)$ és $r(u)$. Tegyük fel, hogy X és Y függetlenek. Bizonyítandó, hogy

$$r(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(uv)\cdot g(v)\cdot |v|\,dv.$$

40. Határozza meg a független, standard normális eloszlású valószínűségi változók hányadosának eloszlását!

41. Vetítse a $h(x, y) = 6e^{-2x-3y}$ $(x, y > 0)$ sűrűségfüggvényű eloszlást az $y = x$ egyenesre!

42. Határozza meg a kétdimenziós standard normális eloszlású valószínűségi változó abszolút értékének várható értékét!

43. Tegyük fel, hogy az $x^2 + Yx + Z = 0$ egyenlet gyökei függetlenek és egyenletes eloszlásúak $(-1, 1)$-ben. Határozza meg az Y és Z együtthatók eloszlását!

44. Ha a $h(x, y) = 4x + 3y$ $(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x)$ sűrűségfüggvényű eloszlást a $t(x, y) = xy^2$ transzformációnak veti alá, akkor a kapott eloszlásnak mennyi a várható értéke?

45. Mi a feltétele annak, hogy egy síkbeli eloszlást a $t(x, y) = (x + y)^2$ leképzéssel transzformálva olyan eloszlást kapjunk, melynek a várható értéke 0-val egyenlő?

46. (X, Y) egyenletes eloszlású az egységkörön. Hogyan generálna (X, Y) segítségével $(0, 1)$-ben egyenletes eloszlású valószínűségi változót?

47. Az α valószínűségi változó értékeit számítógép segítségével a következőképpen generáljuk. Először veszünk két független, $(0, 1)$-en egyenletes eloszlású véletlen számot, X-et és Y-t. Ha $X < \frac{1}{2}$, akkor $\alpha = X + Y^2$; ha $X > \frac{1}{2}$, akkor $\alpha = X + Y$. Mi a valószínűsége, hogy $\alpha < 1$?

48. A $(0, 1)$-ben egyenletes eloszlás szerint és függetlenül választjuk az $X_1, X_2, \dots, X_{100}$, majd $Y_1, Y_2, \dots, Y_{100}$ értékeket. Ezután kiszámítjuk az $\alpha_i = \ln\frac{1}{1-X_i}$ és a $\beta_i = \ln\frac{1}{1-Y_i}$ értékeket $(i = 1, 2, \dots, 100)$ és képezzük az $\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \dots, \alpha_{100} - \beta_{100}$ számokat. Ezen értékeken egyenletes eloszlást feltételezünk. Határozza meg azt a folytonos eloszlásfüggvényt, amelyet az $(\alpha_i - \beta_i)$-ken vett egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye jól közelít valamilyen értelemben!

49. Két, 0 és 1 közötti, egyenletes eloszlású, egymástól független véletlen számot generálunk. Ezután összeadjuk őket. Határozza meg az összegként kapott szám törtrészének (egész feletti részének) az eloszlását!

50. Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n$ független, azonos eloszlású pozitív valószínűségi változók és tegyük fel, hogy $M(X_i)$ és $M\left(\frac{1}{X_i}\right)$ létezik $(i = 1, 2, \dots, n)$. Mutassa meg, hogy $M\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_m}{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}\right) = \frac{m}{n}$, ahol $m \le n$.

51. Adjon meg az $x^2 + y^2 = 1$ $(x \ge 0,\ y \ge 0)$ negyedkörvonalon olyan eloszlást, amelynek az x tengelyre eső vetülete egyenletes eloszlás a $(0, 1)$ intervallumon!

52. Egy üzemben valamely gép működését vizsgáljuk. Ismeretes, hogy annak valószínűsége, hogy a gép valamelyik napon működik, p-vel egyenlő, s a gép működése független attól, hogy más napokon működött-e vagy sem. Jelentse X azoknak a napoknak a számát, melyeken keresztül a gép hibátlan volt. A gép meghibásodásakor rögtön egy másik gépet állítanak a helyére. Erre vonatkozólag ugyanazon feltételek teljesülnek, mint az előzőre. Jelentse Y a hibátlan működésben eltelt napok számát a második gépnél. Határozza meg $X + Y$ eloszlását és várható értékét!

53. 3 kockával dobunk. Az X_i valószínűségi változó értéke legyen 1, ha az i-edik kockával i-t dobunk, X_i legyen 0 egyébként. Legyen $\eta = (X_1, X_2, X_3)$. Adja meg

a) η eloszlását,
b) η^2 várható értékét,
c) η^2 szórását!

54. Határozza meg a másodrendű 0,25 paraméterű és a harmadrendű 0,75 paraméterű binomiális eloszlások konvolúciójaként adódó eloszlást! Keressen a hétköznapi életben valószínűségi változót, melynek az eloszlása az így kapott eloszlás!

55. A giliszta hossza egy olyan valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $2x$, ha $x \in (0, 1)$, 0 egyébként. A giliszta hosszának mérési eredményeit kell átlagolnunk, de tudjuk, hogy a giliszta a mérés hatására megnyúlik. Ezt az effektust úgy modellezzük, hogy a valódi hosszhoz egy attól független, $(0, 1)$-ben egyenletes eloszlású véletlen hibát adunk.

a) Mekkora az átlagos gilisztahossz a mérésekből számolva?
b) Adja meg a mért hossz sűrűségfüggvényét!

56. Két azonos típusú, egymástól függetlenül bekötött, 100 nap átlagos élettartamú, örökifjúnak tekinthető villanykörtét csavartunk be ugyanabban az időben. Számolja ki a két égő kiégése között eltelt idő várható értékét!

57. Egy pincét két egyforma, párhuzamosan kapcsolt égő világít meg. Mindkettő örökifjúnak tekinthető, átlagos élettartamuk 2 év, és egyszerre csavartuk be őket. Az égők meghibásodását egymástól függetlennek vesszük, és csak akkor cseréljük ki a két égőt, ha már mindkettő kiégett. Átlagosan hány évenként cserélünk égőket?

58. Pista és Józsi a következő játékot játssza. A számítógépből vesznek két független, a (0, 2) intervallumon egyenletes eloszlású számot, X-et és Y-t, majd Pista fizet Józsinak $\max(X^2+X,\ Y)-1{,}5$ Ft-ot (ha a fizetendő összeg negatív, akkor valójában Józsi fizet Pistának). Hosszú távon kinek előnyös ez a játék?

59. 3 sugarú, kör alakú céltáblára lövünk. p valószínűséggel el sem találjuk a céltáblát, ekkor 4 büntetőpontot kapunk. Ha eltaláljuk, akkor annyi büntetőpontot kapunk, amennyi a találat helyének és a céltábla középpontjának a távolsága. Adja meg a büntetőpontok mennyiségének eloszlását egy célzás esetére!

60. A P pont egyenletes eloszlású az 1 sugarú negyedkörlapon. Határozza meg a P pont körívtől mért d távolságának sűrűség- és eloszlásfüggvényét, valamint a mediánját!

61. Elfogadva azt, hogy egy kalkulátoron az RND gomb által generált számok egymástól függetlenek és külön-külön egyenletes eloszlásúak 0 és 1 között, milyen eloszlással modellezzük azt a valószínűségi változót, melyet úgy kapunk, hogy két ilyen számot generálunk és
a) a kisebbiket elosztjuk a nagyobbikkal,
b) a nagyobbikat elosztjuk a kisebbikkel?
Van-e várható értéke ezen valószínűségi változóknak?

62. Egy téglalap oldalai független, egyenletes eloszlású valószínűségi változók, várható értékük 5, szórásuk 1. Határozza meg a téglalap kerületének és területének
a) várható értékét,
b) szórását!

63. Két számot választunk (0, 1)-ben egyenletes eloszlás szerint, egymástól függetlenül. Mutassa meg, hogy a két szám különbségének, valamint a kisebbik számnak az eloszlása megegyezik!

64. Tíz, körülbelül egyforma képességű úszó eredménye egy válogatón egyenletes eloszlásúnak tekinthető, két és három perc között. Határozza meg a harmadik legjobb eredmény eloszlásfüggvényét!

65. Egyenletes eloszlás szerint választunk pontot az $x, y \in (0, 1)$ négyzeten, majd vetítjük a pontot az origóból kiinduló átlóra. Határozza meg a vetületpont origótól vett távolságának eloszlását!

66. Derült nyári éjszakán az égbolt egységnyinek tekintett részein szabad szemmel átlagosan 5 csillag észlelhető. Kiszemelünk véletlenül egy csillagot. Határozza meg a hozzá legközelebb észlelhető csillag tőle vett távolságának eloszlását!

XII. Valószínűségi változók vektorfüggvényének eloszlása és paraméterei ($\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ eloszlástranszformáció)

(i) Legyen az (X, Y) vektorváltozó eloszlása P és t: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ adott vektor-vektor függvény. Ekkor a $t(X, Y) = (t_1(X, Y), t_2(X, Y))$ valószínűségi változó eloszlása (P-nek t szerinti transzformált eloszlása) az a Q eloszlás, amelyre

$$Q(A) = P\{(x, y) : t(x, y) \in A\},$$

ahol $A \subseteq \mathbf{R}^2$ és t olyan, hogy a jobb oldali valószínűség értelmezett, és feltesszük, hogy Q a kétdimenziós intervallumokon biztosan értelmezett.
Speciálisan $t(X, Y)$ eloszlásfüggvénye:

$$G(u, v) = P(t_1(X, Y) < u, t_2(X, Y) < v).$$

Ha (X, Y) eloszlása folytonos, sűrűségfüggvénye $h(x, y)$, valamint a t függvény invertálható és inverze folytonosan differenciálható, akkor $t(X, Y)$ eloszlása is folytonos és sűrűségfüggvényére, $g(u, v)$-re

$$g(u, v) = h(t^{-1}(u, v)) \cdot |J(t^{-1}(u, v))|,$$

ahol $|J(t^{-1}(u, v))|$ a $t^{-1}(u, v)$ függvényhez tartozó Jacobi-determináns abszolút értéke, $g(u, v)$ értelmezési tartománya pedig az a halmaz, ahová $t(X, Y)$ eloszlása koncentrálódik.
Ismert, hogy

$$J(t^{-1}(u, v)) = \frac{1}{J(t(x, y))}, \quad \text{ahol } (x, y) = t^{-1}(u, v)$$

mindenhol, ahol a jobb oldal értelmes.

(ii) $t(X, Y)$ várható értékére:

$$M((t_1(X, Y), t_2(X, Y)) = (Mt_1(X, Y), Mt_2(X, Y)).$$

Ha $t(x, y) = \mathbf{L}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, ahol $\mathbf{L}$ valamely lineáris transzformáció mátrixa, akkor

$$\mathbf{K}_{t(X, Y)} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{K}_{(X, Y)} \cdot \mathbf{L}^T,$$

ahol $\mathbf{K}$ a kovarianciamátrix.

XII.1. Gyakorlófeladatok

1. X és Y együttes eloszlása

$Y \backslash X$	1	2	3
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	0	0	0
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0

Határozza meg XY és $\dfrac{Y}{X}$

a) együttes eloszlását,
b) kovarianciáját!

2. Legyenek X és Y független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók λ paraméterrel. Határozza meg az $(X, X+Y)$ valószínűségi változó

a) együttes eloszlását,
b) kovarianciamátrixát!
c) Határozza meg $X+Y$ feltételes eloszlását az $X = x$ feltételre nézve!
d) Hogyan határozná meg $X+Y$ feltételes eloszlását az $X = Y$ feltételre nézve?

3. Határozza meg a standard normális eloszlású (X, Y) véletlen pont (r, φ) polárkoordinátáinak mint vektorváltozónak

a) eloszlását,

b) várható értékét!

4. Az origó középpontú egységkörtartomány $x, y \geq 0$ részén az egyenletes eloszlást az $u = x^2 + y^2$, $v = y^2$ transzformációnak vetjük alá.

a) Határozza meg a transzformált eloszlást!

b) A környegyeden vett milyen eloszlás megy át az adott transzformációfüggvénynél egyenletes eloszlásba?

5. Legyen (X, Y) egyenletes eloszlású a $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$ négyzeten. Az U és V valószínűségi változókat a következő transzformációval definiáljuk:

$$U = X + Y, \quad V = X - Y.$$

a) Írjuk fel U és V együttes sűrűségfüggvényét!

b) Határozza meg (U, V) kovarianciamátrixát!

6. Oldja meg a XI.**11.** feladatot síkról síkra transzformáció felhasználásával!

7. Legyen **r** egyenletes eloszlású az origó középpontú, 2 sugarú körön. Rendeljük minden **r** vektorhoz a hozzá tartozó egységvektort. Hogyan transzformálódik az egyenletes eloszlás ezen hozzárendelésnél? Diszkrét, folytonos vagy egyéb eloszlást kapunk-e?

8. Legyen (X, Y) standard normális eloszlású vektorváltozó. Folytonos eloszláshoz vezetnek-e a következő transzformációk:

a) $t(x, y) = (4x + 2y, 2x + y)$,

b) $t(x, y) = (4x + 2y, 2x + 2y)$?

9. Két pénzérmét feldobunk. Legyen X, illetve Y a fej dobás karakterisztikus változója az egyik, illetve a másik érmén. Határozza meg az $(X + Y, X - Y)$ vektorváltozó

a) eloszlását,

b) kovarianciamátrixát!

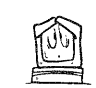
10. Tekintsük az $\dfrac{x^2}{2} + xy$ függvénnyel adott felületet a $0 \leq x, y \leq 1$ négyzet felett. Válasszunk egymástól függetlenül a $(0, 1)$-ben X, ill. Y véletlen koordinátákat egyenletes eloszlás szerint. Határozza meg a felület (X, Y)-beli normálvektora (x, y) síkra vett vetületének mint vektorváltozónak az eloszlását!

11. Téglalap oldalait λ paraméterű exponenciális eloszlás szerint választjuk egymástól függetlenül. Igazolja, hogy a téglalap kerülete és az átlónak az oldalakkal bezárt szöge független valószínűségi változók!

12. Legyen (X, Y) eloszlása standard normális. Hogyan transzformálódik az eloszlás, ha a sík minden vektorát elforgatjuk φ szöggel pozitív irányban, majd kétszeresére nyújtjuk?

13. Milyen eloszlás szerint válasszuk az (X, Y) pontot a síkon, ha azt szeretnénk, hogy a $z = x^2 + y^2$ paraboloid (X, Y) pontban vett normálvektorának vetülete a síkon normális eloszlású legyen?

14. Határozza meg a $(2j + 1)\overline{\beta}$ komplex szám eloszlását, ha a $\beta = X + jY$ komplex szám egyenletes eloszlású a $0 \leq x, y \leq 1$ négyzeten és $\overline{\beta}$ konjugáltat jelent!



XII.2. Szimuláció és statisztika

15. A $h(x, y) = 6x^2y$ $(0 < x < 1,\ 0 < y < 1)$ eloszlás szerint generáljon n véletlen vektort! Transzformálja az eloszlást a $t(x, y) = (x + y, x - y)$ függvény szerint, és generáljon n véletlen vektort a transzformált eloszlás szerint is!

16. Úgy választunk véletlen pontot az egységkörtartományon, hogy

a) a polárkoordinátákat választjuk $(0, 1)$-ben, ill. $(0, 2\pi)$-ben függetlenül és egyenletes eloszlás szerint,

b) egyenletes eloszlás szerint választjuk a pontot az egységkörtartományon.

Szemléltesse n darab véletlen pontválasztás esetére a nyert ponteloszlásokat az (x, y) síkon, és hasonlítsa össze őket!

17. A **14.** feladathoz kapcsolódóan, válasszon n komplex számot az eredeti eloszlás szerint, majd n komplex számot a transzformált eloszlás szerint!

18. A **31.** feladathoz kapcsolódóan, generáljon n vektort az eredeti és n vektort a transzformált eloszlás szerint. Szemléltesse az eredeti és a transzformált tapasztalati eloszlást! Számítsa ki a rendre hozzájuk tartozó tapasztalati kovarianciamátrixokat!

XII.3. Vegyes feladatok

19. Vannak-e olyan X és Y valószínűségi változók, amelyek egyenletes eloszlásúak a $\{0, 1, \ldots, n\}$ számhalmazon, összegük, $X+Y$ a $\{0, 1, \ldots, 2n\}$ halmazon, különbségük, $X-Y$ pedig a $\{-n, -n+1, \ldots, 0, \ldots, n-1, n\}$ halmazon egyenletes eloszlású?
Feltéve, hogy $X-Y$ eloszlására nem teszünk megkötést, adjon meg ilyen (X, Y) párt az $n = 3$ esetben!

20. n számot választunk egyenletes eloszlás szerint a $(0, 1)$ intervallumban, egymástól függetlenül. Határozza meg a legkisebb szám és a legnagyobb szám együttes eloszlását!

21. Legyenek X és Y egyenletes eloszlású, független valószínűségi változók a $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ számokon. Tekintsük azt az $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ transzformációt, amely az (X, Y) értékhez az $X+Y$ szám tízes számrendszerbeli számjegyeinek párját rendeli, tehát, ha $X+Y = 10\alpha + \beta$ $(0 \le \alpha \le 1, 0 \le \beta \le 9)$, akkor (α, β)-t. Határozza meg (α, β) eloszlását és vizsgálja α és β függetlenségét!

22. Az $\{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ négyzeten vett egyenletes eloszlást transzformáljuk a

$$t(x, y) = (x^2 + y, \ln y)$$

transzformációval. Adja meg az így kapott eloszlás sűrűségfüggvényét!

23. Az origó középpontú egységkörtartomány $x, y > 0$ negyedén vett egyenletes eloszlást az $u = x^2$, $v = y^2$ transzformáció milyen tartományba viszi és mi lesz a transzformált sűrűségfüggvény?
Melyik az az eloszlás a körnegyeden, amelyik az egyenletes eloszlásba megy át?

24. Legyen X folytonos, nemnegatív értékeket felvevő valószínűségi változó, $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel, valamint legyen az Y valószínűségi változó olyan, hogy az $X = x$-re vett feltételes eloszlása egyenletes $(0, x)$-ben minden x-re. Igazolja, hogy az X és $X - Y$ valószínűségi változók akkor és csak akkor függetlenek, ha

$$f(x) = \begin{cases} a^2 x e^{-ax}, & \text{ha } x \ge 0 \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

25. X_1, X_2, X_3 független, azonos eloszlású mérések eredményei, m várható értékkel, σ szórással. Határozza meg az $U = X_2 - X_1$ és $V = X_3 - X_2$ valószínűségi változók kovarianciamátrixát!

26. X és Y legyenek független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, 1 paraméterrel, és legyen $U = X + Y$, $V = \dfrac{X}{X+Y}$.

a) Határozza meg (U, V) eloszlását!
b) Igazolja, hogy V egyenletes eloszlású $(0, 1)$-en!

27. Az X, Y valószínűségi változókról tudjuk, hogy függetlenek és X a $(0, 2)$ intervallumon egyenletes eloszlású, Y pedig 1 paraméterű exponenciális eloszlású. Csak $X+Y$ értékét tudjuk megfigyelni. Számítsa ki a $P(X < 1 \mid X+Y = 2)$ feltételes valószínűséget!

28. Határozza meg a $(0, 1)$-ben egyenletes eloszlások konvolúcióját $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ transzformáció segítségével!

29. Tegyük fel, hogy az α és β azonos várható értékű és szórású valószínűségi változók. Bizonyítsa be, hogy az $\alpha + \beta$ és $\alpha - \beta$ valószínűségi változók korrelálatlanok!

30. X és Y független valószínűségi változók pozitív szórással. Bizonyítsuk be, hogy X és $X+Y$ nem függetlenek!

31. Az (X, Y) vektorváltozó egyenletes eloszlású az origó középpontú 2 sugarú körön. A sík minden $\mathbf{r}$ vektorához hozzárendeljük az $|\mathbf{r}|\,\mathbf{r}$ vektort. Határozza meg a transzformált eloszlás kovarianciamátrixát!

32. Legyen φ egyenletes eloszlású $(0, 2\pi)$-ben. Adja meg a $(6 \cos \varphi, 3 \sin \varphi)$ valószínűségi változó kovarianciamátrixát!

33. Egy bolha ugrál a síkon. Az origóból indul és egységnyi távolságokat ugrik minden időpillanatban olyan irányban, hogy az irány polárszöge egyenletes eloszlású $(0, 2\pi)$-ben. Legyen (X_n, Y_n) a bolha tartózkodási helye az n-edik ugrás után. Határozza meg X_n és Y_n közelítő eloszlásait és mutassa meg, hogy X_n és Y_n korrelálatlanok!

34. Legyen két izzó élettartama független, exponenciális eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel. Igazolja, hogy a rövidebbik élettartam, valamint a két élettartam eltérése független valószínűségi változók!

35. Téglalap oldalait egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint választjuk $(0, 1)$-ben. Határozza meg a terület, valamint a kerület együttes eloszlását!

36. Egy kalkulátoron az RND gomb segítségével, függetlenül, két véletlen számot generálunk: RND_1-et és RND_2-t. Fogadjuk el, hogy a két véletlen szám eloszlása egyenletes a $[0, 1]$ intervallumon. Milyen eloszlással modellezzük azt a kétdimenziós valószínűségi változót, melynek első koordinátája RND_1 és RND_2 szorzata, második koordinátája pedig RND_2 és RND_1 hányadosa. Létezik-e a kovarianciája?

37. Az $\alpha = X + jY$ véletlen komplex szám egyenletes eloszlású a $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ négyzeten. Határozza meg az $\alpha + j\alpha$ komplex szám
a) eloszlását,
b) várható értékét!

XII.4. Ellenőrző kérdések*

38. Tegyük fel, hogy X és Y független, $M(X)$ és $M(Y)$ létezik, $M(Y) \neq 0$. Igaz-e a következő állítás:

$$M\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{M(X)}{M(Y)}.$$

39. Legyen (X, Y) vektorváltozó és $t(x, y)$ folytonos, síkról egyenesre transzformáció. Igaz-e, hogy $M(t(X, Y)) = t(M(X), M(Y))$?

40. Meghatározza-e külön-külön X és Y eloszlása $X+Y$
a) eloszlását,
b) várható értékét,
c) szórását,
d) mediánját?

41. Legyenek X és Y tetszőleges valószínűségi változók. Igazak-e a következő állítások:
a) $X+Y$ módusza X és Y móduszainak összege.
b) $D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y)$.
c) $\mu_{X+Y} = \mu_X + \mu_Y$, ahol X és Y itt folytonos valószínűségi változók, μ pedig medián.

42. Legyenek X és Y független valószínűségi változók. Igaz-e, hogy
a) $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$,
b) $D(X \cdot Y) = D(X) \cdot D(Y)$,
c) $X \cdot Y$ eloszlása X, ill. Y eloszlásainak szorzata?

43. Mi a kapcsolat a $J\,|t(x, y)|$ és $J\,|t^{-1}(u, v)|$ Jacobi-determinánsok között?

44. *a)* Elő lehet-e állítani az 1, 2, 3, 4 számokon vett egyenletes eloszlást két, nem elfajult, diszkrét eloszlás konvolúciójaként? (Egy eloszlás elfajult, ha egyetlen pontra koncentrálódik.)
b) Elő lehet-e állítani a $[0, 1]$ intervallumon vett egyenletes eloszlást két folytonos eloszlás konvolúciójaként?

* Az Ellenőrző kérdések a XI. és XII. fejezetekre vonatkoznak.

45. Legyenek (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n) egy vektorváltozóra nyert tapasztalati adatok és $t(x, y)$ adott transzformáció. Van-e lényeges különbség a következő két eloszlás között:

a) a fenti adatokhoz tartozó tapasztalati eloszlás transzformáltja $t(x, y)$-nal,

b) a $t(x_1, y_1)$, $t(x_2, y_2)$, …, $t(x_n, y_n)$ értékekhez tartozó tapasztalati eloszlás?

46. Igaz-e, hogy

a) a sík bármely tartományán vett egyenletes eloszlás lineáris transzformáltja is egyenletes eloszlás,

b) kétdimenziós normális eloszlás lineáris transzformáltja is normális eloszlás?

47. Lehetséges-e, hogy X és Y nem függetlenek, de $t_1(X, Y)$ és $t_2(X, Y)$ független valószínűségi változók valamely t_1 és t_2 függvényekre?

48. Tegyük fel, hogy (X, Y) sűrűségfüggvénye $h(x, y)$ és a $t(x, y)$ transzformációra $M(t(X, Y))$ létezik. Adja valószínűségi interpretációját az analízis integráltranszformáció-tételének a $\iint_T t(x,y) \cdot h(x,y)dxdy$ integrálra vonatkozóan!

XIII. Többdimenziós normális eloszlás

(i) A *reguláris* kétdimenziós $N(m, K)$ normális eloszlás sűrűségfüggvénye

$$h(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det K}} e^{-\frac{1}{2}(z-m)^T K^{-1}(z-m)},$$

ahol m tetszőleges vektor, K tetszőleges pozitív definit szimmetrikus mátrix. Igazolható, hogy az eloszlás várható értéke m, kovarianciamátrixa pedig K. A sűrűségfüggvény koordinátás alakja:

$$h(x,y) = \frac{\sqrt{ab-f^2}}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(a(x-m_1)^2+2f(x-m_1)(y-m_2)+b(y-m_2)^2)},$$

ahol m_1, m_2 m-nek koordinátái, a, b és f K^{-1} elemei, úgy, hogy

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} a & f \\ f & b \end{pmatrix}.$$

Így a, b és f kifejezhető a peremeloszlások σ_1 és σ_2 szórásaival és a c kovarianciával a következőképpen:

$$a = \frac{\sigma_2^2}{|K|^2}; \quad b = \frac{\sigma_1^2}{|K|^2}; \quad f = \frac{c}{|K|^2}; \quad \text{ahol } |K| = \det K.$$

Az egydimenziós normális eloszlásra vonatkozó centrális határeloszlás-tétel általánosítható a többdimenziós normális eloszlásra.

(ii) A *reguláris* kétdimenziós normális eloszlás néhány tulajdonsága:

a) Ha α reguláris normális eloszlású és L tetszőleges reguláris lineáris transzformáció, n tetszőleges vektor, akkor $L\alpha + n$ is reguláris normális eloszlású. Tetszőleges β reguláris normális eloszlású valószínűségi változó már a standard kétdimenziós α normális eloszlású valószínűségi változó alkalmas L lineáris transzformáltja eltoltjaként megkapható (amelyre $K = LL^T$), így a reguláris normális eloszlású valószínűségi változók osztálya *zárt* a reguláris lineáris transzformációra és eltolásra.

b) Egy α kétdimenziós folytonos valószínűségi változó akkor és csak akkor reguláris normális eloszlású, ha a következő feltételek együttesen teljesülnek:
   (1) az összes perem- és feltételes eloszlásai egydimenziós normális eloszlások,
   (2) a feltételes várható érték függvényei egyenesek, pontosan a regressziós egyenesek,
   (3) a feltételes szórásnégyzetek nem függenek a feltételtől, így konstansok.

c) Kétdimenziós normális eloszlás esetén a koordinátaváltozók korrelálatlansága és függetlensége ekvivalens.

d) A feltételes, pl. x-re vonatkozó $\sigma^2_{2|1}$ szórásnégyzet: $\sigma^2_2 - \dfrac{c^2}{\sigma^2_1}$.

e) Ha (X, Y) normális eloszlású, akkor az $aX + bY + c$ nemhomogén lineáris kombináció egydimenziós normális eloszlású bármely a, b és c-re, mint az az *a)* és *b)* (1) tulajdonságokból következik.

(iii) Egy β valószínűségi változó eloszlása *általános* normális, ha alkalmas L (nem feltétlenül reguláris) lineáris transzformációra és n vektorra $\beta = L\alpha + n$, ahol α a standard normális eloszlás. Ha α tetszőleges reguláris normális eloszlású, L pedig *tetszőleges* lineáris transzformáció, n tetszőleges vektor, akkor $L\alpha + n$ általános normális eloszlású. Az általános normális eloszlású valószínűségi változók osztálya *zárt* a lineáris transzformációra és az eltolásra. Általános normális eloszlású valószínűségi változó nem feltétlenül folytonos, azaz nem feltétlenül létezik sűrűségfüggvénye.

(iv) Normális eloszlás származékai
Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$, illetve $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ független $N(0, 1)$ eloszlású minták, továbbá s_1, illetve s_2 az ezen mintákhoz tartozó tapasztalati szórások. Ekkor az

$$s_1^2 \cdot \sqrt{n},$$

azaz az $X_1^2 + \ldots + X_n^2$ statisztika n szabadságfokú χ^2-eloszlású, az

$$\frac{Y_1}{s_1}$$

statisztika n szabadságfokú Student-eloszlású, az

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}$$

statisztika n, m szabadságfokú, F-eloszlású.

(v) Ha (X, Y) eloszlása kétdimenziós normális eloszlás és $R(X, Y) = 0$, akkor a

$$\frac{\sqrt{n-2}\,\overline{R}}{\sqrt{1-\overline{R}^2}}$$

statisztika $n - 2$ szabadságfokú t-eloszlású, ahol $\overline{R}$ a mintához tartozó tapasztalati korrelációs hányados.

(vi) A többdimenziós normális eloszlás alkalmazásának szükséges feltétele a többdimenziós centrális határeloszlás-tétel következményeként, hogy a véletlen vektormennyiség sok, független, az egészhez képest kicsiny abszolút értékű vektormennyiség összege legyen.
A normális eloszlás alkalmazásait megkönnyítő tulajdonságok az *a)*, *b)*, *c)*, *d)*, *e)* tulajdonságok.

(vii) A t-, χ^2-, F-eloszlások alkalmazásaira nézve lásd a XIV. fejezetet. Korrelálatlanságra nézve a t-eloszlás felhasználásával végezhetünk hipotézisvizsgálatot, az együttes eloszlásra normális eloszlást feltételezve.

XIII.1. Gyakorlófeladatok

XIII.1.1. Sűrűségfüggvény, paraméterek, transzformáció

1. Az (X, Y) vektorváltozó sűrűségfüggvénye:

$$h(x,y)=ke^{-\frac{4}{14}(2(x-1)^2-(x-1)y+y^2)}.$$

Mennyi

a) k értéke?

b) X és Y várható értéke és szórása?

2. Az (X, Y) kétdimenziós normális eloszlást követ $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ várható értékkel és

$K=\begin{pmatrix}4 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal.

a) Írja fel (X, Y) együttes sűrűségfüggvényét, feltéve, hogy létezik sűrűségfüggvény!

b) $P(3X-4>Y-2\sqrt{43})=?$

3. Az (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$h(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{5}}e^{-0{,}1((x-2)^2-2(x-2)(y+1)+2(y+1)^2)}.$$

Határozza meg a $P(X+Y>-9)$ valószínűséget!

4. Legyen az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$h(x,y)=\frac{1}{12\pi}e^{-\frac{1}{72}(x\ \ y-1)\begin{pmatrix}8 & 2\\2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y-1\end{pmatrix}}.$$

a) Mi a valószínűsége annak, hogy $Y>0$?

b) Lehetséges-e, hogy

$$Y=2(\alpha+\beta)+1 \quad \text{és} \quad X=\alpha-2\beta,$$

ahol α és β valamely független, standard normális eloszlású valószínűségi változók?

5. Egy kétdimenziós valószínűségi változó normális eloszlást követ $\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ várható értékkel és $\begin{pmatrix}2 & 2\\2 & 3\end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. A valószínűségi változót az $u=x-2y$, $v=-x$ transzformációnak vetjük alá. Adja meg a transzformációval adódó valószínűségi változó várható értékét és kovarianciamátrixát! Folytonos-e a transzformált eloszlás?

6. Egy kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó normális eloszlást követ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ várható értékkel és $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Milyen eloszlást követ az

$\alpha=\begin{pmatrix}4 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ valószínűségi változó? Van-e sűrűségfüggvénye?

7. Az (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$h(x,y)=ce^{-\frac{1}{6}((x-2)^2-2(x-2)(y-1)+4(y-1)^2)}$$

Függetlenek-e az $Y-3X$ és $2X-11Y$ valószínűségi változók?

8. Legyen (X, Y) standard normális eloszlású. Tekinthető-e kétdimenziós normális eloszlásúnak

a) az egydimenziós normális eloszlás?

b) a $(2X+4Y, 4X+8Y)$ valószínűségi változó?

c) a $2X+Y$ valószínűségi változó?

XIII.1.2. Feltételes eloszlás, regresszió

9. X normális eloszlású valószínűségi változó 0 várható értékkel és 1 szórással. Vizsgáljuk meg, hogy a következő esetekben (X, Y) normális eloszlású-e, és ha igen, akkor X és Y függetlenek-e egymástól: Az $X = x$ feltétel mellett Y eloszlása

a) Cauchy-eloszlás,

b) normális eloszlás $2x^2$ várható értékkel és $5x^2$ szórással,

c) normális eloszlás 2 várható értékkel és 5 szórással?

10. Tekintsük az (1, 2) várható értékű,

$$\begin{pmatrix} 4 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

kovarianciamátrixú normális eloszlásnak az $y = 3$ egyenletű egyenesen vett feltételes eloszlását. E feltételes eloszlás szerint mennyi az $1 \le x \le 4$ egyenlőtlenséggel jellemzett intervallumba esés valószínűsége?

11. Adjunk össze két független, standard normális eloszlású véletlen számot! Mi a valószínűsége annak, hogy ez az összeg nagyobb, mint 1, feltéve, hogy az első szám kétszereséből a másodikat kivonva éppen 0,5-öt kapunk?

12. Az (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$h(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{6}\left(4(x-2)^2+2(x-2)y+y^2\right)}.$$

Y ismeretében X-re szeretnénk tippelni egy $x = ay + b$ alakú függvénnyel, úgy, hogy a hiba négyzetének átlaga minimális legyen. Határozza meg a és b értékét!

13. X és Y független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Ismert $X+Y$ értéke, de minket $X-2Y$ érdekel. $X+Y$ milyen függvényével becsüljük $(X-2Y)$-t, ha a négyzetes közép értelmében minimális átlagos hibára törekszünk?

XIII.1.3. Sűrűségfüggvény, paraméterek, transzformáció, feltételes eloszlás, regresszió

14. Egy fényévekre lévő, kör alakúnak tekinthető célpontot 999-szer céloznak meg lézerrel. A találatok a körlapon egyenletes eloszlásúak és egymástól függetlenek. Határozzon meg olyan konkrét eloszlást, mellyel a 999 találathely súlypontjának mint valószínűségi vektorváltozónak az eloszlása jól közelíthető!

15. A bergengóc nők súlya (pontosabban: tömege) közelítőleg normális eloszlású 65 kg várható értékkel és 5 kg szórással, a férfiaké szintén normális eloszlású 85 kg várható értékkel és 10 kg szórással. Házaspárok esetén a férjek és feleségek súlyeloszlásai megfelelnek a bergengóc férfiak és nők súlyeloszlásának, de a férj és feleség súlya között nagy a korreláció: 0,9. Adja meg egy véletlenszerűen kiválasztott házaspár tagjainak súlyából adódó (férj súlya, feleség súlya) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását!

16. Egy szoba hosszát négyszer mértük meg. Az egyes mérések egymástól függetleneknek tekinthetők és normális eloszlásúak, közös várható értékük a valódi hossz, szórásuk azonos. Mi a valószínűsége annak, hogy a negyedik mérés pontosabban közelíti a valódi hosszúságot, mint az első 3 mérés átlaga?

17. Egy ember vonattal és autóbusszal utazik a munkahelyére. A vonat menetrend szerinti érkezési ideje 8,30, a busz indulási ideje 8,37. Tudjuk, hogy az átszállási idő 2 perc. A vonat érkezési ideje normális eloszlású 8,30 várható értékkel és 4 perc szórással, a busz indulási ideje normális eloszlású 8,37 várható értékkel és 3 perc szórással (a buszsofőr nem figyel a vonat érkezésére). Mi a valószínűsége, hogy emberünk egy 5 napos munkahéten legfeljebb egyszer nem éri el a buszát?

18. Két üzem, A és B közös raktárral rendelkezik. A raktárba havonta szállítanak s mennyiségű nyersanyagot, amelyből mindkét üzem annyit használ fel, amennyi a szükséglete. Az A üzem havi felhasználása $N(150, 10)$, a B üzemé pedig $N(210, 15)$ eloszlású. Mennyi legyen a raktárban levő készlet a hónap elején, ha azt kívánjuk, hogy e készlet az üzemeket együttesen legalább 0,99 valószínűséggel kielégítse?

19. Legyen (X, Y) normális eloszlású, $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ várható érték vektorral és $\begin{pmatrix}4 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Hogyan transzformálódik az eloszlás, ha a sík minden vektorát

a) $\frac{\pi}{6}$ szöggel pozitív irányban elforgatjuk?

b) tükrözzük az origóra?

20. Kovács úr minden nap 20 dkg trappista sajtot kér a boltban. Az eladó a vágásnál hibát követ el: X dkg-ot vág le. Miután megméri a levágott darabot, hibáját korrigálni akarja, ezért levág még Y dkg-ot és azt hozzáteszi (Y negatív, ha az első vágás 20 dkg-nál több). Mindkét vágásnál a hiba várható értéke 0, szórása az első vágásnál 2, a másodiknál 1 dkg. Normális eloszlással modellezve, adja meg annak a valószínűségét, hogy

a) a korrekciós sajtdarabka súlya $-\sqrt{5}$ és $2\sqrt{5}$ dkg közé esik,

b) az eladott sajt súlya kevesebb, mint 19 dkg!

21. Egy bizonyos áramkörben két pont között a tényleges feszültség az előírt 220 V körül ingadozik 5 V szórással. A mi feszültségmérő műszerünkön, a műszerre jellemzően, a leolvasható érték a tényleges érték körül ingadozik 2 V szórással. Kétdimenziós normális eloszlással modellezve, számítsa ki a műszerrel leolvasott érték szórását a fenti áramkörben!

22. Egy jó szemű, de reszkető kezű robot és egy félig vak mesterlövész együtt lövöldöznek a látóhatáron néha feltűnő, terepszínű sárkányra. A robot rosszul céloz ugyan, de lövedéke akkorát villan, hogy azt már a gyengén látó mesterlövész is észreveszi. Hová lőjön a mesterlövész, ha azt látja, hogy a robot lövedéke a szemben levő fától jobbra, 20 km-re villan?

(Tekintsük a szemben álló fát origónak. A sárkány megjelenése egy 0 várható értékű, 5 km szórású, normális eloszlású valószínűségi változóval modellezendő. Ha a sárkány x-ben tűnik fel, akkor a robot lövedékének villanása egy x várható értékű, 1 km szórású valószínűségi változónak vehető. A mesterlövész azt szeretné, hogy lövedékének becsapódási helye és a cél közötti távolság várható értéke minimális legyen.)

23. 100 alumíniumkockát egymás mellé rakunk, a különböző kockák élhosszúságai független, 1 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, és feltesszük, hogy az egyes kockák élhosszúságai megegyeznek. A száz élhosszúság összege szintén valószínűségi változó. Hogyan tippeljünk az utóbbi összegből a kockák összsúlyára, ha a tippelés hibáját az átlagos abszolútérték-eltéréssel mérjük (az alumínium sűrűsége 2,7 g/cm^3).

XIII.2. Szimuláció és statisztika

24. A **20.** „sajtos" feladathoz kapcsolódóan szimulálja n-szer a sajtdarab mérését, és szemléltesse a súlyra nyert tapasztalati eloszlást! Vesse össze ezt az eloszlást az elméletivel!

25. A **14.** „lézeres" feladathoz kapcsolódóan szimulálja n-szer a kör alakú célpontra lövést! A tapasztalati eloszlást szemléltesse együtt a használt konkrét elméleti, közelítő eloszlással!

26. A **17.** „busz–vonat" átszállási feladathoz kapcsolódóan szimulálja n-szer az átszállás folyamatát! Regisztrálja annak relatív gyakoriságát, hogy hányszor volt sikeres az átszállás, és vesse össze az elméleti valószínűségértékkel!

27. Egy város egyik piacán, 10 egymás után következő napon megfigyelést végeztek a nyári alma felhozatalára és az aznap eladott déligyümölcs mennyiségére nézve. Az adatokat a következő táblázat tartalmazza:

Sorszám	*Nyári alma* q	*Déligyümölcs* q
1.	1,4	0,85
2.	1,7	0,90
3.	1,9	0,86
4.	2,2	0,80
5.	2,2	0,78
6.	2,1	0,75
7.	2,4	0,69
8.	2,5	0,65
9.	2,5	0,66
10.	2,3	0,65

Hajtson végre a nyári alma felhozatali súlyának és az eladott déligyümölcs mennyiségének korrelálatlanságára nézve hipotézisvizsgálatot 99%-os szinten!

28. Az I. és II. vízgyűjtők havi vízveszteségi értékeit mérték, és a következő százalékokat kapták:

I \ II	0,25–0,75	0,75–1,25	1,25–1,75	1,75–2,25
0,25–0,75	6	4	0	0
0,75–1,25	9	21	5	0
1,25–1,75	5	10	14	11
1,75–2,25	0	0	6	9

Végezzen I. és II. vízveszteségei korrelálatlanságára nézve hipotézisvizsgálatot!

29. A **44.** feladathoz kapcsolódóan, alkalmazza a megadott módszereket n darab egyenletes eloszlású vektormintára!

XIII.3. Vegyes feladatok

30. (X, Y) sűrűségfüggvénye

$$h(x,y)=\frac{1}{\pi\sqrt{3}}e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}.$$

Számítsuk ki (X, Y) korrelációs együtthatóját!

31. Legyenek $h_1(x, y)$, illetve $h_2(x, y)$ $N(0, K_1)$, illetve $N(0, K_2)$ eloszlású valószínűségi változók sűrűségfüggvényei. Ellenőrizze, hogy az $\frac{1}{2}(h_1(x,y)+h_2(x,y))$ sűrűségfüggvényhez tartozó peremeloszlások normális eloszlások, bár a kétdimenziós eloszlás nem normális!

32. *a)* Milyen a és b értékre lehet $K=\begin{pmatrix}5 & a\\ b & 2\end{pmatrix}$ egy kétdimenziós normális eloszlás kovarianciamátrixa?

b) Legyen $a = -3$. Határozza meg az $m = 0$ várható értékű, K kovarianciamátrixú normális eloszlás sűrűségfüggvényét!

33. (X, Y) sűrűségfüggvénye

$$h(x,y)=ce^{-\frac{1}{2}((x-1)^2-4(x-1)y+5y^2)}$$

a) $c=?$

b) Adja meg a várható érték vektort és a kovarianciamátrixot!

c) $P(2X-2\sqrt{29}>2-Y)=?$

34. Van-e olyan kétdimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 0, valamint annak valószínűsége, hogy mindkét koordináta pozitív, $\frac{1}{8}$-dal egyenlő?

35. (X, Y) 0 várható értékű, normális eloszlású valószínűségi változó, amelyre $D(X+Y)=D(X-Y)$ és $4D(X)\,D(Y)=3$. Mennyi X és Y kovarianciamátrixának determinánsa?

36. Legyenek az X és Y standard normális eloszlású valószínűségi változók függetlenek. Határozza meg az $\alpha=|X|\operatorname{sign}Y$ valószínűségi változó eloszlását!

37. Egy kétdimenziós valószínűségi változó normális eloszlást követ $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ várható értékkel és $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Milyen eloszlást követ a két koordináta különbsége?

38. Az (X, Y) vektorváltozó kétdimenziós normális eloszlású, $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ várható értékkel, $\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal.

a) Határozza meg a c értékét úgy, hogy $M(\,|\,X+Y-c\,|\,)$ minimális legyen!

b) $P(X+Y<1)=?$

39. Legyen (X, Y) kétdimenziós normális eloszlású, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ várható érték vektorral és $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Tudjuk, hogy $P(X > Y) = 0{,}4$. Határozzuk meg az $a - b$ különbséget!

40. X és Y független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Melyik valószínűség nagyobb: $P(|3X - Y| < 1)$ vagy $P(|X + Y| < 1)$?

41. Legyen X és Y két független, normális eloszlású valószínűségi változó, $m = 0$ várható értékkel és $\sigma > 0$ szórással. Számítsuk ki a $\beta = |X - Y|$ valószínűségi változó eloszlását!

42. Legyenek X és Y független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Írjuk fel az $\alpha = aX + bY + c$ és $\beta = Y$ $(a \neq 0)$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényét, amennyiben létezik!

43. A kétdimenziós standard normális eloszlást
a) az $u = 2x + 3y,\ \ v = Ax - 5y$ leképezéssel, illetve
b) az $u = 2x + 3y - 10,\ \ v = Ax - 5y + 40$ leképezéssel
transzformáljuk. Milyen eloszlásokhoz jutunk? Folytonosak-e a kapott eloszlások? Diszkutálja válaszát A-tól függően!

44. Győződjön meg arról, hogy egy kétdimenziós standard normális eloszlást követő pont polárkoordinátái egymástól függetlenek! Határozza meg mindkét polárkoordináta eloszlását! A kapott eredményeket felhasználva keressen olyan módszert, melynek segítségével két független, 0 és 1 között egyenletes eloszlású véletlen számból kiindulva elő tud állítani
a) kétdimenziós standard normális eloszlású véletlen pontot,
b) egydimenziós standard normális eloszlású véletlen számot,
c) két, egymástól független, egydimenziós standard normális eloszlású véletlen számot!

45. X és Y függetlenek, továbbá $M(X) = M(Y) = 0$, $D(X) = D(Y) = 1$. Legyenek $\alpha = X + Y$, $\beta = X - Y$.
a) Határozza meg (α, β) kovarianciamátrixát!
b) Adja meg X és Y eloszlását úgy, hogy a fentiek teljesülése mellett α és β függetlenek legyenek, illetve α és β ne legyenek függetlenek!

46. (X, Y) sűrűségfüggvénye

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-0{,}5 z^T \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix} z}.$$

Legyen $\alpha = (9X + 3Y, 3X + Y)$. Adja meg α eloszlását! Folytonos-e α?

47. Igazolja, hogy ha X, ill. Y független, $\chi^2(n)$, ill. $\chi^2(m)$ eloszlású valószínűségi változók, akkor $X + Y$ $\chi^2(n+m)$ eloszlású!

48. Tekintsünk egy +30°-os szögtartományt, melynek csúcsa az origóban van és egyik határa az x tengely. Mi a valószínűsége annak, hogy egy standard normális eloszlású valószínűségi változó értéke a kiszemelt szögtartományba esik? Mennyi ugyanennek az eseménynek a valószínűsége, ha a valószínűségi változó eloszlása 0 várható értékű,

$$\begin{pmatrix} 4 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

kovarianciamátrixú normális eloszlás?

49. Egy kétdimenziós valószínűségi változó x komponensének eloszlása 2 várható értékű, 1 szórású normális eloszlás. Az y komponens adott x mellett szintén normális eloszlású $1 + \frac{x-1}{8}$ és $\frac{15}{16}$ paraméterekkel. Mi a kovarianciamátrixa?

50. Határozza meg a feltételes sűrűségfüggvényeket, ha az együttes sűrűségfüggvény:

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2xy + 2y^2)}.$$

51. Tegyük fel, hogy egy kétdimenziós valószínűségi változó normális eloszlást követ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a második koordináta kisebb, mint 1, feltéve, hogy az első egyenlő 3-mal!

52. (X, Y) együttes eloszlása kétdimenziós normális. Tudjuk, hogy $P(Y<0 \mid X=0) = = P(Y<2 \mid X=1) = \frac{1}{2}$ és $P(Y<5 \mid X=2) = \Phi(1) = 0{,}8413$. Határozza meg a $P(Y<8 \mid X=3)$ feltételes valószínűséget!

53. Egy síkbeli csonkított eloszlás első tengelyre eső vetületének sűrűségfüggvénye $f(x)=2x$ $(0<x<1)$. A második koordinátának az elsőre vonatkozó feltételes sűrűségfüggvénye:

$$k(x \mid y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-3x)^2}{2}} \quad (0<x<1,\ -\infty<y<\infty).$$

A síkbeli csonkított eloszlás normális-e, vagy sem?

54. Legyen (X, Y) sűrűségfüggénye a

$$h(x,y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}$$

függvény. Számítsuk ki X-nek Y-ra vonatkozó regressziós függvényét!

55. Az (X, Y) sűrűségfüggvénye:

$$h(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} e^{-\frac{1}{4}(x^2-2xy+3y^2)}$$

Számítsuk ki az $\alpha = Y - X$, $\beta = Y$ transzformációval definiált α és β regressziós függvényeit!

56. Az (X, Y) vektor normális eloszlást követ. Az X koordináta szórása 5, és Y-nak X-re vonatkozó regressziós görbéje $y = \frac{x}{2} - 3$. Adja meg az (X, Y) vektor sűrűségfüggvényének képletét a szükséges további paraméterek segítségével! Nevezze is meg a felvett paramétereket!

57. Az $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvénye:

$$\frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{8}(x-1\ \ y-2)\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}}.$$

Tekintsük az

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ és az } L_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

lineáris transzformációkat, ill. az

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = L_1 \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \text{ és az } \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = L_2 \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}$$

valószínűségi változókat. Tegyük fel, hogy X_2-t meg tudjuk figyelni. Hogyan tippeljünk Y_2 értékére, ha a tipp hibáját a szokásos négyzetes veszteség függvénnyel mérjük?

58. (X, Y) együttes sűrűségfüggvénye:

$$h(x,y) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{4}(2(x-1)^2+2(x-1)(y-2)+(y-2)^2)}.$$

Állapítsa meg, hogy lineáris függvénye-e Y X-nek, 1 valószínűséggel!

59. $X_1, X_2, \ldots, X_{1000}$ független, $f(x)=2x$ $(0 \le x \le 1)$ sűrűségfüggvényű valószínűségi változók és legyen $\alpha = X_1 + X_2 + \ldots + X_{1000}$, $\beta = X_1^3 + X_2^3 + \ldots + X_{1000}^3$. Határozza meg azt az eloszlást, amellyel az (α, β) vektorváltozó eloszlása jól közelíthető!

60. Szabvány szerint a literes folyadékmennyiség 20%-át, illetve 80%-át másmás gép adagolja egymástól függetlenül. Az adagolás véletlen eltérése normális eloszlásúnak tekinthető, 0,05 dl, ill. 0,09 dl szórással. Feltéve, hogy az üveg tényleges tartalma 1 dl-rel haladja meg az 1 litert, mi a valószínűsége, hogy a túladagolásból több mint 0,05 dl a 80%-ot adagoló géptől ered?

61. Egy cukorkacsomagoló gép átlag 10 dkg súlyú, 5 g szórású csomagokat készít. Maguknak a zacskóknak a súlya átlagosan 5 g, 0,2 g szórással. Milyen eloszlású a zacskókba csomagolt cukor nettó súlya?

62. A villany- és gázfogyasztásaink átlagostól vett előjeles eltéréseinek együttes eloszlása normális,

$$h(x,y)=\frac{1}{\pi\sqrt{3}}e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}$$

sűrűségfüggvénnyel. Feltéve, hogy a gázfogyasztás 3 m^3-rel tér el az átlagostól, mi a villanyfogyasztás eltérésének eloszlása?

63. Egy sportoló alvásideje órában normális eloszlásúnak tekinthető 8 és 1 paraméterekkel. Ha a sportoló k órát alszik, akkor teljesítménye másodpercben közel normális eloszlásúnak tekinthető, $60-k$ és 1 paraméterértékekkel. Mi a valószínűsége, hogy legalább 58 mp-t teljesít?

64. Két szomszédos utcasarkon mérik a zajszintet. Az egyiken átlagosan 5 egység, 2 szórással, a másikon 3 egység, 1 szórással, kovarianciájuk 1. Mi a valószínűsége, hogy egy adott pillanatban a zajszintek eltérése több mint 1 egység?

65. Három sárkányrepülő közelíti meg egymás után egy versenyen a célpontot. Határozza meg a célhoz legközelebb földet érő versenyző földet érési helyének a céltól vett távolsága eloszlását! Feltesszük, hogy földet érésük pontjai független, kétdimenziós standard normális eloszlású valószínűségi változók és a cél az origó.

XIII.4. Ellenőrző kérdések

66. Igazak-e a következő állítások?

a) Minden többdimenziós normális eloszlásnak van sűrűségfüggvénye.
b) Reguláris normális eloszlás lineáris transzformáltja is reguláris.
c) Normális eloszlás esetén, ha a peremek szorzatának várható értéke a várható értékek szorzata, akkor az eloszlás szorzateloszlás.
d) Normális eloszlás feltételes eloszlásainak szórása független a feltételtől és megegyezik az egyik peremeloszlás szórásával.
e) Ha egy eloszlás peremeloszlásai normálisak, akkor az eloszlás is normális.

67. Meghatározzák-e a normális eloszlást

a) összes feltételes és peremeloszlásainak várható értékei, szórásai;
b) peremeloszlásai;
c) egyik peremeloszlása és másik feltételes eloszlásrendszere;
d) peremeloszlásai és egyik regressziós egyenese?

XIV. Matematikai statisztika

A következőkben, a közelítések alkalmazásakor feltesszük, hogy a kísérletek száma, n, „elég nagy” (bizonyos statisztikáknál gyakorlatilag már elegendő kb. $n \geq 30$, pl. u-statisztika).

(i) A relatív gyakoriságot $\left(\mu = \dfrac{k}{n}\right)$ és a valószínűséget (p) tartalmazó statisztika,

$$\frac{p-\mu}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$$

közelítőleg $N(0, 1)$ eloszlású, a Moivre–Laplace-tétel feltételei esetén.
Alkalmazás: p becslésére

$$\mu - u_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq \mu + u_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},$$

ahol $P(-u_\alpha, u_\alpha) = 1-\alpha = 2\Phi(u_\alpha)-1$ és $1-\alpha$ a biztonsági (szignifikancia-)szint, vagy jó közelítéssel

$$\mu - u_\alpha \cdot \sqrt{\frac{\mu(1-\mu)}{n}} \leq p \leq \mu + u_\alpha \cdot \sqrt{\frac{\mu(1-\mu)}{n}}.$$

(ii) A mintaközepet ($\bar{x}$), a várható értéket (m), a szórást (σ) tartalmazó statisztika (u)

$$\frac{\bar{x}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

közelítőleg $N(0, 1)$ eloszlású, a centrális határeloszlás-tétel feltételeinek teljesülése esetén.
Alkalmazás: m becslésére, ismert σ esetén

$$\bar{x} - u_p \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + u_p \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

ahol $1-p$ a biztonsági szint és $1-p = 2\Phi(u_p)-1$.

Az $m = m_0$ hipotézis eldöntésére a kritikus tartomány ismert σ esetén:

$$m_0 - u_p \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq m_0 + u_p \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Két valószínűségi változóra vonatkozó mintaközepek ($\bar{x}_1$ és $\bar{x}_2$), várható értékek (m_1, m_2), szórások (σ_1, σ_2) esetén az

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

statisztika közelítőleg $N(0, 1)$ eloszlású.
Alkalmazás: az $m_1 = m_2$ hipotézis eldöntésére. Kritikus tartomány ismert szórások esetén:

$$-u_p \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq u_p \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}.$$

(iii) Közel normális eloszlású populáció esetén a mintaközepet ($\bar{x}$), a várható értéket (m), a korrigált tapasztalati szórást (s^*) tartalmazó statisztika

$$\frac{\bar{x}-m}{\frac{s^*}{\sqrt{n}}}$$

(közelítőleg) $t(n-1)$ eloszlású a centrális határeloszlás-tétel feltételeinek teljesülése esetén.
Alkalmazás: m becslésére

$$\bar{x}-t_p\cdot\frac{s^*}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+t_p\cdot\frac{s^*}{\sqrt{n}},$$

ahol $P(-t_p, t_p) = 1-p$ és $1-p$ a biztonsági szint.
Az $m = m_0$ hipotézis eldöntésére a kritikus tartomány:

$$m_0-t_p\cdot\frac{s^*}{\sqrt{n}}\le\bar{x}\le m_0+t_p\cdot\frac{s^*}{\sqrt{n}}.$$

Két, közel normális eloszlású valószínűségi változóra vonatkozó mintaközepek ($\bar{x}_1$ és $\bar{x}_2$), várható értékek (m_1 és m_2), tapasztalati szórások (s_1 és s_2), azonos elméleti szórások ($\sigma_1 = \sigma_2$) esetén az

$$\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-(m_1-m_2)}{\sqrt{n_1s_1^2+n_2s_2^2}}\bar{d}\qquad\left(\bar{d}=\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}\right)$$

statisztika közelítőleg $t(n_1+n_2-2)$ eloszlású.
Alkalmazás: az $m_1 = m_2$ hipotézis ellenőrzésére. Kritikus tartomány:

$$-t_p\frac{\sqrt{n_1s_1^2+n_2s_2^2}}{\bar{d}}\le\bar{x}_1-\bar{x}_2\le t_p\frac{\sqrt{n_1s_1^2+n_2s_2^2}}{\bar{d}}.$$

(iv) Két, közel normális eloszlású, ismeretlen σ_1 és σ_2 szórású valószínűségi változóra vonatkozó korrigált tapasztalati szórásokat tartalmazó statisztika (F):

$$\frac{(s_1^*)/\sigma_1^2}{(s_2^*)/\sigma_2^2}$$

(közelítőleg) $F(n_1-1, n_2-1)$ eloszlású, ha $s_1 > s_2$.
Alkalmazás: a $\sigma_1 = \sigma_2$ hipotézis eldöntésére.

Az $\frac{(n-1)(s^*)^2}{\sigma^2}$ statisztika normális eloszlású populáció esetén közelítőleg χ^2-eloszlású, $n-1$ szabadságfokkal. Alkalmazható szórásnégyzet becslésére.

(v) Egy véges eloszlást, $(p_1, p_2, \dots, p_r)$ és egy rá vonatkozó tapasztalati eloszlást $\left(\frac{\mu_1}{n},\frac{\mu_2}{n},\dots,\frac{\mu_r}{n}\right)$ tartalmazó statisztika (χ^2):

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{(\mu_i-np_i)^2}{np_i}\qquad(*)$$

eloszlása közelítőleg $\chi^2(r-1)$, a többdimenziós Moivre–Laplace-tétel feltételei mellett. Amennyiben a véges eloszlást magát is becsüljük, és összesen m darab tartalmazott paramétert becsülünk, akkor a χ^2-eloszlás szabadságfoka m-mel csökken, tehát $r-m-1$.
Alkalmazás:

Illeszkedésvizsgálatra (ha az eredeti eloszlás végtelen diszkrét vagy folytonos, akkor végesre diszkretizáljuk).

Függetlenségvizsgálatra. Általános esetben a hipotetikus értékeket is a kétdimenziós v_{ij} $(i = 1, 2, \dots, t,\ j = 1, 2, \dots, s)$ tapasztalati gyakoriságokból becsüljük, mint a tapasztalati peremeloszlások szorzatát.
(*) megfelelőjeként a

$$\sum_i\sum_j\frac{(v_{ij}-n\cdot\alpha_{ij})^2}{n\cdot\alpha_{ij}}$$

statisztika közelítőleg $\chi^2((t-1)(s-1))$ eloszlású, ahol

$$\alpha_{ij}=\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{s}v_{ij}\cdot\sum_{i=1}^{t}v_{ij}\right),\quad n=t\cdot s.$$

(vi) Korrelálatlanságra vonatkozó hipotézisvizsgálatra nézve lásd a X.**2.** pontot.

XIV.1. Gyakorlófeladatok

1. Egy milliós nagyváros polgármestere valamely fontos kérdésben szeretné a közvélemény támogatását is megnyerni. Tudja, hogy a lakosság 60%-a egyetért az álláspontjával, míg 40%-a nem. Minthogy a népszavazás túl költséges lenne, n elemű véletlen mintán végzett közvélemény-kutatást kíván elrendelni. Legalább hány embert kell kiválasztani ahhoz, hogy legalább 0,95 valószínűséggel a polgármestert támogatók legyenek többségben?

2. Két számítógépet egy telefonvonal köt össze, melyen az átvitt bitek egymástól függetlenül, ismeretlen p valószínűséggel romlanak el. Ezt a p valószínűséget úgy becsüljük meg, hogy n bitet továbbítunk a vonalon, és a hibás bitek relatív gyakoriságát számoljuk. Legalább mekkorának kell lennie n-nek, hogy annak a valószínűsége, hogy ez a relatív gyakoriság p-től több mint 10^{-4}-nel térjen el, kisebb legyen 0,05-nál?

3. *Az előző feladat folytatása.* Ha 2000 bitet továbbítunk, akkor legalább milyen pontossággal tudja becsülni p-t legalább 0,95 biztonsággal?

4. Szeretnénk meghatározni bizonyos tv-készülékek között a selejt valószínűségét. Megvizsgáltunk 5000 készüléket és 80 selejtest találtunk köztük. Becsülje meg, hogy a 80/5000 relatív gyakoriság milyen pontossággal közelíti az ismeretlen valószínűséget, 95%-os biztonsággal!

5. Egy sorozatban gyártott terméknél 1000 db-nak ellenőrzik a valódi súlyát, és átlagnak 5100 dkg-ot kapnak. Tudjuk, hogy a szórás 10 dkg. Adjon meg intervallumot, ahová a termék súlyának várható értéke 99% biztonsággal beleesik!

6. Egy műszeres mérésnél előfordulnak véletlen hibák. 100 mérést hajtunk végre. A tapasztalt mérési adatok leglább milyen pontossággal közelítik az ismeretlen valódi értéket, feltéve, hogy a mérési hibák szórása 0,2, és hogy 0,9 biztonsági szintet kívánunk garantálni?

7. Egy kiszáradt kút mélységét kívánjuk mérni kavicsok bedobásával úgy, hogy mérjük a zuhanás idejét. A mérések pontatlansága miatt hány kísérletet kellene végrehajtani ahhoz, hogy az egyes mérésekből kiszámított mélységek átlaga, 80% biztonsággal, 0,1-nél jobb pontossággal közelítse a valódi mélységet? A mért zuhanási időt egyenletes eloszlásúnak tételezzük fel 1 és 10 mp között.

8. Egy mészárosról az a hír járja, hogy nem egészen tisztességes, mert mérlege szándékosan rosszul van beállítva. Száz adatunk van, melyek szerint a száz db, 1 kg-osnak eladott húsadag valódi átlaga csak 99,5 dkg. Állíthatjuk-e 0,90 biztonsági szinten, hogy a mészáros csal, ha az egyes mérések szórása 1 dkg?

9. Egy XVII. századi sorozási statisztika azt mutatja, hogy 7459 sorozott katonánál az átlagos mellbőség 35,8 inch volt, 1,94 pontosnak vehető szórással. Egy 1976. évi sorozásnál 2146 sorozottnál 34,8 inch átlagos mellbőséget mértek, 2,01 pontosnak vehető szórással. Mondhatjuk-e ezek alapján, hogy a régi katonák lényegesen „délcegebbek" voltak, mint a maiak? Fogalmazza meg állítását valószínűségi állítás formájában!

10. 15 izzónak megmérték az élettartamát, amely közelítőleg normális eloszlásúnak tekinthető. Az átlagra 1200 óra, az s^* empirikus szórásra 186 óra adódott. Adjon becslést 0,99 biztonsággal az izzók élettartamának várható értékére!

11. Egy alkatrész átmérőjének várható értékére elfogadható-e az $m = 2$ hipotézis 0,9 biztonsági szinten, ha 10 alkatrészt megvizsgálva a következő átmérőértékeket kapjuk: 1,99; 2; 1,98; 1,95; 1,95; 2,02; 2,05; 2,04; 2,03; 2,01. Az átmérő eloszlására normális eloszlást feltételezhetünk.

12. Kétféle technológiával gyártanak egy terméket. 6–6 mintát megvizsgálnak a termékből és rendre a következő térfogatátlagokat, ill. szórásokat kapják:

$$\bar{x}_1 = 297,\ s_1^2 = 38{,}4; \qquad \bar{x}_2 = 310,\ s_2^2 = 46.$$

Van-e lényeges eltérés 0,99 biztonsági szinten a két technológia között, feltéve, hogy normális eloszlásokat és egyenlő elméleti szórásokat feltételezhetünk?

13. Két technológiával gyártanak le egy bizonyos típusú terméket. 12 elemű minta alapján az első technológia esetén $s_1^{*2} = 31$ mm, ill. a második technológiánál 15 elemű minta alapján $s_2^{*2} = 17$ mm. Tehetünk-e ennek alapján lényeges különbséget 0,95 biztonsági szinten a kétféle technológia között, feltéve, hogy a méretre normális eloszlást feltételezhetünk?

14. Bizonyos anyaghibák számára nézve a következő adataink vannak:

0	1	2	3	4
327	340	160	53	20

Döntse el 0,99 biztonsággal, hogy tekinthető-e az anyaghibák száma Poisson-eloszlásúnak?

15. Egy városban, adott időpontban, 240 parkolóban végeztek felmérést. Az ott talált gépkocsik számára a következőt kapták:

Gépkocsik száma:	0–10	11–20	21–30	31–40	41–50	51–60	61–70
Parkolóhelyek száma:	11	22	46	85	43	20	13

Tekinthető-e a véletlenül kiválasztott parkolóhelyen parkoló járművek száma normális eloszlásúnak, 0,95 biztonsági szinten?

16. Vizsgálja meg a következő adatok alapján, hogy van-e kapcsolat a választott egyetemi szak és a jelentkezők neme között, 95%-os szignifikanciaszinten!

	történelem	művészettörténet	magyar
lány	20	18	30
fiú	28	8	21

XIV.2. Vegyes feladatok

17. Egy gyártási folyamatban a gyártmányok kb. 98%-a hibátlan. A minőség-ellenőrzés véletlen mintát vesz a végtermékből, és ha a megvizsgált mintának legalább 95%-a hibátlan, elfogadja a tételt. Legalább hány elemű véletlen mintát vegyenek, ha azt akarják, hogy legalább 0,995 valószínűséggel el tudják fogadni a tételt?

18. *a)* Körülbelül hányszor kell a rulettben pirosra tenni, hogy a pirosnak a forgatások alatt mért relatív gyakorisága kb. 0,9 valószínűséggel közelítse az elméleti valószínűséget, 0,01 pontossággal?

b) Az a gyanúnk, hogy a rulettkorong nem szabályos. 100 db egymást követő forgatás eredményeinek ismeretében milyen pontossággal tud következtetni a relatív gyakoriságból a piros valószínűségére, 0,9 biztonsággal?

19. Egy tanfolyamra 100 hallgató iratkozik be. Más elfoglaltságai miatt minden hallgató körülbelül csak 0,6 valószínűséggel megy el az egyes órákra. Feltételezzük, hogy egymástól függetlenül látogatják az órákat. Legalább hány fős tanterem kell ahhoz, hogy az órára érkező hallgatók 90%-os biztonsággal elférjenek a teremben?

20. Egy játékautomatán az előző játékoktól függetlenül, bizonyos, számunkra ismeretlen valószínűséggel lehet nyerni. 150-szer játszottam az automatán. Legalább milyen biztonsággal állíthatom ezután, hogy $\frac{1}{10}$ pontossággal ismerem a nyerés valószínűségét? Mennyi lenne a biztonság értéke, ha 1000 játék alapján akarnám a nyerés valószínűségét ugyanilyen pontossággal közelíteni?

21. *Az előző feladat folytatása.* 0,98 biztonsági szintet feltételezve, milyen pontossággal ismerem a nyerés valószínűségét?

22. Egy szállítmányból vett 250 elemű mintában 27 selejtet találtak. Adjon alsó és felső korlátokat 0,95 biztonsági szinten az egész szállítmányban várható selejtarányra, azaz becsülje a selejtarányt!

23. Kockázás közben az a gyanúnk támad, hogy a játékban használt kocka cinkelt, mert 100 dobásból 30-szor kapunk egyest. Vizsgálja, hogy gyanúnk mennyire megalapozott! A valószínűségszámítás fogalmai segítségével indokolja válaszát!

24. Legalább hány kísérletet kell végezni ahhoz, hogy az $f(x)=3x^2$ $(0 \le x \le 1)$ sűrűségfüggvényű valószínűségi változóra végzett kísérleti eredmények átlaga 0,95 valószínűséggel essen az eloszlás várható értékének 0,01 sugarú környezetébe?

25. Körülbelül mennyi az ε értéke, ha az $f(x)=2x$ $(0 \le x \le 1)$ sűrűségfüggvényű valószínűségi változóra végzett 250 kísérleti eredmény átlaga 0,8 valószínűséggel esik az eloszlás várható értékének ε sugarú környezetébe?

26. Egy valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = 2x$ $(0 \le x \le 1)$. Becsülje meg annak a valószínűségét, hogy 50 kísérleti eredmény átlaga

a) $\frac{1}{2}$ és $\frac{3}{4}$ közé esik!

b) az eloszlás várható értékének 0,1 sugarú környezetébe esik!

27. 27 mérést hajtanak végre egy sorozattermék hosszát illetően, és átlagnak 98 mm adódik. A pontos szórás 9 mm. Adjon becslést a termék hosszának várható értékére, 95%-os biztonsági szinten!

28. Egy bizonyos típusú kazetta gyári résmérete 98 μm kell hogy legyen, 9 μm szórással. 25 ilyen kazettánk van, és mivel gyakran elakadnak, lemérve őket azt találjuk, hogy átlagos résméretük csak 93 μm. Reklamálhatunk-e a gyártónál 95% biztonsági szinten azért, hogy nem tartják be a szabvány-előírást, feltéve, hogy a résméretet normális eloszlásúnak tekinthetjük és a szórást 9-nek vehetjük?

29. Két üzemből érkezik ugyanazon típusú termékre 50–50 minta. Az egyik ötvennél a súlyukra 1,51 kg átlagot mértek 0,5 kg szórással, a másik ötvennél 1,68 kg átlagot 0,35 kg szórással. Van-e különbség 0,95 biztonsági szinten a két üzemből érkező termékek súlyai között?

30. Sorozásnál a múlt században 100 főre 175-ös testmagasságátlagot, tavaly 180-as testmagasságátlagot mértek, mindkettőt 5 szórással. Lényeges-e az eltérés 90%-os szinten az akkori és a mostani magasságok között?

31. Importra csomagolt cukor zsákonként előírt súlya 50 kg. A szórás 10 dkg-nak vehető. 95%-os *u*-próbával ellenőrzik tízelemű mintán, hogy a valódi súly megfelel-e az előírásnak. Ha normális eloszlást feltételezünk a súlyra, és egy zsák valódi súlya 49,9 kg, átcsúszik-e a szállítmány az ellenőrzésen?

32. Az a feltevésünk, hogy egy adott trafik napi bevétele 8000 tallér. A trafikostól megtudunk annyit, hogy a tegnapi bevétel nagyságának a 8000-től való eltérése több mint háromszor nagyobb volt, mint a forgalom tényleges szórása. Kitartsunk-e ezután is feltevésünk mellett?

33. Egy *A* és egy *B* azonos típusú műszerrel mérjük le egy nagy szériából származó ugyanazon tíz elektronikus alkatrész valamely állandóját:

A műszernél:	7,2	8,5	7,4	3,2	8,9	6,7	9,4	4,6	7,7	6,9
B műszernél:	9,1	8,5	7,9	4,3	8,4	7,7	9,3	6,6	6,8	6,7

Alkalmas feltételezések mellett adjon legalább 95% szignifikanciaszinten becslést arra, hogy milyen – e két műszerre jellemző – átlagos mérési eltérésre számíthatunk a további méréseknél?

34. Egy kockát addig dobálunk, amíg először kapunk hatost vagy hármast, és felírjuk, hogy hányszor kellett dobnunk. 10 000 ilyen kísérletet elvégezve, azt találjuk, hogy a felírt számok átlaga 5,1. Szabályos kockával dobtunk-e?

35. Egy termékből 50 elemű mintát vettek. Átlagsúlynak 0,62 kg adódott, $s^* = 0{,}17$ tapasztalati szórással. Elfogadható-e 0,98 biztonsági szinten az, hogy a termék súlyának várható értéke 0,55 kg?

36. *A* és *B* típusú altatót próbálnak ki 8 személyen, és mérik az alvásidőnek a nyolc órától való eltérését. Utóbbira normális eloszlást és azonos szórást feltételezhetünk. A következő adatokat kapjuk:

A altató:	3	2,5	0,5	4	0,25	1	0,5	3
B altató:	1,5	−0,5	−1	1,5	−0,25	0	1	2

Van-e lényeges különbség 0,95%-os biztonsági szinten a két gyógyszer hatásossága között?

37. Egy biológiai kísérletnél csecsemők egy csoportjára és majmok egy csoportjára mértek meg egy bizonyos reakcióidőt:

csecsemők:	2,4	3,9	3,4	1,9	3,3	3,4	2,0	4,4	1,8	1,5	perc
majmok:	1,7	1,1	1,2	1,9	2,3	perc					

Talál-e 95%-os szignifikanciaszinten lényeges különbséget a csecsemők és majmok reakcióideje között, normális eloszlást és azonos szórást feltételezve?

38. Egy navigátor számára nem az a lényeges, hogy órája késik vagy siet, hanem az, hogy egyenletesen jár-e. A következő adatok két óra egy-egy napi késését mutatják:

A óra siet/sec/nap	54	63	49	50	62	54	58	57	60	61
B óra siet/sec/nap	116	108	116	122	112	118	123	114	111	117

Feltesszük, hogy a késés nagysága normális eloszlású valószínűségi változó. Mondhatjuk-e 95%-os szignifikanciaszinten, hogy az egyik óra megbízhatatlanabb, mint a másik?

39. Két folyadéktöltő automatára mérték meg a szórást. 100–100 palack valódi tartalmát ellenőrizve, a szórásnak 1,05, ill. 1,11 adódott. Különbözik-e lényegesen a két szórás 0,95 szinten?

40. 4871 személyre végeztek gyomorfekély-vizsgálatot, és a következő adatokat kapták:

Korcsoport	14–	20–	25–	35–	45–	55–	65–
Megvizsgáltak száma	199	300	1128	1375	1089	625	155
Fekélyesek	1	8	38	96	105	56	12

Cáfolja-e a vizsgálat 99% szignifikanciaszinten azt a hipotézist, hogy a megvizsgáltak közül minden korcsoportban azonos valószínűséggel fordulnak elő fekélyesek?

41. Egy üzem A, B és C terméktípusokat gyárt. A termékeket I., ill. II. osztályúnak minősítik. Valamely munkanapon 90 termék készült. Ebből 66 db I. osztályú, ezek közül 50 db A termék, 6 db B termék. A 90 termék közül összesen 20 db C termék van és 1 db II. osztályú B termék. A fenti adatok birtokában hozzon döntést 0,9 biztonsági szinten arról, hogy van-e kapcsolat a termékek típusa és a minőségek között!

42. Sorsoljon ki számítógép segítségével 52-szer öt lottószámot és vizsgálja, hogy az 1–90 számok relatív gyakoriságai az 52 alkalom során tekinthetők-e egyenletes eloszlásúnak 0,95 biztonsági szinten?

MEGOLDÁSOK

I. Klasszikus képlet

I.1. Gyakorlófeladatok

1. *a)* $\dfrac{2\cdot(5!)^2}{10!}$ a valószínűség. Ugyanis 10! megkülönböztethető elhelyezkedést veszünk alapul. A férfiak (illetve nők) minden második helyen ülnek, így egymáshoz képest $(5!)^2$-féleképpen ülhetnek. Továbbá nők (férfiak) is ülhetnek a férfiak (nők) helyein.

Másik megoldás: Gondolkodhatunk úgy is, hogy az egyik személyhez viszonyítunk. Hozzá képest 9!-féleképpen ülhetnek le a többiek, ez az összes esetek száma. A kedvező eseteket számolva, az azonos neműek 4!, a különböző neműek pedig 5!-féleképpen ülhetnek. Tehát a keresett valószínűség: $\dfrac{4!\cdot 5!}{9!}$.

b) Biztos esemény, tehát 1 valószínűségű.

c) Az összes esetek számát 2^5-nek vehetjük, hiszen a kérdés szempontjából a házaspárok tagjainak csak egymáshoz viszonyított elhelyezkedése a lényeges. A kedvező esetek száma így 2: a nő a férfi bal vagy jobb oldalán ül.

Tehát a kérdéses esemény valószínűsége $\dfrac{2}{2^5}=\dfrac{1}{2^4}=\dfrac{1}{16}$.

d) A valószínűség ugyanakkora, mint *a)*-ban.

2. A gondolatmenet helytelen, hiszen az „azonosat dobás" és a „különbözőket dobás" valószínűsége nem egyforma. Így a 15 összes eset nem egyformán valószínű, tehát a klasszikus képlet nem alkalmazható. Ugyanez igaz a megkülönböztethető kockák esetére is.

A helyes eredmény $\dfrac{1}{6}$.

3. Tekintsük csak a kéttényezős osztókat. Ezek között a számnak 6 olyan osztója van, amelyik négyzetszám és $\binom{6}{2}$ olyan osztója, amelyik nem négyzetszám.

Tehát a keresett valószínűség $\dfrac{6}{6+\binom{6}{2}}=\dfrac{6}{21}$.

4. Az összes esetek száma: $\binom{90}{5}$. A kedvező esetek száma: $\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}$. Hiszen, ha a szelvény kitöltésekor úgy gondolkodunk, hogy a kihúzandó számok már borítékolva vannak, akkor $\binom{5}{k}$-féleképpen érhetünk el pontosan k találatot, a többi tippelésünk a nem kihúzandó 85 számból való, és $\binom{85}{5-k}$-féleképpen történhet. Tehát a valószínűség: $\dfrac{\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}$.

5. Nem, hiszen egyes kedvező eseteket többször számolt. Például a pontosan hármas találatot a négyes és ötös találatoknál is számolta.

A helyes valószínűség a pontosan három, négy, ill. öt találat valószínűségeinek összege (lásd az előző feladatot).

6. $\dfrac{\binom{7}{2}\cdot 5^5}{6^8}$. Az összes esetek száma 6^8. Továbbá a nyolcadik dobás ötös, az előző két ötös dobásra $\binom{7}{2}$-féle lehetőség van, a többi öt dobás viszont akármi lehet, csak nem ötös, ezért $\binom{7}{2}\cdot 5^5$ a kedvező esetek száma.

7. $k > 365$-re a kérdezett valószínűség 1. Továbbá $k < 365$-re a komplementer esemény valószínűsége: $\dfrac{\binom{365}{k}k!}{365^k}$, ahol az emberek kiválasztásának sorrendjére is tekintettel vagyunk, $\binom{365}{k}$ pedig a lehetséges k különböző születésnapok száma. Így a kérdezett valószínűség: $1-\dfrac{\binom{365}{k}\cdot k!}{365^k}$.

8. Ha a pincér látatlanban teszi a rendeléseket a vendégek elé, 8! eset lehetséges. A kedvező eseteknél már csak az azonos rendeléseket permutálhatjuk egymás között, ezek száma $2!\cdot 4!\cdot 2!$. Így a keresett valószínűség: $\dfrac{2!\cdot 4!\cdot 2!}{8!}$.

9. Mindkét esetben a komplementer esemény valószínűségét számoljuk ki. Annak a valószínűsége, hogy nem dobunk egyest hat kockával: $\dfrac{5^6}{6^6}$. Annak a valószínűsége, hogy nem dobunk egyest vagy csak egy darab egyest dobunk 12 kockával: $\dfrac{5^{12}+12\cdot 5^{11}}{6^{12}}$. Utóbbi a nagyobb, ezért annak a valószínűsége a nagyobb, hogy 6 kockával legalább egy 1-est dobunk.

10. Elég 1 csapatot kisorsolni, ez $\binom{22}{11}$-féleképpen lehetséges, a másik csapatot a ki nem sorsolt játékosok alkotják. Egyrészt kedvező eset az, ha a két legjobb játékost együtt kisorsolják. Ekkor csak a többi 9 játékost kell kiválasztani 20 közül, ez $\binom{20}{9}$-féleképpen lehetséges. Másrészt kedvező, ha a két legjobb egyikét sem sorsolják ki: ez $\binom{20}{11}$-féleképpen lehetséges.

A keresett valószínűség tehát: $\dfrac{\binom{20}{9}+\binom{20}{11}}{\binom{22}{11}}$.

11. Feltételezzük tehát, hogy az asztalfiókban keresgélés „emlékezet nélküli". Az, hogy mely fiókokban keres a gépírónő papírt, 2^{70}-féle sorrendben fordulhat elő. Ha először a hetvenedik alkalommal pl. a bal fiókban nem talál géppapírt, ez azt jelenti, hogy 69 esetből 50-szer húzott a bal és 19-szer a jobb fiókból. Ez $\binom{69}{50}$-féle sorrendben fordulhatott elő. Hasonló érvényes akkor, hogyha hetvenedikre a jobb fiókban nem talál géppapírt. Így a keresett valószínűség: $\dfrac{2\cdot\binom{69}{50}}{2^{70}}$.

12. Ha n pénzdarabot dobunk fel, akkor annak valószínűsége, hogy nincs közöttük fej dobás: $\frac{1}{2^n}$. Így a komplementer eseményre az $1-\frac{1}{2^n}>0{,}9$ egyenlőtlenséget megoldva $n>\log_2 10$.

13. A komplementer esemény valószínűségét határozzuk meg. Az összes esetek száma 2^3-1, hiszen a fiú–lány születések összes számából, 2^3-ból kell levonni azt az egyet, amikor mindhárom gyermek fiú. A komplementer eseménynél a kedvező esetek száma 1. A valószínűség tehát $\frac{1}{2^3-1}$.

Így az eredeti valószínűség $1-\frac{1}{2^3-1}$.

14. Vegyük észre, hogy ha az 1, 2, …, 41 számokból kiválasztunk tetszőlegesen kettőt, akkor három olyan intervallumra osztjuk az első 41 számot, hogy az intervallumokban tartalmazott egész számok „darabszáma" éppen 39 (nem számítjuk a kiválasztott, osztópontnak használt számokat, valamint olyan elfajult intervallumot is megengedünk, amely 0 db számot tartalmaz). Generálhatjuk így a 39-nek minden szóba jöhető felbontását 3 szám összegére. Ilyen $\binom{41}{2}$ létezik. Ezek közül most csak egy kedvező, tehát a kérdezett valószínűség: $\frac{1}{\binom{41}{2}}$.

15. *a)* Az összes esetek száma $\binom{30}{12}$. Ahhoz, hogy a kiválasztottak között 7 lány legyen, a lányok közül 7-et kell választani, és ez $\binom{17}{7}$-féleképpen lehetséges, a fiúk közül pedig 5-öt, és ez $\binom{13}{5}$-féleképpen lehetséges. Tehát a keresett valószínűség: $\frac{\binom{17}{7}\cdot\binom{13}{5}}{\binom{30}{12}}$.

b) Legyen $X=k$, ekkor a kérdéses valószínűség csak a kedvező esetek $N(k)$ számától: $\binom{17}{k}\binom{13}{12-k}$-tól függ. Ennek maximumát pl. úgy kaphatjuk, hogy vizsgáljuk a $\frac{N(k+1)}{N(k)}$ hányadosokat, nagyobbak vagy kisebbek-e 1-nél. $\frac{N(k+1)}{N(k)}=\frac{(17-k)(12-k)}{(k+1)(k+2)}$. Ez $k\le 6$-ra nagyobb, $k\ge 7$-re kisebb 1-nél. Tehát 7 lány választása a legvalószínűbb.

16. Először határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a rögzített k szám a második legnagyobb (k = 4, 5, …, 89). Az összes lehetséges húzások száma: $\binom{90}{5}$. Ha a k a második legnagyobb, akkor nála kisebb 3 számot $\binom{k-1}{3}$-féleképpen, nála nagyobb számot $(90-k)$-féleképpen lehet húzni. A keresett valószínűség tehát $\frac{\binom{k-1}{3}(90-k)}{\binom{90}{5}}$. Csak a számláló függ k-tól, így annak maximumát kell keresni. Használva az előző feladat módszerét, $k=68$.

17. Az összes esetek száma mind a négy esetben 4^{10}-nek választható.

a) Ha az utasokat és a vagonokat is megkülönböztetjük, akkor egy „elhelyezkedés" a 4^{10} eset egyike, tehát valószínűsége $\frac{1}{4^{10}}$.

b) Ha az utasokat megkülönböztetjük, de a vagonokat nem, akkor csak azt figyelhetjük meg, hogy ki kivel van egy vagonban. Ha például az utasok csoportosulása 3-3-2-2 a vagonokban, akkor e csoportok között 4!-féleképpen permutálhatjuk a vagonokat. Ekkor a 3-3-2-2 elhelyezkedés valószínűsége $\frac{4!}{4^{10}}$.

c) Ha a vagonokat megkülönböztetjük, de az utasokat nem, akkor például egy „elhelyezkedés" az, hogy az I, II, III és IV vagonokban rendre 3-3-2-2 utas található. Összesen $\binom{10}{3}\binom{7}{3}\binom{4}{2}$ ilyen eset van a 4^{10}-ben. Így ennek valószí-

nűsége: $\dfrac{\binom{10}{3}\binom{7}{3}\binom{4}{2}}{4^{10}}$.

d) Ha sem a vagonokat, sem az utasokat nem különböztetjük meg, akkor a 3-3 utas bármelyik két vagonba elhelyezhető. Így az összes esetek száma: $\binom{4}{2}\binom{10}{3}\binom{7}{3}\binom{4}{2}$. A valószínűséget 4^{10}-nel osztással kapjuk.

A *d)* eset szerint az 1-2-3-4 elhelyezkedés valószínűsége $\dfrac{4!\binom{10}{4}\binom{6}{3}\binom{3}{2}}{4^{10}}$, amelyről belátható, hogy nagyobb, mint az egyenletesebb, 3-3-2-2 elhelyezkedés valószínűsége.

18. *a)* Az összes esetek száma 1000^{10}. Ezek közül a kedvezőtlen esetek száma 995^{10}, tehát a keresett valószínűség: $\dfrac{1000^{10}-995^{10}}{1000^{10}}=1-0{,}995^{10}$.

b) Az összes esetek száma $\binom{1000}{10}$. A kedvezőtlen esetek száma $\binom{995}{10}$, tehát a keresett valószínűség $\dfrac{\binom{1000}{10}-\binom{995}{10}}{\binom{1000}{10}}=1-\dfrac{\binom{995}{10}}{\binom{1000}{10}}$.

I.3. Vegyes feladatok

23. $\dfrac{\binom{29}{9}}{2^{29}}$.

24. *a)* $\dfrac{5}{8}$; *b)* $\dfrac{8}{9}$.

25. Csak $\dfrac{1}{30}$ annak a valószínűsége, hogy talál helyet.

26. Nem.

27. $\dfrac{10^{20}-9^{20}}{15^{20}}$.

28. $\dfrac{(90-k)\binom{k-1}{3}}{\binom{90}{5}}$ $(k=4, 5, \ldots, 89)$.

29. $\dfrac{\binom{960}{5}\binom{30}{5}}{\binom{990}{10}}$.

30. 25.

31. $\dfrac{6^7\cdot\binom{10}{3}}{7^{10}}$.

32. $\dfrac{1}{\binom{90}{5}}\sum_{k=3}^{49}\binom{k-1}{2}\binom{90-k}{2}$.

33. 5.

34. $\dfrac{8!}{\binom{64}{8}}$.

35. $\dfrac{2\cdot\binom{48}{26}}{\binom{52}{26}}$.

36. $\dfrac{\binom{90}{10}}{\binom{90}{5}^2}$.

37. $\dfrac{1}{2^{80}}\sum_{k=0}^{40}\binom{40}{k}2^{40-k}$.

38. $\frac{36}{9^3}$.

39. *a)* $\left(\frac{98}{99}\right)^{76}$; *b)* $\prod_{i=2}^{77}\frac{100-i}{99}$.

40. *a)* $\frac{\binom{85}{5}\binom{80}{5}}{n}$; *b)* $\frac{\binom{85}{5}\binom{80}{5}+5\cdot\binom{85}{4}\binom{81}{5}+\binom{85}{5}\cdot 5\binom{80}{4}+5\cdot 4\cdot\binom{85}{4}\binom{81}{4}}{n}$,

ahol $n=\binom{90}{5}\binom{85}{5}$.

41. $\frac{\binom{4}{2}(2^{10}-2)}{4^{10}}$.

42. $\frac{994}{999}$.

43. *a)* $\frac{1}{36}$; *b)* $\frac{6+6\cdot 5\cdot 2}{6^4}$.

II. A valószínűség és feltételes valószínűség általános tulajdonságai

II.1. Gyakorlófeladatok

1. *P*(*A*) *és P*(*B*), hiszen $P(A|B)=\frac{P(A)}{P(B)}P(B|A)$ (Induktív az olyan típusú következtetés, amikor felcserélve a premisszát és a konklúziót, az utóbbiból következtetünk a premisszára.)

2. $P(A|\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A\overline{B})}{P(A\overline{B})+P(\overline{A}\overline{B})}=\frac{P(A)P(\overline{B}|A)}{P(A)P(\overline{B}|A)+P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})}$

a Bayes-tétel szerint. De $P(\overline{B}|\overline{A})=1-P(B|\overline{A})$ a feltevés szerint közel nulla,

így $\frac{P(A)P(\overline{B}|A)}{P(A)P(\overline{B}|A)+P(\overline{A})(1-P(B|\overline{A})}$ közel 1.

(Az állítás az indirekt következtetés általánosítása, hiszen ha *A* ellenkezőjét feltéve *B* nagy valószínűséggel teljesül, akkor *B* be nem következése esetén nagy valószínűséggel következtethetünk *A* bekövetkezésére.)

3. $P(BA)=P(B|A)P(A)=1$. Mivel $BA\subseteq B$, ezért $P(BA)\le P(B)\le 1$ az additivitás következményeként. Ezért $P(BA)=1$ miatt $P(B)=1$.

A következtetés a *modus ponens* általánosítása. Modus ponens: $A\to B$ és A-ból következik B.

4. $P(A|A\cup B)=\frac{P(A(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(AB)}=$

$=\frac{0{,}6}{0{,}6+0{,}4-0{,}6\cdot 0{,}4}=\frac{15}{19}$.

5. $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)+P(B)-P(A\cup B)}{P(B)}\ge\frac{P(A)+P(B)-1}{P(B)}=0{,}625$.

6. *a)* $\overline{A}\overline{B}=\overline{A\cup B}$, így $P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\overline{A}\overline{B})$.

b) $A=A\overline{B}\cup AB$. Mivel a jobb oldali halmazok diszjunktak, így a valószínűség additivitása miatt: $P(A)=P(A\overline{B})+P(AB)$, amelyből átrendezéssel kapjuk a kívántat.

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ -ból és a feltételes valószínűség definíciójából következik.

7. *a)* Halmazfüggvény például: síkhalmazok területe, számossága, átmérője, súlypontja, síkhalmazokba esés valószínűsége (azokra a halmazokra értelmezve, amelyekre léteznek e jellemzők). Mindezek halmazfüggvények abban az értelemben, hogy egy alaphalmaz részhalmazaihoz rendelnek valamilyen értéket.

b) Pontfüggvény a síkon értelmezett tetszőleges $f(x, y)$ kétváltozós függvény, ahol a függvényérték lehet valós, vektor vagy komplex stb. f tehát az alaphalmaz elemeihez rendel értéket.

8. *a)* $\overline{H}\,\overline{M}\,\overline{B}\,C$;

b) $H\,M\,\overline{B}\,\overline{C}$;

c) $H \cup M \cup B \cup C$;

d) $H\,\overline{M}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{H}\,M\,\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{H}\,\overline{M}\,B\,\overline{C} \cup \overline{H}\,\overline{M}\,\overline{B}\,C$;

e) ha a *d)*-beli esemény A, akkor $A \cup \overline{H}\,\overline{M}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

f) $C(M \cup B \cup C)$.

9. *a)* Jelentsék rendre B_1, B_2, B_3 események azt, hogy az illető szúnyog túléli az első, második, harmadik permetezést. Ekkor a szorzástétel szerint:
$P(B_1B_2B_3) = P(B_1)P(B_2\,|B_1)P(B_3\,|B_1B_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}096$.

b) $P(B_2B_3\,|\,B_1) = P(B_2\,|\,B_1)\,P(B_3\,|\,B_1B_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$.
Másik megoldás:

$$P(B_2B_3\,|\,B_1) = \frac{P(B_1B_2B_3)}{P(B_1)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8}{0{,}2} = 0{,}48.$$

Nem alkalmazható a függetlenség.

10. *I. Megoldás:* Jelentse A_1, A_2, B_3 rendre azokat az eseményeket, hogy elsőre angol, másodiknak angol, harmadiknak bolgár érkezik. Ekkor általános szorzástételt alkalmazva:

$$P(A_1A_2B_3) = P(A_1)P(A_2\,|A_1)P(B_3\,|A_1A_2) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{18}.$$

II. Megoldás klasszikus képlettel: $\dfrac{5 \cdot 4 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8}$.

11. Három úton juthat el az A pontba. Balról jobbra tekintve ezen utakat, az A-ba jutás valószínűségei rendre, általános szorzástételt alkalmazva: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$ és $\frac{1}{4}$.

Az A-ba jutás valószínűsége ezek összege, tehát $\frac{11}{24}$.

12. Jelölje N azt az eseményt, hogy A nyer, és E azt az eseményt, hogy egyenlít. Ekkor $P(EN) = P(E)P(N|E)$ a szorzástétel szerint. Jelölje N^* azt az eseményt, hogy egyenlő állásból egyenlít. Teljes valószínűség tétel szerint érvényes a következő rekurzív formula, figyelembe véve a lehetséges játszmaalakulásokat:
$P(N^*) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot P(N^*) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot P(N^*)$. Innen $P(N^*) = P(N|E) = \frac{1}{5}$.

Tehát $P(EN) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$.

13. A független eseményekre vonatkozó szorzástételt és a valószínűség additivitását használva: $\binom{365}{3}(0{,}02)^3\,(0{,}98)^{362}$.

14. Jelölje PQ azt az eseményt, hogy a P és Q városok között van járható út. Ekkor:

$$P(AB\,|\,\overline{AC}) = \frac{P(AB \cdot \overline{BC})}{P(\overline{AC})} = \frac{P(AB \cdot \overline{BC})}{P(AB \cdot \overline{BC}) + P(\overline{AB} \cdot BC) + P(\overline{AB} \cdot \overline{BC})}.$$

Ez a valószínűség a függetlenség miatt

$$\frac{P(AB)P(\overline{BC})}{P(AB)P(\overline{BC}) + P(\overline{AB})P(BC) + P(\overline{AB})P(\overline{BC})}.$$

Annak valószínűsége, hogy szomszédos városok között van járható út, p^2, a független események szorzástétele miatt. Így a kérdezett valószínűség:
$$\frac{(1-p^2) \cdot p^2}{(1-p^2) \cdot p^2 + p^2 \cdot (1-p^2) + p^4} = \frac{1-p^2}{2-p^2}.$$

15. Jelölje p annak valószínűségét, hogy valakinek egy szelvénnyel legalább hármas találata van. Az első fejezetben ezt a valószínűséget már kiszámoltuk. Annak valószínűsége, hogy van n hét alatt legalább egy hármas találata, komplementer eseménye annak, hogy n hét alatt sem akadt egy legalább hármas találata. Utóbbi esemény valószínűsége $(1-p)^n$, alkalmazva a független események szorzástételét. A komplementer esemény valószínűsége tehát: $1-(1-p)^n$, így $0,5>(1-p)^n$, Tehát $\frac{\lg 0,5}{\lg(1-p)}<n$.

16. Például azon speciális esetnek a valószínűsége, amikor az első 5 lövés a 10-es, a következő három a 20-as, a következő négy a 30-as, az utolsó három az 50-es: $\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^3$, a független eseményekre vonatkozó szorzástételt alkalmazva. De a bekövetkezések sorrendje permutálható, ezen esetek kizáróak, így a valószínűség additivitását használva a keresett valószínűség: $\frac{10!}{5!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 3!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^8\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^7$.

17. Tegyük fel, hogy az n-edik alkalommal dobunk először 6-ost. Annak valószínűsége, hogy addig csak egyszer, a k-adik alkalommal dobunk 1-est: $\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^{n-2}$, a független eseményekre vonatkozó szorzástétel miatt. Annak valószínűsége, hogy az n-edik alkalommal dobunk először 6-ost és addig csupán egy 1-est dobunk: $(n-1)\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{4}{6}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{6}$, a valószínűség additivitását felhasználva. A keresett valószínűség tehát:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{4}{6}\right)^{n-2}=\frac{3}{6^2}\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}=\frac{3^2}{6^2}=\frac{1}{4}.$$

18. Az első hét dobás között pontosan két ötös dobásnak kell előfordulni. Utóbbi tulajdonságú dobássorozat valószínűsége $\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^5$. Összesen $\binom{7}{2}$ ilyen dobássorozat van. Figyelembe véve azt, hogy a nyolcadik dobás is ötös, a keresett valószínűség: $\binom{7}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^5\frac{1}{6}$.

19. Jelentsék A_1, A_2, ill. A_3 rendre azokat az eseményeket, hogy az első, második, ill. harmadik céllövő volt az, aki nem talált, de a másik kettő igen, és B jelentse azt, hogy két találatot ért el összesen a három céllövő.

Ekkor: $P(A_3\,|B)=\frac{P(A_3B)}{P(B)}=\frac{P(A_3)}{P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)}$.

A függetlenséget alkalmazva:

$P(A_1)=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{10}$, $P(A_2)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$, $P(A_3)=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$.

Így $P(A_3\mid B)=\frac{6}{13}$.

20. Egy feltételes valószínűség a kérdés. Klasszikus képlettel számolhatunk, nem szükséges a feltételes valószínűség definícióját használni, mert úgy is modellezhetünk, hogy a feltételt az összes esetek számánál vesszük figyelembe. Így a megoldás ugyanaz lehet, mint az I. **1.** *a)* feladatnál: $\frac{2}{2^5}=\frac{1}{2^4}$.

21. Nem, ugyanis a $\frac{2}{3}$ valószínűség azon a tapasztalaton nyugszik, amikor csak az illető általános szokásait vesszük figyelembe. De a konkrét esetben már azt is tudjuk, hogy négy kocsmában nem található (ez pl. valószínűsítheti azt, hogy nincs kocsmában). Így a $\frac{2}{3}$ valószínűség már nem érvényes, feltételes valószínűség alkalmazására van szükség. A helyes megoldásra nézve lásd a **31.** feladat megoldását.

22. Az *a)* és *b)* események bekövetkezése melletti valószínűségek megegyeznek, hiszen a lottóhúzásnál a számok húzásának sorrendje nem játszik szerepet. Az öt találat valószínűsége az *a)* és *b)* feltétel szerint: $\frac{1}{\binom{89}{4}}$. A *c)* feltétel melletti valószínűség: $\frac{1}{\binom{39}{2}\binom{90-40}{2}}$. Ez nagyobb az előzőnél.

23. Jelentsék S, ill. E rendre azokat az eseményeket, hogy szél lesz, ill. eső lesz.

a) $P(E|S)=\frac{P(E)}{P(S)}P(S|E)=\frac{0,5}{0,7}\cdot 0,3=\frac{3}{14}$.

b) $P(SE) = P(E)P(S\,|\,E) = 0{,}5 \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{20}$.

24. Jelentse F, ill. K rendre azokat az eseményeket, hogy barátnőnk randevú előtt fodrászhoz megy, ill. hogy elkésik a randevúról. Tudjuk, hogy $P(K|F) = 0{,}9$ és $P(K) = 10 \cdot P(F)$.

Ezért: $P(F\,|\,K) = \frac{P(F)}{P(K)} P(K\,|\,F) = 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}09$.

25. Jelentsék E, ill. F rendre azokat az eseményeket, hogy esik, ill. focizunk. Ekkor: $P(F\,|\,\overline{E}) = \frac{P(F)}{P(\overline{E})} P(\overline{E}\,|\,F) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{5}} \cdot 0{,}9 = \frac{3}{8}$.

26. Jelentsék D, L, ill. K rendre azokat az eseményeket, hogy a vizsgázó D szakos, lány, ill. kollégista. Jelentse V azt, hogy elsőre átment a valószínűségszámítás-vizsgán.

a) Nem. Akkor lenne például meghatározható, hogy ha D, L, ill. K teljes eseményrendszert alkotnának.

b) Igen, hiszen $P(VL) = P(L)P(V\mid L)$.

c) Nem. $P(L\,|\,V) = \frac{P(L)}{P(V)} P(V\,|\,L)$-ből $P(V)$ nem ismert.

27. Jelölje A_0, ill. A_1 rendre azokat az eseményeket, hogy 0-t, ill. 1-t adtak le. E_0, ill. E_1 pedig azokat az eseményeket, hogy 0, ill. 1 érkezik.

a) $$P(A_0\,|\,E_0) = \frac{P(A_0)P(E_0\,|\,A_0)}{P(A_0)P(E_0\,|\,A_0) + P(A_1)P(E_0\,|\,A_1)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}} = \frac{15}{23},$$

ahol Bayes-tételt alkalmaztunk az A_0, A_1 teljes eseményrendszerre nézve.

b) Teljes valószínűség tételt alkalmazva

$$P(E_1) = P(A_0)P(E_1\,|\,A_0) + P(A_1)P(E_1\,|\,A_1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} = \frac{37}{60}.$$

28. Jelöljék J, R, ill. T rendre azokat az eseményeket, hogy a vizsgázó jól tudja, rosszul tudja a választ, illetve, hogy találgat és jelölje H azt, hogy helyesen válaszolt. Ekkor az egyetlen kérdésre adott helyes válasz valószínűsége – a teljes valószínűség tétel szerint:

$$P(H) = P(J)P(H\,|\,J) + P(R)P(H\,|\,R) + P(T)P(H\,|\,T) =$$
$$= \frac{4}{7}\cdot 1 + \frac{2}{7}\cdot 0 + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{14}.$$

a) A független eseményekre vonatkozó szorzásszabályt és a valószínűség additivitását használva azon eseményekre, hogy pontosan hány kérdésre válaszolt jól a vizsgázó:

$$\sum_{k=14}^{20} \binom{20}{k} \left(\frac{9}{14}\right)^k \left(\frac{5}{14}\right)^{20-k}.$$

b) Bayes-tétel szerint: $P(J\,|\,H) = \frac{P(J)}{P(H)} P(H\,|\,J) = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{9}{14}} = \frac{8}{9}$.

29. Jelöljék I, ill. H rendre azokat az eseményeket, hogy az igazak, ill. a hazugok városában vagyunk, valamint B azt, hogy azt a választ kapjuk, hogy a hazugok városában vagyunk. Ekkor Bayes-tételt alkalmazva:

$$P(I\,|\,B) = \frac{P(I)P(B\,|\,I)}{P(I)P(B\,|\,I) + P(H)P(B\,|\,H)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{100}} = \frac{2}{5}.$$

30. Jelentse H_k azt az eseményt, hogy a postahivatalba egy nap k hibásan címzett levél érkezik ($k = 0, 1, 2, \ldots$), B pedig azt, hogy egy nap 25 hibásan címzett levelet nem tudnak továbbítani. Bayes-tételt alkalmazva:

$P(H_{60}\,|\,B) = \frac{P(H_{60})}{P(B)} P(B\,|\,H_{60})$. Egyrészt $P(B\,|\,H_{60}) = \binom{60}{25}\left(\frac{1}{3}\right)^{25}\left(\frac{2}{3}\right)^{35}$ a független eseményekre vonatkozó szorzásszabály és a valószínűség additivitása miatt. Másrészt $P(B) = \sum_{k=25}^{\infty} P(H_k)P(B\,|\,H_k)$ a teljes valószínűség tétel miatt. Itt $P(B\,|\,H_k)$ kiszámítása $P(B\mid H_{60})$ kiszámításához hasonlóan történhet. Így

$$P(H_{60}\,|\,B)=\frac{\dfrac{\lambda^{60}}{60!}e^{-\lambda}\dbinom{60}{25}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{25}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{35}}{\displaystyle\sum_{k=25}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda}\binom{60}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{60-k}}.$$

31. Jelölje K_5 azt az eseményt, hogy az illető az ötödik kocsmában van, K azt, hogy kocsmában van, B pedig azt, hogy nincs az adott négy kocsmában. Ekkor

$$P(K_5\,|\,B)=\frac{P(K_5)}{P(B)}=\frac{P(K)P(K_5\,|\,K)}{P(K)P(B\,|\,K)+P(\overline{K})P(B\,|\,\overline{K})}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot 1}=\frac{2}{7},$$

hiszen $P(B\mid K_5)=1$ és $K_5=K\,K_5$.

32. *a)* Teljes valószínűség tételt alkalmazhatunk aszerint, hogy a malac pontosan hány magot evett meg. Jelöljék rendre A_k, ill. B azokat az eseményeket, hogy a malac k magot evett meg, ill. az általunk kiválasztott cseresznyében van mag. Ekkor:

$$P(B)=\sum_{k=0}^{5}P(A_k)P(B\,|\,A_k)=\sum_{k=0}^{5}\frac{\binom{5}{k}\binom{15}{5-k}}{\binom{20}{5}}\cdot\frac{5-k}{15}.$$

b) Jelölje A azt az eseményt, hogy a malac legalább egy magot megevett. Ekkor Bayes-tételt alkalmazva:

$$P(\overline{A}\,|\,B)=\frac{P(\overline{A})}{P(B)}P(B\,|\,\overline{A})=\frac{\binom{15}{5}}{\binom{20}{5}p}\cdot\frac{5}{15},$$ ahol p az *a)*-beli valószínűség.

A kérdezett valószínűség: $1-P(\overline{A}\,|\,B)$.

II.3. Vegyes feladatok

42. $\dfrac{35}{44}$.

43. Írjuk át a feltételes valószínűség definícióját használva mindkét oldalt, és szorozzuk be $P(C)$-vel. Ezt kapjuk: $P(AC)=\sum_j P(A_jC)\dfrac{P(AA_jC)}{P(A_jC)}$. Felhasználva, hogy $AC=\bigcup_j ACA_j$, kapjuk a bizonyítandó állítást.

44. $P(A\,|\,B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)+P(B)-P(A\cup B)}{P(B)}=\dfrac{1{,}7-P(A\cup B)}{P(B)}$.

De $0{,}9\le P(A\cup B)\le 1$, így $\dfrac{7}{9}\le P(A\,|\,B)\le\dfrac{8}{9}$ valóban.

45. Felhasználjuk, hogy $A\circ C\subseteq(A\circ B)\cup(B\circ C)$. Ebből következik, hogy $P(A\circ C)\le P(A\circ B)+P(B\circ C)$.

46. *a)* Nem; *b)* igen; *c)* nem; *d)* igen.
Van különbség.

47. *a)* Lépésenként alkalmazzuk a $P(AB)\ge P(A)+P(B)-1$ egyenlőtlenséget.
Jelölje S, F, K, L rendre a szem, fül, kar, illetve láb elveszítését.
$P(SF)\ge P(S)+P(F)-1\ge 0{,}44$.
Jelölje C_1 SF-t. $P(C_1K)\ge P(C_1)+P(K)-1\ge 0{,}24$.
Jelölje C_2 C_1K-t. $P(C_2L)\ge P(C_2)+P(L)-1\ge 0{,}09$.

b) $P(F\,|\,K)=\dfrac{P(FK)}{P(K)}\ge\dfrac{P(F)+P(K)-1}{P(K)}=0{,}675$.

48. Egy A urnába x fehér és y fekete golyót teszünk, egy B urnába pedig z fehér és $x+y-z$ fekete golyót. Az egyenlet jobb oldala annak valószínűségét adja, hogy n-szer visszatevéssel húzva a B urnából, n-szer fehér golyót húzunk, a bal oldal pedig annak valószínűségét, hogy n-szer visszatevéssel húzva az A urnából vagy n fehér, vagy n fekete golyót húzunk. Az egyenlet a két valószínűség egyenlőségét állítja.

49. Jelölje U, ill. R, hogy üveg- vagy porcelántányérról van-e szó, és T azt, hogy eltört egy tányér. $P(T\mid U)=0{,}05$, $P(T\mid R)=0{,}02$, $P(T)=0{,}04$.

$P(T|U)=\dfrac{P(TU)}{P(U)}=0{,}05$-ből $P(TU)=0{,}05\cdot P(U)$.

Hasonlóan: $P(TR)=0{,}02P(R)$.

Mivel $P(TR)+P(TU)=P(T)$, így $0{,}05P(U)+0{,}02\,P(R)=0{,}05P(U)+$ $+\,0{,}02(1-P(U))=0{,}04$.

Innen $P(U)=\dfrac{2}{3}$.

50. $3\cdot\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{7}{8}$.

51. Nem tud eljutni a sajthoz, hogyha mindhárom folyosó zárva van. P (a folyosó zárva van) $=1-P$ (a folyosó nyitva van) $=1-p^3$. A függetlenség miatt annak valószínűsége, hogy mindhárom folyosó zárva van, $(1-p^3)^3$. Tehát a kérdezett valószínűség: $1-(1-p^3)^3$.

52. *a)* Igen; *b)* nem.

53. *a)* 0,42; *b)* 0,88; *c)* 0,46; *d)* 0,12.

54. *a)* $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$; *b)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}^2\frac{1}{2^8}=\frac{35}{128}$.

55. Jelölje A_k azt az eseményt, hogy a k-adik dobásnál dobunk először ötöst, B pedig azt, hogy ezalatt nem dobunk hatost. Az A_k-k kizáró események, és így

$$P(B)=P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}BA_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P(BA_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}=\frac{1}{6}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{j}=\frac{1}{2}.$$

56. $\dfrac{1}{3}$.

57. Jelölje p_n a keresett valószínűséget, $n=2,3,\ldots, p_2=\dfrac{1}{2}$. Felhasználva, hogy $p_n=\dfrac{1}{2}(1-p_{n-1})$, kapjuk, hogy $p_n=\dfrac{1}{3}\left(1+(-1)^n\cdot 0{,}5^{n-1}\right)$, ami tart $\dfrac{1}{3}$-hoz, ha $n\to\infty$.

58. *a)* Annak valószínűsége, hogy n „lépés" után *nem* ér a D pontba, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Ez a valószínűség 0-hoz tart, tehát 1 valószínűséggel érinti valamikor a D pontot.

b) Jelölje rendre p_A, p_B, ill. p_C annak valószínűségét, hogy az A, B, ill. C pontokból érkezik D-be. Nyilván $p_B=p_C(=p)$.

p_A kiszámítására írjuk fel a teljes valószínűség tételt azon eseményrendszer szerint, hogy merre indul el a hernyó az A csúcsból (a D, a B vagy a C csúcs felé). Jelölje F azt az eseményt, hogy a hernyó az A csúcsból érkezik D-be. Ekkor $p_A=\dfrac{1}{3}\cdot 1+\dfrac{1}{3}P(F|B)+\dfrac{1}{3}P(F|C)$. Szimmetria miatt annak valószínűsége, hogy a B csúcsból A-n keresztül jut D-be, ugyanannyi, mint azé, hogy az A csúcsból B-n keresztül jut D-be. Ezért

$P(F|B)=p_B$ és $P(F|C)=p_C$, tehát $p_A=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}p_B+\dfrac{1}{3}p_C=\dfrac{1}{3}(1+2p)$.

Használva, hogy $p_A+p_B+p_C=1$, azaz $p_A+2p=1$, $p_A=\dfrac{1}{2}, p_B=p_C=\dfrac{1}{4}$.

59. *a)* $p_1=\dfrac{4\cdot 85+1}{\binom{90}{5}}$; *b)* $p_2=\dfrac{5\cdot 85+1}{\binom{90}{5}}$;

c) $p_3=\dfrac{4\cdot 85+1}{\binom{90}{5}\cdot\frac{5}{90}}$; így $p_1<p_2<p_3$.

60. $\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

61. 0,4.

62. *a)* $\dfrac{1}{6}$; *b)* $\dfrac{1}{6}$.

63. Az első három poént tekintve, a következő I–VIII esetek lehetségesek, ezek valószínűségeit rendre kiszámolhatjuk a feltételek szerint:

$P(BBB)=\dfrac{2}{24}$; $P(BBA)=\dfrac{2}{24}$;

$P(BAB)=\dfrac{1}{24}$; $P(BAA)=\dfrac{3}{24}$; $P(ABB)=\dfrac{2}{24}$;

$P(ABA)=\dfrac{2}{24}$; $P(AAB)=\dfrac{3}{24}$; $P(AAA)=\dfrac{9}{24}$.

a) $P(\mathrm{I} \cup \mathrm{III} \cup \mathrm{VI} \cup \mathrm{VIII}) = \dfrac{7}{12}$;

b) $$P(\mathrm{VI} \cup \mathrm{VIII} \mid \mathrm{V} \cup \mathrm{VI} \cup \mathrm{VII} \cup \mathrm{VIII}) = \frac{\frac{2}{24}+\frac{9}{24}}{\frac{2}{24}+\frac{2}{24}+\frac{3}{24}+\frac{9}{24}} = \frac{11}{16};$$

c) a *b)*-hez hasonlóan $P(\mathrm{VI} \cup \mathrm{VIII} \mid \mathrm{II} \cup \mathrm{IV} \cup \mathrm{VI} \cup \mathrm{VIII}) = \dfrac{11}{16}$.

64. Jelentse H azt, hogy helyes eredményt kapott, R_1, ill. R_2 pedig azt, hogy az első, ill. második lépésnél rontott. Ekkor

$$P(H) = P(\overline{R}_1)P(H \mid \overline{R}_1) + P(R_1)P(H \mid R_1) = \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{3}{4}\cdot 0{,}3 = \frac{19}{40}.$$

$$P(\overline{R}_1 \mid H) = \frac{P(\overline{R}_1 H)}{P(H)} = \frac{P(\overline{R}_1)}{P(H)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{19}{40}} = \frac{10}{19}.$$

65. *a)* $\dfrac{4}{5}$; *b)* 0,28.

66. Pl. $P(A \text{ szakos}) = \dfrac{20}{31}$.

67. Jelentse A, B, ill. C azt, hogy a tárgyból A, B, ill. C vizsgáztat, E pedig azt, hogy egy hallgató elégtelent kap. Ekkor

$$P(A \mid E) = \frac{P(A)P(E \mid A)}{P(E)} \quad \text{és} \quad P(B \mid E) = \frac{P(B)P(E \mid B)}{P(E)} \text{-ből}$$

$$\frac{P(A \mid E)}{P(B \mid E)} = \frac{P(A)P(E \mid A)}{P(B)P(E \mid B)} = 5\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{3}.$$

68. Jelölje E azt, hogy Jancsika egyest kap, F pedig azt, hogy felkészült.

$P(F \mid E) > P(\overline{F} \mid E)$ pontosan akkor teljesül, ha $P(F \mid E) > \dfrac{1}{2}$:

$$P(F \mid E) = \frac{P(F)P(E \mid F)}{P(F)P(E \mid F) + P(\overline{F})P(E \mid \overline{F})} = \frac{p\cdot 0{,}35}{p\cdot 0{,}35 + (1-p)(1-0{,}15)} > \frac{1}{2}.$$

Ebből $p > 0{,}7083$, tehát $1 > p > 0{,}7083$ esetén valószínűbb a tanító tévedése, mint Jancsika készületlensége.

69. Jelölje B a bukást és A azt, hogy A vizsgáztat:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(A)P(B \mid A) + P(\overline{A})P(B \mid \overline{A})} \le \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}} = \frac{1}{4}.$$

70. $\displaystyle\sum_{k=3}^{5}\binom{5}{k}(0{,}6)^k(0{,}4)^{5-k} \approx 0{,}683$.

71. *a)* $\dfrac{34}{49}$; *b)* $\dfrac{130}{238}$.

72. Az egyik urnába egyetlen fehér golyót tegyen, az összes többit a másik urnába.

73. Jelentse A azt, hogy mindketten ugyanazt állítják, I_1 és I_2 pedig rendre azt, hogy az első, ill. a második igazat mond. Vizsgáljuk meg a $P(I_1I_2)$ és $P(I_1I_2 \mid A)$ valószínűségek kapcsolatát! $P(I_1I_2) = (1-p)^2$ a függetlenség miatt.

$$P(I_1I_2 \mid A) = \frac{P(I_1I_2A)}{P(A)} = \frac{P(I_1I_2)}{P(I_1I_2) + P(\overline{I}_1\overline{I}_2)} = \frac{(1-p)^2}{(1-p)^2+p^2}.$$

Látható, hogy $P(I_1I_2 \mid A) > P(I_1I_2)$ minden $0 < p < 1$-et kielégítő p-re teljesül.

74. 98,33%-a.

75. $\dfrac{1}{5}$.

76. Jelentse A_i azt, hogy a legszebb nő i-ediknek vonul, és T jelentse azt, hogy Szindbád kiválasztja őt. Ekkor

$$P(T) = \sum_{i=1}^{N} P(A_i)P(T \mid A_i) = \sum_{i=M+1}^{N} \frac{1}{N} P(T \mid A_i).$$

Vegyük észre: az, hogy Szindbád kiválasztja-e A_i bekövetkezése esetén a legszebbet, azon múlik, hogy az első $i-1$ nő közötti legszebb az első M között, vagy az $M+1, M+2, \ldots, i-1$-edik nő között van, ahol $i \ge M+1$. Utóbbi esetben őt választja Szindbád, az első esetben pedig T következik be. Ezért $P(T \mid A_i) = \dfrac{M}{i-1}$, és ezzel az állítást igazoltuk.

77. Nem.

78. Alkalmazzunk Bayes-tételt aszerint, hogy melyik rab – A, B és C – menekül meg. Tegyük fel, hogy A a kérdező rab, és azt, hogy a börtönőr pl. a C rabra mutat rá. Utóbbi legyen a D esemény. Ekkor

$$P(A \mid D) = \frac{P(D \mid A)P(A)}{P(D \mid A)P(A) + P(D \mid B)P(B) + P(D \mid C)P(C)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.$$

Tehát az A rab menekülésének esélye nem változik.

79. Érdemes, mert nyerési esélye $\frac{1}{3}$-ról $\frac{2}{3}$-ra nő.

80. 0,913.

81. 32/47.

82. *a)* 0,9; *b)* 0,1.

83. A $\frac{2}{3}$ a piros golyó húzásának egy feltételes valószínűsége. Ebből viszont nem következik, hogy két piros és egy fehér golyó van az urnában.

II.4. Ellenőrző kérdések

84. *a)* Igen; *b)* igen; *c)* igen; *d)* nem.

85. *a)* Nem; *b)* igen.

86. *a)* Halmazfüggvény; *b)* halmazfüggvény; *c)* pontfüggvény; *d)* pontfüggvény.

87. *a)* Nem; *b)* igen; *c)* nem; *d)* igen.

88. Nem.

89. *a)* Nem; *b)* nem.

90. Nem.

91. Igen.

92. Attól függ, hogy hogyan modellezzük matematikailag az adott kísérletet.

93. *a)* Igen; *b)* nem.

94. Nem.

95. A kísérleti körülmények csak „közel” változatlanok.

96. Igen.

97. $P(R \cup P \cup C) > 1$ következne.

98. Nem.

99. Nem.

100. Nem.

III. Valószínűségi változók eloszlása (eloszlások R^1-en)

III.1. Gyakorlófeladatok

1. A feltétel szerint $pq + pq^2 + \ldots = c(p + pq^2 + pq^4 + \ldots)$, tehát $q = c$. Mivel $0 < q < 1$, így $0 < c < 1$.

2. Ha az állítás igaz lenne, akkor $P(X = k \mid X \le m) = \dfrac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{P(X \le m)} = \binom{m}{k} p^k q^{m-k}$

$(k = 0, 1, 2, \ldots, m)$ teljesülne. Ebből $\dfrac{(m-k)!\; n!}{(n-k)!\; m!} p^{n-m} = P(X \le m) =$ konstans

következne (k-tól függetlenül), ami ellentmondás.

3. *a)* $P(X = n+k \mid X > n) = \dfrac{P(X = n+k)}{P(X > n)} = \dfrac{p \cdot q^{n+k-1}}{\sum_{i=n+1}^{\infty} p \cdot q^{i-1}} = \dfrac{p \cdot q^{n+k-1}}{p \cdot q^n \dfrac{1}{1-q}} =$

$= p \cdot q^{k-1} = P(X = k)$, mint azt igazolni kellett.

b) $P(X > n + k \mid X > n) = P(X > k)$-t kell igazolni. De a bal oldal $\sum_{i=k+1}^{\infty} P(X = n+i \mid X > n)$, a jobb oldal: $\sum_{i=k+1}^{\infty} P(X = i)$. Felhasználva az *a)*-beli állítást tagonként, megkapjuk a kívánt állítást.

4. A c normáló tényező meghatározása: tudjuk, hogy

$1 = \sum_{n=0}^{\infty} pq^n = \sum_{m=0}^{\infty} pq^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} pq^{2m+1} = (1+q)\sum_{m=0}^{\infty} pq^{2m}$. Tehát $c = 1 + q = 2 - p$.

Így az eloszlás értéke a $2m+1$ helyen cpq^{2m} $(m = 0, 1, 2, \ldots)$.

5. *a)* $P[0, 1] = \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot 0{,}5\, e^{-0{,}5x} dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = 0{,}5(1 - e^{-0{,}5}) + \frac{1}{6}$.

$P(0, 1) = \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot 0{,}5\, e^{-0{,}5x} dx = 0{,}5(1 - e^{-0{,}5})$.

$P\left[\frac{1}{2}, 3\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{3} \frac{1}{2} \cdot 0{,}5\, e^{-0{,}5x} dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 0{,}5(e^{-0{,}25} - e^{-1{,}5}) + \frac{5}{18}$.

b) $$F(x) = \begin{cases} \int_0^x 0{,}25\, e^{-0{,}5x} dx, & \text{ha } x \in (0, 1], \\ \int_0^x 0{,}25 e^{-0{,}5x} dx + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{[x]} pq^{k-1}, & \text{ha } x > 1 \text{ és } x \text{ nem egész}, \\ \int_0^x 0{,}25 e^{-0{,}5x} dx + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{[x]-1} pq^{k-1}, & \text{ha } x \ge 2 \text{ egész}. \end{cases}$$

c) Igen, az $x \ge 1$ egész esetben $F(x) = \int_0^x 0{,}25\, e^{-0{,}5x} dx + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{[x]} pq^{k-1}$ lenne.

6. Táblázathasználattal:

a) Mivel $\Phi(0{,}03) \approx 0{,}512$, így $P(|X| < 0{,}03) \approx 2 \cdot 0{,}512 - 1 = 0{,}024$.

b) $\Phi(0{,}03) = 0{,}512$.

c) 6,1-nél Φ közelítőleg 1.

d) $P(X < y) = \Phi(y) = 1 - \Phi(-y) = 0{,}1425$.

Innen $\Phi(-y) = 0{,}8575$, $-y \approx 1{,}07$, tehát $y \approx -1{,}07$.

7. Ha $F(x)$ az eloszlás eloszlásfüggvénye, akkor a feltétel: $f(x) = -xF(x)$. $F'(x) = f(x)$-et használva, az $F'(x) = -xF(x)$ differenciálegyenletet kapjuk. Az $y' = -x \cdot y$ szeparálható (egzakt) egyenlet megoldása $y = ce^{\frac{-x^2}{2}}$.

Figyelembe véve, hogy a megoldás eloszlásfüggvény és $(-\infty, -1)$-re koncentrálódik, $F(-1) = 1$, azaz $ce^{-\frac{1}{2}} = 1$. Innen $c = \sqrt{e}$.

Tehát $f(x) = -\sqrt{e}\, x\, e^{\frac{-x^2}{2}}$ $(x < -1)$.

8. *a)* Nem, mivel $\int_1^{\infty} c \cdot \frac{1}{x} dx$ minden pozitív valós c-re divergens.

b) Igen, mert $c = 1$-re $\int_1^{\infty} c \cdot \frac{1}{x^2} dx = 1$.

9. *a)* Nem eloszlásfüggvény, mert $F(1) \ne 1$.

b), c) és *d)* folytonos eloszlások eloszlásfüggvényei, mert teljesítik az eloszlásfüggvényeket karakterizáló három tulajdonságot.

e) Nem eloszlásfüggvény, mert az egész helyeken nem balról folytonos.

f) Eloszlásfüggvény és kevert eloszlás tartozik hozzá, mert 1-ben ugrása van.
g) Lásd *e)*.

10. *a)* Sűrűségfüggvény, mivel nemnegatív és $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 1$.

b) Integrálja nem 1, így nem sűrűségfüggvény.

c) Sűrűségfüggvény, hiszen $\int_0^1 \ln\frac{1}{x}\,dx = 1$ ($u = \frac{1}{x}$ helyettesítéssel igazolható) és $\ln\frac{1}{x} > 0$ (0, 1)-ben.

d) $c = \frac{1}{9}$ -re sűrűségfüggvény.

e) Nem sűrűségfüggvény, mert bár

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\, dx = 1, \quad \text{de } \sin x < 0, \quad \text{ha } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right).$$

11. *a)* Kevert eloszlás. Ha a rulettkorong kerületét egységnyi hosszúságúnak tekintjük, továbbá feltételezzük, hogy a nap 24 órájából a korong t óráig forog, egyébként álló helyzetben van, akkor a $\frac{k}{36}$ helyekre ($k = 0, 1, 2, \ldots, 36$) $\frac{24-t}{37}$ valószínűségérték koncentrálódik, a (0, 1) intervallum fennmaradó részén pedig az $f(t) = \frac{t}{24}$ sűrűségfüggvény érvényes.

b) Kevert eloszlás; a 0 helyen pozitív valószínűség található.
c) Geometriai eloszlás.
d) Nem „nevezetes” eloszlás.
e) Exponenciális eloszlás.
f) Készültek erre az eloszlásra különböző modellek, de e fejezetben nem szerepel a „nevezetes” eloszlások között.
g) Kevert eloszlás; 0-ban pozitív valószínűség található, valamint a sűrűségfüggvény a minimálkeresetből indul.
h) Diszkrét, nem „nevezetes” eloszlás.
i) Közelítőleg binomiális eloszlás.
j) Kevert eloszlás; a 0 és 100 helyeken pozitív valószínűség található.

k) A „kihordási időket” normális eloszlásúaknak tekintik.
l) Exponenciális eloszlás.
m) Diszkrét eloszlás, $p_k = c\cdot\frac{1}{k^2}$, ahol $c = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}$.
n) Poisson-eloszlás, hiszen nagyszámú lakos mindegyike csak elenyészően kicsiny valószínűséggel és egymástól függetlenül lesz öngyilkos.
o) Poisson-eloszlás, hiszen a sok autó mindegyike csak kis valószínűséggel áll meg a stopposoknak, egymástól függetlenül.
p) Normális eloszlás. Ha diszkrét mértékegységekben számolunk, akkor diszkretizált normális eloszlás.
r) Geometriai eloszlás.

12. Klasszikus képletet alkalmazva:

$$P(X=12)=\frac{1}{36},\quad P(X=11)=\frac{2}{36},\quad P(X=10)=\frac{3}{36},\quad P(X=9)=\frac{4}{36},$$

$$P(X=8)=\frac{5}{36},\quad P(X=7)=\frac{6}{36},\quad P(X=k)=P(X=14-k)\quad (k=2,\ldots,6),$$

ahol a számlálókban azon esetek száma áll, ahányféleképpen két kockával az illető összeget elérhetjük.

13. Bayes-tételt alkalmazhatunk. Jelölje A_N azt az eseményt, hogy az urnában eredetileg N db piros golyó található, $N = 0, 1, 2, \ldots, 7$. Feltétel szerint $P(A_N) = 1/8$. Jelölje H azt, hogy visszatevés nélkül, sorrendben, két piros és egy zöld golyót húztunk. Ekkor

$$P(A_N\,|H)=\frac{P(A_N)P(H\,|\,A_N)}{\sum_{k=2}^{6}P(A_k)P(H\,|\,A_k)}=\frac{N(N-1)(7-N)}{\sum_{k=2}^{6}k(k-1)(7-k)}\ (N=2,3,\ldots,6),$$

egyébként $P(A_N\,|H)=0$.

14. $P(X=k)=\frac{\binom{8}{k}\binom{14}{7-k}}{\binom{22}{7}}\quad (k=0,1,2,\ldots,7)$.

15. Az eloszlásfüggvényt határozzuk meg. Ha a választott három szám X, Y, Z, akkor a $\max\{X, Y, Z\} < u$ esemény ekvivalens az $X < u$, $Y < u$, $Z < u$ események metszetével. A függetlenség miatt $P(X < u, Y < u, Z < u) = P(X < u) \cdot P(Y < u) \cdot P(Z < u) = u^3$.

Így az eloszlás eloszlásfüggvénye: u^3 $(0 \le u \le 1)$.

16. *a)* Geometriai eloszlás.

b) Poisson-eloszlás, hiszen sok lottószelvény érkezik be egy héten, és a többiektől függetlenül kicsiny a valószínűsége annak, hogy valaki egyszerre fogad a 2-re és 87-re.

c) Binomiális eloszlás.

d) Nem „nevezetes" eloszlás. A k találat valószínűsége

$$\frac{\binom{3}{k-2}\binom{85}{5-k}}{\binom{88}{3}} \quad (k = 2, 3, 4, 5).$$

17. Nagyvárosban a napi lakástüzek X száma Poisson-eloszlásúnak tekinthető, hiszen sok helyen, de kis valószínűséggel és függetlenül üthet ki tűz. A relatív gyakoriságokat valószínűségekkel közelítve, a feltétel szerint

$P(X = 4) \approx P(X = 5)$, tehát $\frac{\lambda^4}{4!}e^{-\lambda} \approx \frac{\lambda^5}{5!}e^{-\lambda}$. Ebből $\lambda \approx 5$. Így a kérdezett % kb. $100 \cdot \frac{5^2}{2!}e^{-5}$.

18. *a)* Jelölje A, ill. B azon eseményeket, hogy az 1-ből eljut 0-ba 5 lépéssel, ill. azt, hogy a -1-en keresztül jut el 1-ből 0-ba 5 lépéssel. Pl.:

$P(A) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3$, mivel nem számít, hogy milyen sorrendben lép jobbra vagy balra, csak az, hogy két jobbra, ill. három balra lépés szükséges.

$$P(B \mid A) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2}}{\binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{2}{5}.$$

b) Az eloszlás binomiális jellegű. Ha $n = 2k$, akkor

$$P(X = 2m) = \binom{2k}{k+m}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+m}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-m} \quad (m = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k).$$

19. *a)* Ha feltételezzük, hogy a címzések egymástól függetlenek, akkor alkalmazható binomiális eloszlás:

$$P = \sum_{k=26}^{5000}\binom{5000}{k}0{,}001^k\, 0{,}999^{5000-k} = 1 - \sum_{k=0}^{25}\binom{5000}{k}0{,}001^k\, 0{,}999^{5000-k}.$$

b) A címezetlen levelek napi száma Poisson-eloszlásúnak is tekinthető, hiszen a nagyszámú levél mindegyikénél csak 0,001 a valószínűsége a rossz címzésnek. A Poisson-eloszlás paraméterét a IV. fejezetben fogjuk meghatározni.

Ha a címzések nem függetlenek, akkor binomiális eloszlás nem alkalmazható, a Poisson-eloszlás jobb modell.

20. Mindkét szóban forgó eloszlás geometriai eloszlás. Az *a)* esetben p paraméterrel a nemnegatív egészeken, a *b)* esetben $(1-p)$ paraméterrel a pozitív egészeken.

21. Poisson-eloszlást feltételezhetünk, hiszen sokan böngészik az Expressz újságot, de annak valószínűsége csekély, hogy valakit éppen ez a hármas lakáscsere-hirdetés érdekel. Ha az első napi jelentkezők száma X, akkor

$P(X \le 2) = e^{-\lambda} + \lambda \cdot e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} = f(\lambda)$, λ-ban szigorúan monoton csökkenő függvény, hiszen $f'(\lambda) < 0$. Továbbá $f(0) = 1$, $\lim_{\lambda \to \infty} f(\lambda) = 0$, így van egyetlen olyan λ_0 hely, amelyre $P(X \le 2) = f(\lambda_0) = \frac{1}{2}$. Kevés az információnk ahhoz, hogy eldöntsük, előnyös $(\lambda > \lambda_0)$ vagy hátrányos $(\lambda < \lambda_0)$ lenne-e számunkra a fogadás.

22. Egy szavazókörzetben B akkor nyer, ha az 1590 ingadozóból legalább 811 szavazatot kap, azaz az összesből legalább 1501 szavazó B-re szavaz. Binomiális eloszlást használva, ennek valószínűsége:

$$p = \sum_{k=811}^{1590}\binom{1590}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{1590-k}$$

Azon szavazókörzetek száma, ahol a B párt nyer, szintén binomiális eloszlásúnak tekinthető $n = 500$ és p paraméterekkel. A kérdéses valószínűség: $\sum_{k=251}^{500}\binom{500}{k}p^k q^{500-k}$ (később ezen binomiális összegek értékét normális eloszlás segítségével becsülni tudjuk).

23. Annak valószínűsége, hogy egy égő 2000 óránál tovább üzemel, $\int_{2000}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{3}$. Innen $\lambda = \frac{-\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2000}$. Ezután binomiális eloszlást alkalmazhatunk, $n = 200$, $p = \int_0^{200} \lambda e^{-\lambda x} dx$ paraméterekkel, ahol λ a fenti. Ekkor a kérdezett valószínűség: $P = \binom{200}{150} p^{150} q^{50}$.

24. Ha a piros lámpák X élettartama örökifjú tulajdonságú, akkor $P(X > x + y | X > x) = P(X > y)$, minden $x, y > 0$-ra. Legyen $x = 2$, $y = 1$. Ekkor $P(X > 3 | X > 2) \approx \frac{452}{751}$ és $P(X > 1) \approx \frac{800}{1000}$. Ezek lényegesen különböző értékek, ellentmondásban az örökifjú tulajdonsággal.

25. Mivel az eloszlás egyenletes, így valószínűségnek a hosszmértéket alkalmazhatjuk.

a) Egyetlen pontnak 0 a hosszmértéke. Mivel a racionális számok megszámlálhatóan sokan vannak, ezért a valószínűség σ-additivitása miatt a kérdezett valószínűség is 0.

b) Annak valószínűsége, hogy az első k tizedesjegy nem egyes, de a $(k+1)$-edik egyes, $9^k \cdot \frac{1}{10^{k+1}}$, hiszen az első k jegy ekkor 9^k-féleképpen adódhat és mindegyik esetén $\frac{1}{10^{k+1}}$ hosszúságú intervallumon lesz a $(k+1)$-edik jegy egyes. Így annak valószínűsége, hogy egy szám tartalmaz egyes számjegyet, a valószínűség additivitása miatt $0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 + \ldots = 1$. Így a keresett valószínűség 0.

Megjegyzés: általános (Lebesgue-) hosszúságmértéket alkalmaztunk, mert a Jordan-hosszmérték nem rendelkezik a σ-additivitás tulajdonságával.

26. A teljes valószínűség tételét alkalmazva, ha a várakozási idő X, akkor a $P(X < u)$ eloszlásfüggvényre $P(X < u) = \frac{1}{3} \cdot \frac{u}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{u}{15}$, ha $0 \le u < 10$,

$P(X < u) = 1 - \frac{2}{3}\left(\frac{15-u}{15}\right)$, ha $10 \le u \le 15$. Az utóbbi azért igaz, mert $P(X \ge u) = \frac{2}{3}\left(\frac{15-u}{15}\right)$.

III.3. Vegyes feladatok

35. $\frac{1}{2^5 - 1}$.

36. Vegyük észre, hogy $G(x)$ az $1 - e^{-\mu x}$ és $1 - e^{-\lambda x}$ exponenciális eloszlásfüggvények keveréke $1-p$, ill. p súlyokkal.

37. Legyen tehát X Cauchy-eloszlású:

$$P(X < 2 | X > 1) = \frac{P(1 < X < 2)}{P(X > 1)} = \frac{F(2) - F(1)}{1 - F(1)} = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} 2 - 1,$$

ahol $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$ a Cauchy-eloszlás eloszlásfüggvénye.

38. $x \approx -0{,}842$.

39. *a)* Az eloszlás $[0, 1)$-re koncentrálódik, továbbá folytonos, ezért $F(0) = 0$. Így $f(0) < F(0) = 0$ ellentmondás, hiszen $f(x) \ge 0$.

b) Igen, pl. az egyenletes eloszlásra igaz.

40. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(0 \le x \le 1)$.

41. *a)* $A = B$, $A, B > 0$; *b)* $1 - e^{-Ax}$.

42. $P(X > x + y | X > x) = \frac{P(X > x + y \cap X > x)}{P(X > x)} =$

$$= \frac{P(X > x + y)}{P(X > x)} = 2P(x > y),$$

utóbbi a feltétel szerint. Jelöljük a $P(X > z)$ valószínűséget $G(z)$-vel. Ekkor $\frac{G(x+y)}{G(x)} = 2G(y)$. A $G(x+y) = 2G(x)G(y)$ függvényegyenlet feltételeknek megfelelő megoldása: $G(z)=\frac{1}{2}e^{-\alpha z}$ $(\alpha>0)$. Ebből az eloszlásfügg-vény: $P(X<z)=1-\frac{1}{2}e^{-\alpha z}$ $(z>0)$, valóban.

43. *a)* Integrálva mindkét oldalt: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \le 0{,}75\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$. A bal oldal 1, a jobb oldal 0,75, ez ellentmondás.

b) Legyen $f(x)$, illetve $g(x)$ az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye (0, 2)-n, illetve (0, 4)-en. $f(x)+g(x)\le 1$ teljesül minden x-re.

44. Előnyös, ha $M\in[1,7]\cup[11,87]\cup[111,887]\cup\ldots$. Tehát $M\to\infty$-re az előnyös intervallumok összhosszúságának aránya az előnytelenekéhez képest végtelenhez tart.

45. $\frac{8}{20}$; $\frac{8}{20}$; 0,375; 1.

46. *a)* $x\int_x^{\infty}\frac{f(t)}{t}dt \le \int_x^{\infty} f(t)dt$. Utóbbi 0-hoz tart, ha $x\to\infty$.

b) Parciális integrálással kapjuk.

47. $P(Y=n)=\sum_{m=0}^{\infty}P(\alpha=m)P(Y=n\,|\,\alpha=m)=\sum_{m=n}^{\infty}P(\alpha=m)P(Y=n\,|\,\alpha=m)$.

Y az $\alpha=m$ feltétel mellett $B(m,p)$ eloszlású, ezért

$$P(Y=n)=\sum_{m=n}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\binom{m}{n}p^n(1-p)^{m-n}=\frac{(\lambda p)^n}{n!}e^{-\lambda}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(\lambda-\lambda p)^{m-n}}{(m-n)!}=$$

$=\frac{(\lambda p)^n}{n!}e^{-\lambda}e^{\lambda-\lambda p}=\frac{(\lambda p)^n}{n!}e^{-\lambda p}$, tehát λp paraméterű Poisson-eloszlást kapunk.

48. Legyen az eloszlásfüggvény $F(x)$. $P(|X-c|<\varepsilon)=F(c+\varepsilon)-F(c-\varepsilon)$. Jelölje az utóbbi különbséget $h(c)$. A $h(c)$ függvénynek ott van maximumhelye, ahol h' „előjelet vált": $h'(c)=F'(c+\varepsilon)-F'(c-\varepsilon)=f(c+\varepsilon)-f(c-\varepsilon)$. Mivel $f(x)$ folytonos, 1 db maximumhellyel rendelkező függvény, ezért $f(c+\varepsilon)-f(c-\varepsilon)$ is folytonos, valamint negatív és pozitív értéket is felvesz, tehát alkalmazható a Bolzano-tétel, amelynek értelmében felveszi a 0 értéket és h' valóban „előjelet vált" itt. A maximumhely ezért az $f(c+\varepsilon)=f(c-\varepsilon)$ egyenletet kielégítő c érték.

49. *a)* Geometriai; *b)* binomiális; *c)* Poisson-.

50. $\dfrac{\binom{k-1}{2}\binom{90-k}{2}}{\binom{90}{5}}$ $(k=3,4,\ldots,88)$.

51. A kétnyelvű sátrak száma i = 1, 2 és 3 lehet. Az eloszlás értékeit klasszikus képlettel számoljuk ki. Az összes esetek n száma: $\binom{9}{3}\binom{6}{3}$. Ha i = 2, akkor az egynyelvű sátor nyilván csak magyar lehet, és a másik két sátor összetétele egyaránt két angol és egy magyar. Ezért $p_2=\dfrac{3\binom{5}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{1}}{n}=\dfrac{3}{14}$. Ha i = 1, akkor van egy magyar, egy angol és egy kétnyelvű sátor, ezért

$p_1=\dfrac{3!\binom{4}{3}\binom{5}{3}}{n}=\dfrac{2}{14}$. $p_1+p_2+p_3=1$-ből $p_3=\dfrac{9}{14}$.

52. A sok kullancs közül mindegyik a többitől függetlenül és csak kis valószínűséggel esik éppen egy adott versenyzőre, ezért az egy versenyzőre jutó kullancsok száma Poisson-eloszlású. A feltételek szerint annak valószínűsége, hogy valakire pontosan egy, ill. két kullancs esik, közelítőleg $\frac{300}{n}$, illetve $\frac{75}{n}$, ahol n a versenyzők száma. Ugyanezen valószínűségekre a Poisson-eloszlás miatt $\frac{300}{n}=\frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda}$ és $\frac{75}{n}=\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$, ahol λ ismeretlen. Az egyenletrendszerből $n\approx 989$.

53. Igazolandó, hogy $\dfrac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}\approx\binom{n}{k}\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^k\left(1-\dfrac{a}{a+b}\right)^{n-k}$, ha a, b nagy és $\dfrac{a}{a+b}\approx p$. Felhasználva, hogy $\dfrac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}=\dfrac{\dfrac{a!}{(a-k)!}\dfrac{b!}{(b-(n-k))!}}{\dfrac{(a+b)!}{(a+b-n)!}}\binom{n}{k}$, továbbá azt, hogy rögzített m és $C \to \infty$ esetén $\dfrac{\dfrac{C!}{(C-m)!}}{C^m} \approx 1$, megkapjuk a kívánt közelítést.

Tegyük fel pl., hogy egy népes populáció kétfajta, rendre a és b számú egyedből tevődik össze. Ekkor n elemű véletlen, visszatevés nélküli mintát véve, annak valószínűsége, hogy pontosan k első fajta egyedet választunk, $\dfrac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}$, tehát k hipergeometrikus eloszlású. Azonban a visszatevés nélküli mintavétel és az eloszlás jó közelítéssel modellezhető visszatevéses mintavétellel és $B\left(n, \dfrac{a}{a+b}\right)$ binomiális eloszlással is, hiszen a kedvező bekövetkezések p arányát rögzített véges sok húzás nem befolyásolja lényegesen $a, b \to \infty$ miatt.

54. $(\text{ch}\,\lambda)\cdot e^{-\lambda}$.

55. e^{-4}.

56. A találatok száma binomiálisnak tekinthető n és p paraméterrel, ill. közelíthető Poisson-eloszlással, mivel n nagy és p kicsiny. Attól, hogy p felére csökken, a binomiális (Poisson-)eloszlás tagjai még nem csökkennek a felükre.

57. *a)* e^{-40}; *b)* $2\cdot e^{-2}$; *c)* $\dfrac{40^{20}}{20!}e^{-40}$.

58. Binomiális. $n = 6$, $p = \dfrac{1}{3}$, illetve $n = 12$, $p = \dfrac{1}{4}$.

59. $x = (\log_2 3) - 1$.

III.4. Ellenőrző kérdések

60. *a)* Nem; *b)* igen.

61. *a)* Nem; *b)* nem; *c)* igen; *d)* igen.

62. *a)* Csak 0 mértékű halmaz erejéig;
b) igen;
c) igen, $f(x)$ folytonossági pontjaiban;
d) nem.

63. *a)* Igen; *b)* igen.

64. *a)* Nem; *b)* igen; *c)* nem; *d)* igen.

65. *a)* Igen; *b)* nem.

66. *a)* Igen; *b)* nem; *c)* igen.

67. *a)* Nem; *b)* igen; *c)* igen.

68. *a)* Nem; *b)* igen.

69. *a)* Igen; *b)* nem.

70. *a)* F jobbról folytonos lenne;
b) pl. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 1$;
c) $F(x) \equiv 0$ folytonos esetben.

71. Nem.

72. A Poisson-eloszlásnál sok kis valószínűségű független *esemény,* a normális eloszlásnál sok, kicsiny, független *mennyiség* szerepel.

73. *a)* Hiányzik az „egyenlően valószínű" kimenetel feltétele;
b) „átlag hányszor" helyett csak „hányszor";
c) helyes;
d) helyes;
e) helyes;
f) helyesen: „kis valószínűségű mennyiség" helyett „kis mennyiség";
g) „exponenciális" helyett „egyenletes eloszlás".

74. Szinguláris.

IV. Skalár valószínűségi változók (egydimenziós eloszlások) paraméterei. Paraméterszámolás

IV.1. Gyakorlófeladatok

1. $D^2(X) = M(X^2) - M^2(X)$, ahol

$$M(X) = \sum_{k=1}^{4} k\frac{1}{30}k^2 = \frac{10}{3},\quad M(X^2) = \sum_{k=1}^{4} k^2\frac{1}{30}k^2 = \frac{59}{5},\ \text{így}$$

$$D(X) = \sqrt{\frac{59}{5} - \left(\frac{10}{3}\right)^2}\,.$$

2. A Steiner-egyenlőtlenség miatt c a geometriai eloszlás várható értéke, azaz 6.

3. A geometriai eloszlás normáltsága miatt

$$\left(1 + \frac{1}{1-p}\right)\sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{2k-1} = 1,\ \text{ezért}\ c = \frac{2-p}{1-p} = \frac{1+q}{q}\quad (q = 1-p).$$

Az eloszlás várható értéke:

$$\frac{1+q}{q}\sum_{k=1}^{\infty} kpq^{2k-1} = \frac{1+q}{q}\frac{q^2}{1+q}\sum_{k=1}^{\infty} k(1-q^2)(q^2)^{k-1} = \frac{q}{1-q^2} = \frac{1-p}{p(2-p)},$$

a geometriai eloszlás várható értéke alapján.

4. $p^2[(1-p)^0 + 2(1-p) + 3(1-p)^2 + \ldots] =$

$$= (-p^2)\frac{d}{dp}[(1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + \ldots] = -p^2\frac{d}{dp}\left[(1-p)\frac{1}{p}\right] = 1\,.$$

A szomszédos tagok hányadosát véve a módusz megkereséséhez:

$$\frac{(k+2)p^2(1-p)^{k+1}}{(k+1)p^2(1-p)^k} = \frac{k+2}{k+1}(1-p)\quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Itt azt kell vizsgálni, hogy a $\frac{k+2}{k+1}(1-p) > 1$ egyenlőtlenség milyen k-nál fordul meg (vagy válik egyenlőséggé), p-től függően. $k = \left[\frac{1}{p} - 2\right]$, így a módusz $k+1 = \left[\frac{1}{p} - 1\right]$, illetve, ha $\frac{1}{p} - 1$ egész, akkor $\frac{1}{p} - 2$ is módusz.

5. A várhatóérték-sor: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{k}\cdot\frac{1}{2^k}$ nem abszolút konvergens.

6. $M = \int_1^{\infty} x\frac{2}{x^3}\,dx < \infty$, de a második momentum: $\int_1^{\infty} x^2\frac{2}{x^3}\,dx$ nem létezik.

7. $M = \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} x\frac{1}{c\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$, ahol $c = \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}3085$ a táblázatból.

Így $M = \frac{1}{c\sqrt{2\pi}}\left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{c\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{8}} \approx -1{,}141$.

8. $f(x) = \cos x$.

a) $M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \frac{\pi}{2} - 1$.

b) A μ mediánra $\sin\mu = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{\pi}{6}$.

9. *a)* $M(X) = \int_0^2 x\frac{3}{8}x^2\,dx = \frac{3}{2}$.

b) $\int_0^{\mu} \frac{3}{8}x^2\,dx = \frac{1}{2}$, $\mu = \sqrt[3]{4}$.

c) $M(X^2) = \int_0^2 x^2\frac{3}{8}x^2\,dx = \frac{12}{5}$, így $D^2(X) = M(X^2) - M^2(X)$-ből

$$D(X)=\sqrt{\frac{12}{5}-\frac{9}{4}}.$$

10. $D^2(X)=M(X^2)-M^2(X)=M(X^2)-4=7$. Innen $M(X^2)=11$.

11. *a)* Ha c a medián: $\int_1^c \frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{2}$, így $c=2$.

b) $M(X-c)^2$ nem létezik egyetlen c-re sem!

12. *a)* $M\left(\frac{X_1+...+X_n}{n}\right)=\frac{1}{n}nM=M$.

b) $D^2\left(\frac{X_1+...+X_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}nD^2=\frac{D^2}{n}$, így a szórás $\frac{D}{\sqrt{n}}$.

13. A két leállás között készült termékek száma geometriai eloszlású a nemnegatív egészeken, $p=0{,}07$ paraméterrel. Ezért

$$M=\frac{100}{7}-1\approx 13{,}29;\quad D=\frac{\sqrt{0{,}93}}{0{,}07}\approx 13{,}78.$$

14. Az öngyilkosságok száma Poisson-eloszlásúnak tekinthető (sok ember mindegyike egymástól függetlenül kis valószínűséggel követi el). Tudjuk, hogy $\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}=3\cdot\frac{\lambda^5}{5!}e^{-\lambda}$. Ebből $\lambda=\sqrt[3]{20}$, $[\lambda]=2$. Tehát:

a) 2.

b) Annak a valószínűsége, hogy senki sem lesz öngyilkos: $e^{-\sqrt[3]{20}}$.

c) $\sqrt[3]{20}$.

15. Annak a valószínűsége, hogy egy jelentkező átmegy mind a két szűrőn, a valószínűségekre vonatkozó szorzásszabály miatt $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$. A bejutottak száma $B\left(35,\frac{1}{12}\right)$ eloszlású. Így $M=\frac{35}{12}$, a módusz pedig 2 és 3 .

16. A sebességkorlátozást megszegők X számára nézve, a nagy forgalom és a gyakori radarozás miatt, Poisson-eloszlás alkalmazható. Tudjuk, hogy

$P(X=0)<P(X>0)$, azaz $e^{-\lambda}<1-e^{-\lambda}$, tehát $e^{-\lambda}<\frac{1}{2}$, azaz $\ln 2<\lambda$.

Így $P(X=3)=\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}>\frac{(\ln 2)^3}{3!}\approx 0{,}03$.

17. Binomiális eloszlással modellezhetünk: $p=0{,}4$, $n=60$. Így $M=0{,}4\cdot 60=24$, a módusz $[61\cdot 0{,}4]=24$ és $D=\sqrt{60\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}\approx 3{,}79$.

18. Az eladásig beérkező ajánlatok száma geometriai eloszlású. Az $X\geq K$ esemény valószínűsége $1-F(K)$, ez a paraméter. Így a várható érték: $\frac{1}{1-F(K)}$.

19. A kereslet Poisson-eloszlásúnak tekinthető, mivel nagy a kereslet és a vállalkozás még kevéssé ismert. Ha X jelenti a napi nyereséget, akkor

$$M(X)=p(21000-1800)+p_2(14000-1800)+p_1(7000-1800)+p_0(-1800),$$

ahol $p=1-(p_0+p_1+p_2)$ és $p_k=\frac{2^k}{k!}e^{-2}$ $(k=0,1,2)$.

20. *a)* Mindkét játék méltányos, hiszen $M(X_A-p)=M\left(\frac{k_A}{100}-p\right)=0$.

b) Összehasonlíthatjuk például a szórásokat:

$$D^2(X_A-p)=D^2(X_A)=p(1-p),\quad D^2\left(\frac{k_A}{n}-p\right)=D^2\left(\frac{k_A}{n}\right)=\frac{1}{n^2}D^2(k_A)=$$

$=\frac{1}{n^2}np(1-p)=\frac{p(1-p)}{n}$, ahol $n=100$, így az első játéknál nagyobb a kockázat.

21. Ha egy véletlenül választott zsák súlya X, akkor $P(|X-m|\geq 50)\approx 0{,}05$. Ezért $P\left(\left|\frac{X-m}{\sigma}\right|\geq\frac{50}{\sigma}\right)=0{,}05$, $2-2\Phi\left(\frac{50}{\sigma}\right)=0{,}05$, $\Phi\left(\frac{50}{\sigma}\right)=0{,}975$. Így a táblázatból $\frac{50}{\sigma}\approx 1{,}96$, tehát $\sigma\approx 25{,}51$ dkg.

22. Ha a bomlási idő X, akkor $P(X\leq 140)=0{,}5$. Ezért, használva az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvényét, $1-e^{-\lambda(140)}=0{,}5$.

Ebből $\lambda=-\frac{1}{140}\ln 0{,}5\approx 4{,}95\cdot 10^{-3}$.

a) $M = D = \dfrac{1}{\lambda} = 201{,}98.$

b) $P(X \le y) = 0{,}95$, $1 - e^{-\lambda y} = 0{,}95$. Így $y = \dfrac{-\ln 0{,}05}{\lambda} \approx 605$ nap.

23. Csonkított normális eloszlás várható értéke a kérdés. A csonkítás normáló tényezőjére: $c = P(X \ge 80) = 1 - P(X \le 80) = 1 - \Phi\left(\dfrac{80-78}{4}\right) \approx 0{,}3085$.

A várható érték:

$$\int_{80}^{\infty} x \cdot \frac{1}{c\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{c\sigma\sqrt{2\pi}} \left(-\sigma^2 \int_{80}^{\infty} -\frac{(x-m)}{\sigma^2} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx + \int_{80}^{\infty} m\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{c\sigma\sqrt{2\pi}} \left(-\sigma^2 \left[e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \right]_{80}^{\infty} + \sigma\sqrt{2\pi}\, m\, c \right) = \frac{\sigma}{c\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(80-m)^2}{2\sigma^2}} + m,$$

ahol $m = 78$, $\sigma = 4$.

24. Tudjuk, hogy a k találat valószínűsége: $p_k = \dfrac{\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$.

Így a várható érték: $Ap_2 + Bp_3 + Cp_4 + Dp_5 - \alpha$.

25. Tegyük fel, hogy a kockázatot a szórással mérjük. Ekkor a két szórást kell összehasonlítani.

$D^2(X) = M(X^2) - M^2(X)$-et használhatjuk.

Legyen $X_{\text{lottó}}$ a lottónyeremény. Várható értékét az előző feladatban már kiszámítottuk. $M(X^2_{\text{lottó}})$ hasonlóan számolható.

Ha X_{rulett} a rulettnyeremény, akkor $M(X_{\text{rulett}}) = A \cdot \dfrac{18}{37} - A \cdot \dfrac{19}{37}$, ahol A egy szelvény ára (hiszen zéró esetén veszítünk). $M(X^2_{\text{rulett}}) = A^2 \cdot \dfrac{18}{37} - A^2 \cdot \dfrac{19}{37}$.

26. $p_k = P(X = k) = \dfrac{(90-k)\binom{k-1}{3}}{\binom{90}{5}}$ $(k = 4, 5, \ldots, 89)$, ahol X a második legnagyobb szám. A $\dfrac{p_{k+1}}{p_k} = \dfrac{(90-k-1)\cdot k}{(90-k)(k-3)}$ hányadosról kell vizsgálni, hogy mikor nagyobb 1-nél. $k = 67$-re nagyobb, $k = 68$-ra kisebb 1-nél, így a módusz a $k = 68$ helyen van.

27. Jelölje p_k annak valószínűségét, hogy a második játékos k darab fejet dob, q_m pedig annak valószínűségét, hogy az első játékos m darab fejet. Ekkor annak valószínűsége, hogy 1 dobás esetén a második játékos nyer:

$$P_2 = p_2[q_0 + q_1] + p_1 q_0 = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{16}.$$

Annak valószínűsége, hogy a dobott fejek száma azonos, 1 dobás esetén:

$$P = p_2 q_2 + p_1 q_1 + p_0 q_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}.$$

Így annak valószínűsége, hogy az első játékos nyer, 1 dobás esetén:

$P_1 = 1 - P_2 - P = \dfrac{1}{2}$. Annak valószínűsége, hogy az egész játékot a második játékos nyeri, figyelembe véve, hogy hányadik dobásnál dől el a játék: $P_2 + P_2 P + P_2 P^2 + \ldots = \dfrac{P_2}{1-P}$.

Hasonlóan az első játékosra $\dfrac{P_1}{1-P}$. Így a várható érték:

$$2 \cdot \frac{P_1}{1-P} - 3 \cdot \frac{P_2}{1-P} = \frac{7}{11}.$$

28. $(-10)\cdot\frac{1}{2}+40\cdot\frac{1}{6}+10\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)-20\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)=0$, így a játék „igazságos", azaz nem mondható, hogy előnyös Péter számára.

29. Legyen a jegy ára x. Ekkor a feltétel:

$$(50000-x)\frac{1}{10000}+(5000-x)\frac{10}{10000}+(1000-x)\frac{50}{10000}-$$

$$-x\left(\frac{10000-61}{10000}\right)=\frac{x}{2},\text{ így}$$

$$(50000\cdot 0{,}0001+5000\cdot 0{,}001+1000\cdot 0{,}005)\frac{2}{3}=x,\quad x=10.$$

30. $M(X)=\int_0^\infty x\frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}x^2e^{-h^2x^2}dx=-\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty x^2(-2h^2x\cdot e^{-h^2x^2})dx=$

$$=-\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\left([x^2e^{-h^2x^2}]_0^\infty-\int_0^\infty 2x\cdot e^{-h^2x^2}dx\right)=-\frac{2}{h\sqrt{\pi}}[e^{-h^2x^2}]_0^\infty=\frac{2}{h\sqrt{\pi}}.$$

31. Az X szög eloszlása kevert. 0-ra $\frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{2}$-re $\frac{9}{24}$ valószínűség koncentrálódik, $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$-ben az eloszlás egyenletes, ide $\frac{1}{8}$ valószínűségérték koncentrálódik, ezért a sűrűségfüggvény értéke $\frac{1}{4\pi}$. A keresett várható érték tehát:

$$0\cdot\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{9}{24}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\frac{1}{4\pi}dx=\frac{7\pi}{32}.$$

32. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}c\cdot\cos x\,dx=1$, így $c=1$. A tehetetlenségi nyomaték a Steiner-egyenlőtlenség értelmében a súlypontra minimális, tehát $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$-re.

33. Tudjuk, hogy $M(X-7)^2=5$ és $M(X-4)^2=2$, tehát

$M(X^2)-14M(X)+49=5$ és $M(X^2)-8M(X)+16=2$.

Ebből $M(X)=5$, $M(X^2)=26$. Így András 5-re fog tippelni és átlagos vesztesége éppen $D^2(X)$, azaz $26-5^2=1$.

IV.3. Vegyes feladatok

46. $x(1-F(x))\le\int_x^\infty tf(t)dt$. A jobb oldal a várható érték létezése miatt 0-hoz tart.

A másik határérték hasonlóan igazolható.

47. $\frac{M(X^{n+1})}{M(X^n)}=\frac{\sum_{i=1}^k p_ix_i^{n+1}}{\sum_{i=1}^k p_ix_i^n}$. A számlálót és a nevezőt is elosztva $(\max_{1\le i\le k}\{x_i\})^n$-nel kapjuk a kívántat, $n\to\infty$-re.

48. *a)* Pl. 7 helyett a 8 valószínűsége legyen $\frac{3}{20}$;

b) a két $\frac{3}{20}$ valószínűséget áthelyezzük még 5-re.

49. $\left(\sum_{k=2}^{5}\frac{(0{,}6)^k}{k!}e^{-0{,}6}\right)^{-1}\sum_{k=2}^{5}k\frac{(0{,}6)^k}{k!}e^{-0{,}6}\approx 2{,}22$.

50. $\sum_{n=0}^{\infty}P(X>n)=[P(X=1)+P(X=2)+\ldots]+[P(X=2)+P(X=3)+\ldots]+$

$$+[P(X=3)+P(X=4)+\ldots]+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}kP(X=k)=M(X).$$

51. A regisztrált részecskék száma Poisson-eloszlásúnak tekinthető, $\lambda\approx np$ paraméterrel, ahol $p=10^{-4}$, hiszen kicsiny a valószínűsége annak, hogy a sok részecskéből egy adottat regisztrálunk. Tudjuk, hogy $1-\sum_{k=0}^{3}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\ge 0{,}99$.

Innen $\lambda\approx 10$, tehát $n\approx 10^5$.

52. A kétszázas csomagolásra jutó hibás harisnyák száma Poisson-eloszlásúnak tekinthető, $\lambda = \frac{1}{5}$ paraméterrel, hiszen kicsiny a valószínűsége annak, hogy egy adott harisnya hibás a sok harisnyából. Tehát annak valószínűsége, hogy nincs hibás harisnya a dobozban, $e^{-\frac{1}{5}}$. Ezután binomiális eloszlás alkalmazható $n = 1000$ és $p = e^{-\frac{1}{5}}$ paraméterrel, tehát a várható érték $1000 \cdot e^{-\frac{1}{5}}$.

53. *a)* 22,5; *b)* 23; *c)* $\frac{3\sqrt{10}}{4}$.

54. $M \approx 12{,}43$; $\sigma \approx 1{,}74$.

55. *a)* $10n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; *b)* $10n$.

56. *a)* A valószínűségi változó tehát a $\frac{k_A}{n}$ relatív gyakoriság, ahol k_A $B(n,p)$ binomiális eloszlású. Ezért $\frac{k_A}{n}$ eloszlása a $B(n,p)$ eloszlás $\frac{1}{n}$-szeres zsugorítása, vagyis az eloszlás a $\frac{k}{n}$ pontokra koncentrálódik ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$).

b) $\frac{[(n+1)p]}{n}$.

57. $M = \sum_{k=1}^{n} p_k$, $D^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k(1-p_k)$.

58. 2.

59. Normális eloszlással modellezhetjük a zsákok súlyát. Először az $N(m,\sigma)$ normális eloszlás paramétereit kell meghatározni a feltételek segítségével:

$$P(X \le 99) = \Phi\left(\frac{99-m}{\sigma}\right) \approx 0{,}0228, \text{ innen } \frac{99-m}{\sigma} = -2, \text{ továbbá}$$

$$P(99 \le X \le 101) = \Phi\left(\frac{101-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{99-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{101-m}{\sigma}\right) - 0{,}0228 =$$

$= 0{,}8185$, innen $\frac{101-m}{\sigma} \approx 1$. Megoldva az egyenletrendszert: $m \approx 100 + \frac{1}{3}$, $\sigma \approx \frac{2}{3}$.

Kiszámítandó a $[101, \infty)$ intervallumra csonkított $N(m,\sigma)$ eloszlás várható értéke. A normáló tényezőre:

$$1 = \int_{101}^{\infty} cf(x)dx = c\left(1 - \Phi\left(\frac{101-m}{\sigma}\right)\right) = c \cdot 0{,}1597,$$ innen $c \approx 6{,}26$, ahol $f(x)$ az $N(m,\sigma)$ sűrűségfüggvénye. Tehát a kérdezett várható érték:

$$6{,}26 \cdot \int_{101}^{\infty} xf(x)dx.$$

60. Geometriai eloszlás, $M = 100$, $D \approx 99{,}499$.

61. *a)* $p_k = \frac{\frac{8!(k-1)}{(9-k)!}}{8^k}$ $(k = 2, 3, \ldots, 9)$, $\mu = 4$;

b) $p_k = \left(\frac{7}{8}\right)^{k-2} \frac{1}{8}$ $(k \ge 2)$, $\mu = 2$.

62. *a)* $\frac{\binom{12}{7}\binom{8}{2}}{\binom{20}{9}}$; *b)* 5.

63. *a)* Jelölje Y a nyereséget.

$$M(Y) = 0P(X < 5) + 12P(5 \le X \le 6) + 8P(X > 6) =$$

$$= 12\left[\Phi\left(\frac{6-m}{0{,}5}\right) - \Phi\left(\frac{5-m}{0{,}5}\right)\right] + 8\left[1 - \Phi\left(\frac{6-m}{0{,}5}\right)\right] =$$

$$= 8 + 4\Phi(12-2m) - 12\Phi(10-2m).$$

b) A maximumhelyet m szerinti deriválással keressük meg:

$\frac{dM}{dm} = -8\Phi'(12-2m) + 24\Phi'(10-2m) = 0$, ahol Φ' a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye. Innen egyszerű számolással kapjuk, hogy

$e^{4m-22}-3=0$, azaz $m\approx 5{,}7747$. A derivált pozitívból negatívba megy át, tehát valóban maximum van.

64. Az eloszlás a III.**18.** feladathoz hasonlóan binomiális jellegű. Ha $n=2k$ páros, akkor $P(X=2m)=\binom{2k}{k+m}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+m}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-m}$ $(|m|=0,1,2,\dots,k)$. $\frac{X+n}{2}$ nyilván $B\left(n,\frac{1}{3}\right)$ binomiális eloszlású, tehát $M\left(\frac{X+n}{2}\right)=n\cdot\frac{1}{3}$. Ezért $M(X)=-\frac{n}{3}$.

65. *a)* $\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, ha $x\ge 0$; *b)* $\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$.

66. *a)* $M\approx 1{,}875$; *b)* $D\approx 1{,}218$.

67. *a)* $\frac{1}{p}$; *b)* 1.

68. Jelölje X az egyik, Y pedig a másik dobókockával elért dobási eredményt. Béla várható nyereménye: $M(X+Y)=M(X)+M(Y)=7$, ugyanis $M(X)=$ $=M(Y)=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=3{,}5$.

Albert nyereménye átlagosan $M(X-Y)^2$. $(X-Y)^2$ lehetséges értékei: 0, 1, 4, 9, 16 és 25. Kiszámolható, hogy ezeket rendre $\frac{6}{36},\frac{10}{36},\frac{8}{36},\frac{6}{36},\frac{4}{36},\frac{2}{36}$ valószínűségekkel veszi fel, kihasználva, hogy $(X-Y)^2=k$ akkor és csak akkor, ha $|X-Y|=\sqrt{k}$ és $P(X=i,Y=j)=\frac{1}{36}$. A lehetséges nyeremények súlyozott átlaga, azaz Albert nyereményének várható értéke kb. 5,83, tehát a játék Bélának kedvez.

69. 4.

70. 500.

71. *a)* $M=2$; *b)* nem létezik.

72. Tételezzük fel, hogy annak valószínűsége, hogy n megállót utazva nem találkozunk ellenőrrel, $(1-p)^n$. Ha n megállót potyázunk, akkor utazási költségünk várható értéke: $0\cdot(1-p)^n+B\,(1-(1-p)^n)$. Amennyiben jegyet vásárolunk, költségünk A Ft. Tehát akkor érdemes potyázni, ha

$$B\,(1-(1-p)^n)<A\text{, innen } n<\frac{\log\left(1-\frac{A}{B}\right)}{\log(1-p)}.$$

73. $P(X=k)=\dfrac{\binom{k-1}{24}\binom{100-k}{35}}{\binom{100}{60}}$, $\mu=41$.

74. $M=\frac{5}{3}$, $D=\sqrt{\frac{5}{63}}$, medián $\approx\sqrt[5]{16}$.

75. Úgy veszíthetünk, hogy rendre az első N tétet elveszítjük. Ennek valószínűsége p^N, ahol $p=\frac{19}{37}$, és ekkor veszteségünk összege $1+2+4+\ldots+2^{N-1}=2^N-1$.

Ha nyerünk, akkor csak 1 zsetont nyerhetünk. Ez megtörténhet rendre az első, a második, az N-edik tét után, tehát a nyerés valószínűsége

$(1-p)+p(1-p)+p^2(1-p)+\ldots+p^{N-1}(1-p)=1-p^N$.

Ezért a nyereség várható értéke: $p^{N-1}(1-2^N)+(1-p)^N\cdot 1=1-(2p)^N$. Ez az érték negatív, hiszen $\frac{19}{37}>\frac{1}{2}$.

76. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n-2)}{2}p^n(1-p)$, ahol $p=\frac{18}{37}$.

77. Legyen X a beszélgetés időtartama, ekkor a beszélgetés díja: $A([X]+1)$ Ft. $M(A([X]+1))=A(M[X]+1)$. Ismert, hogy ha X exponenciális eloszlású λ paraméterrel, akkor $[X]$ geometriai eloszlású $p=1-e^{-\lambda}$ paraméterrel, ezért $M[X]=\frac{1}{1-e^{-\lambda}}$. Most $\lambda=\frac{1}{5}$, így a beszélgetés díjának várható értéke: $A\left(\frac{1}{1-e^{-\frac{1}{5}}}+1\right)$.

78. *a)* $P(X=k)=(1-(0{,}5)^k)^n-(1-(0{,}5)^{k-1})^n$; *b)* $\frac{8}{3}$; *c)* $\frac{22}{7}$.

79. *a)* $(1-e^{-2})^k e^{-2}$ $(k=0,1,2,\ldots)$; *b)* 6,39.

80. $\sum_{k=2}^{7} k\left(\frac{6}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{8-k}{6}\right)\frac{k-1}{6}$.

81. Legyen a beszélgetés időtartama X. $M\,|X-c\,|$-t szeretnénk minimalizálni, ahol c a tippelésünk. Ismert, hogy c-t a mediánnak érdemes választani. Mivel X $\frac{1}{4}$ paraméterű, exponenciális eloszlású, a mediánt az $1-e^{-\frac{x}{4}}=\frac{1}{2}$ egyenletből kapjuk: $c=4\ln 2\approx 2{,}7726$.

82. Jelölje rendre $X_1, X_2, \ldots, X_6$ azon mosóporvásárlások számait, melyek ahhoz szükségesek, hogy egy-egy matrica megtalálása után újfajta matricát találjunk. $X_1=1$. X_2 geometriai eloszlású $\frac{5}{6}$ paraméterrel, ezért várható értéke $\frac{6}{5}$. X_3 is geometriai eloszlású $\frac{4}{6}$ paraméterrel, így várható értéke $\frac{6}{4}$ stb. Ezért:

$$M(X_1+X_2+\ldots+X_6)=1+\frac{6}{5}+\frac{6}{4}+\frac{6}{3}+\frac{6}{2}+6\approx 14{,}7.$$

83. Annak valószínűsége, hogy a sportoló a k-adik évben balesetet szenved, de a $(k+1)$-edik, $(k+2)$-edik, …, 9-edik évben nem: $p(1-p)^{9-k}$ $(k=1, 2, \ldots, 9)$, illetve $(1-p)^9$, ha $k=0$. A biztosítási díj a tizedik évben, a feltételek szerint: $a\cdot p^{9-k}$. Ezen eloszlás várható értéke:

$$\sum_{k=1}^{9} p(1-p)^{9-k}ap^{9-k}+(1-p)^9ap^9=ap\frac{1-(p-p^2)^9}{1-(p-p^2)}+a(p-p^2)^9.$$

$a=3000$ és $p=0{,}1$ esetén ez az érték kb. 330.

84. $\frac{1}{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}\left[2\cdot\binom{4}{2}\binom{84}{2}+3\cdot\left(\binom{4}{3}\binom{84}{2}+\binom{4}{2}\cdot 84\right)+4\cdot 4\cdot 84\right]\approx 2{,}4$.

85. Zoli akkor nyer 11 Ft-ot, hogyha hatost dob és Pista nem dob egyest vagy kettest. Ennek valószínűsége $\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}$. Akkor veszít 5 Ft-ot, ha Pisti egyest vagy kettest dob és Zoli maga nem dob hatost. Ennek valószínűsége: $\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{6}$. Egyéb esetekben nem nyer és nem is veszít. Ezért Zoli nyereségének várható értéke:

$11\cdot\frac{4}{36}-5\cdot\frac{10}{36}=-\frac{1}{6}$ Ft. Ha Feri egy kockával dob, akkor a várható érték így alakul: $11\cdot\frac{1}{6}-5\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$ Ft. Tehát Pistának nem érdemes elfogadni az ajánlatot, mert csökken nyereségének várható értéke.

86. Ha az n-edik lépésig vár, akkor várható nyeresége: $n\cdot 100\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Ez maximális, ha $n=5$ vagy 6, ekkor $M_5=M_6=600\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^6\approx 201<250$.

87. $5\cdot\frac{1+90}{2}=227{,}5$.

88. Tekintsünk egy tetszőleges padot. Annak valószínűsége, hogy a padon „vegyes pár" foglal helyet, $\frac{1}{2}$. Legyen X_i annak az eseménynek az indikátorváltozója, hogy az i-edik padnál „vegyes pár" ül. Ekkor $M(X_i)=1\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Ezért

$$M(X_1+X_2+\ldots+X_{10})=10\cdot\frac{1}{2}=5.$$

89. Legyen $X_i=1$, ha nem választják ki az i-edik lányt és legyen $X_i=0$, ha kiválasztják. $M(X_i)=\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. A ki nem választott lányok száma: $X_1+X_2+\ldots+X_n$, jelölje ezt Y.

$M(Y)=n\cdot M(X_i)=n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. Nagy n-re $\frac{M(Y)}{n}\approx\frac{1}{e}$.

90. A szériák hossza geometriai eloszlású $p=\frac{1}{2}$ paraméterrel, ezért az átlagos hossz 2.

91. $0{,}75\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{6}+\int_0^{\frac{3}{4}} x\cdot\frac{2}{3}\,dx=0{,}44$.

92. *a)* Az eloszlás kevert. 0-ban $\frac{2}{3}$ valószínűség található, $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$-ben az eloszlás egyenletes $f(x)=\frac{2}{3}$ sűrűségfüggvénnyel.

b) $M=0\cdot\frac{2}{3}+0{,}25\cdot\frac{1}{3}\approx 0{,}083.$

V. Skalár valószínűségi változók (egydimenziós eloszlások) paraméterei. Adott paraméterek (eloszlások megszorítása)

V.1. Gyakorlófeladatok

1. *a)* $np=6$, $\sqrt{npq}=1$. Ebből $p=\frac{5}{6}$ és $n=\frac{36}{5}$ lenne, holott n egész, így nem létezik ilyen binomiális eloszlás.

b) Létezik, pl. 1 paraméterű Poisson-eloszlás.

2. *a)* Igen, $\frac{1}{p}=2$, tehát $p=\frac{1}{2}$.

b) Igen, abban az értelemben, hogy ha pl. $\lambda=2$, tehát $M=2$, akkor $k=1$ módusz, tehát van olyan módusz, amelyre igaz. Ha λ nem egész, akkor nem lehet igaz.

3. $P(-5\le X\le 0)=\Phi\left(\frac{0+5}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-5+5}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right)-\frac{1}{2}=0{,}3$.

Innen $\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right)=0{,}8,\quad \sigma\approx 5{,}95$.

Ezért $P(-5\le X\le -4)=\Phi\left(\frac{-4+5}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-5+5}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)-\frac{1}{2}\approx 0{,}0675$.

4. $X=\sum_{i=1}^{742}X_i$ a centrális határeloszlás-tétel (C. H. T.) értelmében közel normális eloszlású, $m=742, \sigma=5\cdot\sqrt{742}$ paraméterekkel. Így

$P(X>x)=1-\Phi\left(\frac{x-742}{5\sqrt{742}}\right)\approx 0{,}34$, innen $\frac{x-742}{5\sqrt{742}}\approx 0{,}4125,\quad x=798{,}18$.

5. *a)* Az összeg a C. H. T. miatt közelítőleg normális eloszlásúnak tekinthető $m=0, \sigma=30$ paraméterekkel.

b) A nagy számok erős törvénye értelmében $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_{100}}{100}\approx 0$, így a számláló közelítőleg 0.

6. A Moivre–Laplace-tétel szerint az összeg közelítőleg:

$$\Phi\left(\frac{720-1000\cdot 0{,}7}{\sqrt{1000\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3}}\right)-\Phi\left(\frac{680-1000\cdot 0{,}7}{\sqrt{1000\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3}}\right)=2\Phi\left(\frac{20}{\sqrt{210}}\right)-1\approx 0{,}832\,.$$

7. $P(|X-M(X)|\geq \varepsilon)\leq \dfrac{D^2(X)}{\varepsilon^2}$ mindkét oldalát -1-gyel szorozva és mindkét oldalhoz 1-et adva, kapjuk a kívántat.

8. Binomiális eloszlás alkalmazható; $np=40$, $\sqrt{npq}=6$. Ebből

a) $n=400$.

b) $p=0{,}1$, így

$$\sum_{k=46}^{400}\binom{400}{k}(0{,}1)^k(0{,}9)^{400-k}\approx\Phi\left(\frac{400-40}{6}\right)-\Phi\left(\frac{46-40}{6}\right)\approx 0{,}159\,.$$

c) $[401\cdot 0{,}1]=40$.

9. Az első és a második napi hívások száma is Poisson-eloszlásúnak tekinthető, 4, ill. 2 paraméterekkel. A két nap alatt együttesen beérkező hívások száma ugyancsak Poisson-eloszlásúnak tekinthető 6 paraméterrel. A kérdezett valószínűség tehát: $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}\frac{6^k}{k!}e^{-6}=1-\sum_{k=0}^{2}\frac{6^k}{k!}e^{-6}\approx 0{,}938$.

10. Geometriai eloszlás alkalmazható. $M=10$, így $p=\dfrac{1}{10}$. A valószínűség:

$0{,}1+0{,}9\cdot 0{,}1+0{,}9^2\cdot 0{,}1=0{,}271$.

11. A júliusi vitorlásbalesetek száma λ paraméterű Poisson-eloszlásúnak tekinthető. A módusz 3-nak vehető, így $[\lambda]=3$, tehát $3\leq\lambda\leq 4$. Annak valószínűsége, hogy júliusban nem történik vitorlásbaleset: $e^{-\lambda}$. Az $e^{-\lambda}$ valószínűségű esemény átlagosan $\dfrac{1}{e^{-\lambda}}$ független megfigyelés alatt következik be. Mivel $3\leq\lambda$, így $e^3\leq e^{\lambda}$, tehát az átnézendő évek száma $[e^3]=20$ átlagosan.

12. A dupla hatos dobások száma binomiális eloszlású x és $\dfrac{1}{36}$ paraméterekkel.

Feltéve, hogy egyértelmű módusz van, $\left[(x+1)\cdot\dfrac{1}{36}\right]=2$, így $2\leq(x+1)\cdot\dfrac{1}{36}<3$,

tehát $71\leq x<107$.

13. A heti négytalálatosok száma Poisson-eloszlásúnak tekinthető. $D=\sqrt{\lambda}=19$, így $\lambda=361$. Ebből: $P=\dfrac{(361)^{350}}{350!}e^{-361}$.

14. $P(X<50)=\Phi\left(\dfrac{50-45}{\sigma}\right)=\Phi\left(\dfrac{5}{\sigma}\right)=0{,}903$.

Így $P(X<40)=\Phi\left(\dfrac{40-45}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\dfrac{5}{\sigma}\right)=0{,}097\approx p$.

A p paraméterű geometriai eloszlás várható értéke $\dfrac{1}{p}\approx 10{,}309$.

15. Az exponenciális eloszlás paramétere $\dfrac{1}{3}$. Ha egy lámpa élettartama X, akkor

$P(X>5)=\displaystyle\int_5^{\infty}\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}dx=e^{-\frac{5}{3}}=p$. Innen

a) p^6.

b) $\dbinom{6}{2}(1-p)^2p^4$.

16. Ismerősünk érkezése az (a,b) időintervallumban egyenletes, így tudjuk, hogy

$\dfrac{a+b}{2}=7$ és $\dfrac{(b-a)^2}{12}=\left(\dfrac{1}{12}\right)^2$, tehát $|b-a|=\dfrac{1}{12}$, így $a=7-\dfrac{1}{2\cdot 12}$.

17. Az exponenciális eloszlás paramétere: $\dfrac{1}{1000}$. Az örökifjú tulajdonság miatt a kérdéses valószínűség megegyezik annak valószínűségével, hogy az izzó nem az első nap első harmadában ég ki, azaz: $P(X>8)=\displaystyle\int_8^{\infty}0{,}001e^{-0{,}001x}dx=$ $=e^{-0{,}008}$.

18. Ha a garancia y órára szól és az élettartam véletlen X, akkor

$P(X<y)=\Phi\left(\dfrac{y-1170}{100}\right)=0{,}5$. Innen $y\approx 1334{,}5$.

19. Csebisev-egyenlőtlenség szerint, $\varepsilon=16$ választással,

$$P(|X-64|<16)=P(48\leq X\leq 80)>1-\frac{8^2}{16^2}=\frac{3}{4}\,.$$

20. Csebisev-egyenlőtlenség szerint, $\varepsilon = 50$ választással,

$$P(|X-5000| \geq 50) \leq \frac{10^2}{50^2} = \frac{1}{25}.$$

21. A nagy számok gyenge törvényét alkalmazzuk, $\varepsilon = 10^{-4}$ választással:

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right| \geq 10^{-4}\right) \leq \frac{1}{4n(10^{-4})^2} < 0{,}05. \text{ Innen } n > 5 \cdot 10^8.$$

22. Az előző megoldáshoz kapcsolódóan, most $n = 2000$, és ε-t keressük: $\frac{1}{4 \cdot 2000\,\varepsilon^2} \leq 0{,}05$ és ezért $\varepsilon \geq \frac{1}{20}$. Tehát a pontosság legalább $0{,}05$.

23. A nagy számok várható értékére vonatkozó gyenge törvényét alkalmazzuk, $n = 1000$, $\bar{x} = 5100$, $D = 10$ választással:

$$P(|m-5100| \geq \varepsilon) \leq \frac{10^2}{1000\,\varepsilon^2} \leq 0{,}01.$$

Innen $\varepsilon \geq \sqrt{10}$, tehát az intervallum az $|m-5100| \geq \sqrt{10}$ komplementere: $(5100-\sqrt{10},\ 5100+\sqrt{10})$.

24. Vegyük észre, hogy a havi bruttó fizetés egy $\frac{1}{b}$ paraméterű exponenciális eloszlás eltoltja a-val. Ezért csak az exponenciális eloszlás várható értéke változik: $M = b + a$ és $D = b$. A 100 fizetés X összegének várható értéke: $m = 100\,(a+b)$, szórása: $\sigma = \sqrt{100}b$. Továbbá a centrális határeloszlás-tétel értelmében X eloszlása közelítőleg normálisnak tekinthető.

$$0{,}95 = P(X < x) \approx \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \text{ ebből } \frac{x-m}{\sigma} \approx 1{,}65, \text{ ezért } x \approx 1{,}65\sigma + m \text{ Ft}.$$

25. Mivel az egyes ellenállások értékei egyenletes eloszlásúak, így várható értékük $0{,}4$, szórásuk $\frac{0{,}2}{2\cdot\sqrt{3}}$. A soros kapcsolás miatt az ellenállások összeadódnak, vagyis az X összeg várható értéke $100 \cdot 0{,}4$, szórása $\sqrt{100}\,\frac{0{,}2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, továbbá X eloszlása a centrális határeloszlás-tétel miatt közelítőleg normálisnak tekinthető, ezért

$$P(X > 41) \approx 1 - \Phi\left(\frac{41-40}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right) \approx 0{,}042.$$

26. Ha egy dobozban n szem málna van, akkor a málnaszemek X összsúlya $n \cdot 2$ várható értékű, $\sqrt{n} \cdot 0{,}25$ szórású, a C. H. T. miatt közelítőleg normális eloszlású X valószínűségi változó. Így $0{,}3 = P(X > 350) = 1 - \Phi\left(\frac{350-2n}{0{,}25\sqrt{n}}\right)$.

Ebből $\frac{350-2n}{0{,}25\sqrt{n}} \approx 0{,}52$, innen $n \approx 174$.

27. A zajszintet normális eloszlásúnak tekinthetjük, $m = 45$. Tudjuk, hogy $P(X > 50) \approx 0{,}1$. $P(X > 50) = 1 - P(X \leq 50) = 1 - \Phi\left(\frac{50-45}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right)$.

Innen $\sigma \approx 3{,}91$. Tehát $P(X < 37) = \Phi\left(\frac{37-45}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{8}{\sigma}\right) \approx 0{,}02$.

28. Binomiális eloszlást alkalmazva, annak valószínűsége, hogy legfeljebb M találat van, $\sum_{k=0}^{M}\binom{200}{k}(0{,}4)^k(0{,}6)^{200-k} = 0{,}9$. Másrészt, a Moivre–Laplace-tétel miatt ez a valószínűség közelítőleg $\Phi\left(\frac{M-200\cdot0{,}4}{\sqrt{200\cdot0{,}4\cdot0{,}6}}\right) - \Phi\left(\frac{-200\cdot0{,}4}{\sqrt{200\cdot0{,}4\cdot0{,}6}}\right)$.

A második tag közel nulla, ezért $\Phi\left(\frac{M-200\cdot0{,}4}{\sqrt{200\cdot0{,}4\cdot0{,}6}}\right) \approx 0{,}9$, innen

$\frac{M-200\cdot0{,}4}{\sqrt{200\cdot0{,}4\cdot0{,}6}} \approx 1{,}3$, ezért $M \approx 89$.

29. Az írás dobások X száma binomiális eloszlású, így

$$P(45 \leq X \leq 50) = \sum_{k=45}^{50}\binom{100}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{100-k}.$$

A Moivre–Laplace-tétel miatt ez közelítőleg

$$\Phi\left(\frac{50-100\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\right)-\Phi\left(\frac{45-100\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\right)=\frac{1}{2}-\Phi(-1)\approx 0{,}3413\,.$$

V.2. Vegyes feladatok

30. *a)* $D^2(X)D^2(Y)+D^2(X)M^2(Y)+D^2(Y)M^2(X)=(M(X^2)-M^2(X))\,(M(Y^2)-$
$-M^2(Y))+(M(X^2)-M^2(X))\,M(Y^2)+(M(Y^2)-M^2(Y))M^2(X)=$
$=M(X^2)M(Y^2)-M^2(X)M^2(Y)=D^2(XY)\,.$

b) Ha $D^2(XY)=D^2(X)D^2(Y)$, akkor $M^2(X)D^2(Y)+M^2(Y)D^2(X)=0\,.$
$D^2(Y)\neq 0$ és $D^2(X)\neq 0$ implikálja, hogy $M(X)=M(Y)=0$. A megfordítás triviális.

31. $p\sigma_1^2+q\sigma_2^2+pqm_1^2+pqm_2^2-2pqm_1m_2$, ahol $q=1-p$.

32. $\approx\frac{1}{2}$.

33. Pl. $P(X=\varepsilon)=P(X=-\varepsilon)=\frac{1}{2}$, ahol $\varepsilon>0$.

34. $D^2(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{1}x^2f(x)dx+\int\limits_{1}^{\infty}x^2f(x)dx\geq\int\limits_{1}^{\infty}f(x)dx=\frac{1}{2}$.

35. Folytonos esetre bizonyítunk, a diszkrét esetre a bizonyítás hasonló. Az $\int\limits_a^b(x-m)^2f(x)dx\leq\int\limits_a^b(x-c)^2f(x)dx$ Steiner-egyenlőtlenséget alkalmazzuk $c=\frac{a+b}{2}$-re:

$$\sigma^2=\int\limits_a^b(x-m)^2f(x)dx\leq\int\limits_a^b\left(x-\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2f(x)dx=$$

$$=\int\limits_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2f(x)dx+\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2f(x)dx\leq$$

$$\leq\left(a-\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2\int\limits_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)dx+\left(b-\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

36. 25.

37. Nem.

38. *a)* $\approx 0{,}95$; *b)* $\approx 0{,}02$.

39. $\frac{3}{4}(e^{-1}+e^{-3})$.

40. A visszarendelések száma Poisson-eloszlásúnak tekinthető, hiszen a betegséget a lakosságból csak kicsiny eséllyel kapja meg valaki. Ismert k, a módusz. Tudjuk, hogy $[\lambda]=k$, ahol λ az eloszlás paramétere. Ezért $p_0=e^{-\lambda}\geq e^{-(k+1)}$.

41. $\frac{1}{6}$.

42. $\frac{1{,}5^3}{3!}e^{-1{,}5}$.

43. Legyen az X valószínűségi változó az első piros Opel érkezéséig eltelt várakozási idő, ennek eloszlásfüggvénye pedig $F(t)=P(X<t)$. A rögzített t_0 időintervallum alatt a hídon áthaladó piros Opelek száma Poisson-eloszlásúnak tekinthető $\frac{t_0}{3}$ paraméterrel, hiszen kicsiny annak a valószínűsége, hogy a sok piros Opel közül a többitől függetlenül éppen az adott halad át a hídon. Tehát annak valószínűsége, hogy $\frac{t_0}{3}$ idő alatt nem halad át a hídon ilyen autó, $\frac{\left(\frac{t_0}{3}\right)^0}{0!}e^{-\frac{t_0}{3}}$. Vegyük észre, hogy ez a valószínűség éppen $P(X\geq t_0)$. Ebből

$P(X<t_0)=1-e^{-\frac{t_0}{3}}$, az exponenciális eloszlás, $\lambda=\frac{1}{3}$ paraméterrel.

44. Legyen X az a valószínűségi változó, hogy egy óra repülés alatt hány db 3 kg-nál súlyosabb meteorittal találkozik az űrhajó. X Poisson-eloszlásúnak tekinthető, hiszen kicsiny az ütközés valószínűsége, az ütközések függetlenek,

és sok a meteorit. Annak valószínűsége, hogy az űrhajó nem találkozik egy óra alatt ilyen meteorittal, $1-10^{-3}=e^{-\lambda}$, ebből $\lambda \approx 0{,}001$.
Az az Y valószínűségi változó, hogy 100 nap alatt hány 3 kg-nál súlyosabb meteorittal találkozik az űrhajó, szintén Poisson-eloszlású, $100 \cdot 24 \cdot \lambda \approx 2{,}4$ paraméterrel. $P(Y \le n) \ge 0{,}95$, tehát $\sum_{k=0}^{n} \frac{(2{,}4)^k}{k!} e^{-2{,}4} \ge 0{,}95$. Innen $n \ge 5$.

45. $\dfrac{\ln\frac{2}{5}}{\ln 2}$.

46. Tegyük fel, hogy a levél érkezése az (a, b) intervallumban egyenletes. Felhasználva az egyenletes eloszlás várható értékét és szórását, tudjuk, hogy $\frac{a+b}{2}=17$, $\frac{b-a}{\sqrt{12}}=1$. Innen $b-a=\sqrt{12}$, tehát $a=17-\frac{\sqrt{12}}{2}$, $b=17+\frac{\sqrt{12}}{2}$.
Vegyük észre, hogy $16 \in (a, b)$, de $22 > b$. Ezért a kérdezett valószínűség:

$$\int_{16}^{17+\frac{\sqrt{12}}{2}} \frac{1}{\sqrt{12}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{12}}\left(1+\frac{\sqrt{12}}{2}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}.$$

47. e^{-6}.

48. A jövő évben elfogott kábítószercsempészek X száma Poisson-eloszlásúnak tekinthető, hiszen a sok turista között kevés a kábítószercsempész. A várható érték, azaz a paraméter, a feladat szövegéből adódóan: $\lambda=\frac{2\cdot 13}{3}=\frac{26}{3}$. Az *a)* kérdésre a választ az eloszlás 0. tagja, a *b)* kérdésre a $P(X \ge 14)$ valószínűség adja. Tippelnünk pedig az eloszlás móduszára, $\left[\frac{26}{3}\right]=8$-ra érdemes. Ennek bekövetkezte $\dfrac{\left(\frac{26}{3}\right)^8}{8!}e^{-\frac{26}{3}}$ valószínűségű.

49. *c)*.

50. A nagy számok gyenge törvényét alkalmazzuk $n = 150$, $\varepsilon = 0{,}1$ választással:
$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right)>1-\frac{1}{4n\varepsilon^2}$. Itt a jobb oldal értéke $\frac{5}{6}$.

Másrészt, $n = 1000$-re $1-\frac{1}{4\cdot 1000\cdot 0{,}1^2}$ értéke $0{,}975$.

51. $1-\frac{1}{4\cdot 150\cdot\varepsilon^2}\ge 0{,}98$-ból $\varepsilon \ge 0{,}2887$.

52. Legyen A az az esemény, hogy az X folyadékmennyiségnek a várható értéktől való eltérése kevesebb, mint 0,1 dl. Teljes valószínűség tételt alkalmazunk arra az eseményrendszerre, hogy a folyadékot az első (I) vagy a második (II) gép tölti. Ezért $P(A) = P(\mathrm{I}) \cdot P(A \mid \mathrm{I}) + P(\mathrm{II}) \cdot P(A \mid \mathrm{II}) =$
$= 0{,}6\, P(1{,}9 \le X \le 2{,}1 \mid \mathrm{I}) + 0{,}4\, P(1{,}9 \le X \le 2{,}1 \mid \mathrm{II}) =$

$$=0{,}6\left[\Phi\left(\frac{2{,}1-2}{0{,}14}\right)-\Phi\left(\frac{1{,}9-2}{0{,}14}\right)\right]+0{,}4\left[\Phi\left(\frac{2{,}1-2}{0{,}08}\right)-\Phi\left(\frac{1{,}9-2}{0{,}08}\right)\right].$$

Normális eloszlás táblázatot használva, ezen valószínűség értéke közelítőleg 0,63.

53. Ismert, hogy az n-edrendű λ paraméterű gamma eloszlás n darab λ paraméterű exponenciális eloszlás konvolúciója. Ezért a centrális határeloszlás-tétel miatt közelíthető normális eloszlással, ha n nagy. Kihasználva, hogy az exponenciális eloszlás várható értéke és szórása $\frac{1}{\lambda}$, a szóban forgó konvolúció várható értéke $n\cdot\frac{1}{\lambda}$, szórása $\frac{\sqrt{n}}{\lambda}$. Egyúttal ezek a közelítő normális eloszlás paraméterei. $n = 100$, $\lambda = 4$, így $m = 25$, $\sigma = 2{,}5$ és a $(25, 30)$ intervallumba esés valószínűsége:

$$\Phi\left(\frac{30-25}{2{,}5}\right)-\Phi\left(\frac{25-25}{2{,}5}\right)=\Phi(2)-\frac{1}{2}\approx 0{,}4772.$$

54. Jelölje X_i az i-edik számnál fellépő kerekítési hibát. Ekkor $m = 0$, $\sigma=\frac{0{,}1}{\sqrt{12}}$.

$P\left(\left|\sum_{i=1}^{1000} X_i\right|<0{,}2\right)\approx P\left(|Z|<\frac{2}{0{,}091}\right)=2\Phi(2{,}19)-1=0{,}97$, ahol Z a $\sum_{i=1}^{1000} X_i$ standardizáltja.

55. $N(27{,}45, \sqrt{0{,}1446})$ normális eloszlást használva $\approx 0{,}807$.

56. $\approx 0{,}78$.

57. A kifizetés eloszlása közel normális eloszlásúnak tekinthető $m = 60 \cdot 20 = 3000$, $\sigma = \sqrt{60} \cdot 20 = 154{,}8$ paraméterekkel. A $\Phi\left(\dfrac{y-3000}{154{,}8}\right) = 0{,}95$ összefüggésből $y \approx 3256$ tallér.

V.3. Ellenőrző kérdések

58. *a)* Igen; *b)* igen; *c)* igen.
59. *a)* Nem; *b)* nem; *c)* igen; *d)* igen.
60. Átrendezhetőség, ill. szétvághatóság.
61. *a)* Igen; *b)* nem; *c)* igen; *d)* igen.
62. *a)* Nem; *b)* igen; *c)* nem.
63. *a)* Igen; *b)* nem.
64. *a)* Nem; *b)* nem; *c)* nem.
65. *a)* Igen; *b)* igen; *c)* igen.
66. Igen.
67. *a)* Igen; *b)* igen.
68. Nem.

VI. Valószínűségi változó skalárfüggvényének eloszlása és paraméterei ($R^1 \to R^1$ eloszlástranszformáció)

VI.1. Gyakorlófeladatok

1. *a)* Az eloszlás a 0, 1, –1 pontokra koncentrálódik, és szintén egyenletes eloszlás.

b) $M(X^2) = \left(\dfrac{\pi}{4}\right)^2 \dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{3\pi}{4}\right)^2 \dfrac{1}{3} + \pi^2 \dfrac{1}{6}$.

2. $P(Y = k) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X = 3i + k) = \sum_{i=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^{3i+k}}{(3i+k)!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2)$.

3. A sűrűségfüggvény transzformációjának formulája közvetlenül nem alkalmazható, mert a

$$t(x) = \begin{cases} x^4, & \text{ha} \quad x \le 0, \\ x^2, & \text{ha} \quad x > 0 \end{cases}$$

transzformációs függvény nem monoton.

Y eloszlásfüggvényét határozzuk meg az $X \le 0$, $X > 0$ teljes eseményrendszerre felbontva:

$$G(u) = P(Y < u) = P(Y < u \cap X \le 0) + P(Y < u \cap X > 0) =$$
$$= P(X^4 < u \cap X \le 0) + P(X^2 < u \cap X > 0) =$$
$$= F(0) - F(-\sqrt[4]{u}) + F(\sqrt{u}) - F(0) = F(\sqrt{u}) - F(-\sqrt[4]{u}),$$

ahol F az X eloszlásfüggvénye és $0 \le u \le 1$.

Tehát $G(u) = \dfrac{(\sqrt{u})^3}{2} - \dfrac{(-\sqrt[4]{u})^3}{2}$. Így a sűrűségfüggvény:

$$g(u) = G'(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}u^{-\frac{7}{4}}\right) \quad (0 \le u \le 1).$$

4. Teljesülnek a sűrűségfüggvény-transzformációs képlet akalmazhatóságának feltételei: $t(x) = e^{-x} (x \ge 0)$, $t^{-1}(y) = -\ln y \, (0 \le y \le 1)$, $f(x) = e^{-x} (x \ge 0)$.

Így

$$g(y)=e^{-(-\ln y)}\cdot\left|-\frac{1}{y}\right|=1,\quad \text{ha}\quad 0\le y\le 1,$$

tehát Y egyenletes eloszlású (0, 1)-en.

5. *a)* Sűrűségfüggvény-transzformációt alkalmazva:

$t(x)=\sin x$, $\quad t^{-1}(y)=\arcsin y\ (-1\le y\le 1)$, $\quad f(x)=\frac{1}{\pi}$, így

$$g(y)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\quad(-1\le y\le 1).$$

b) Legyen $Y=\sin X$. Ekkor $M(Y)=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)\frac{1}{\pi}\,dx=0$,

$$M(Y^2)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x)\frac{1}{\pi}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}\frac{1}{\pi}\,dx=\frac{1}{2},$$

$D^2(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)$, így $D(Y)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

6. Tekintettel az $X<0$ és $X\ge 0$ teljes eseményrendszerre:
$G(u)=P(X^+<u)=P(X<0\cap X^+<u)+P(X\ge 0\cap X^+<u)=$
$=P(X<0)+P(0\le x<u)=F(0)+F(u)-F(0)=F(u)$, ha $u>0$,
továbbá $G(u)=0$, ha $u\le 0$.

7. *a)* Mivel $|x|$ nem monoton, így a sűrűségfüggvény-transzformációt csak intervallumokra bontva alkalmazhatnánk. Alkalmazható viszont az eloszlásfüggvény transzformációja:

$G(y)=0\quad(y\le 0)$ és $G(y)=P(|X|<y)=2\,\Phi(y)-1\quad(y>0)$,

ahol $\Phi(y)$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

b) $M(|X|)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|x|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=2\int_{0}^{\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ nem létezik, hiszen

$$\int_{0}^{\varepsilon}\frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\ge\int_{0}^{\varepsilon}\frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}}dx=+\infty.$$

8. Az $X=R^2\pi$ terület exponenciális eloszlású. $R=\sqrt{\dfrac{X}{\pi}}$ eloszlását kell meghatározni. Sűrűségfüggvény-transzformációt alkalmazva:

$t(x)=\sqrt{\dfrac{x}{\pi}}$, $\quad t^{-1}(y)=y^2\pi$, $\quad f(x)=5e^{-5x}\ (x\ge 0)$. Így

$g(y)=5e^{-5y^2\pi}2y\pi\ \ (y\ge 0)$ a keresett eloszlás sűrűségfüggvénye.

9. A másodrendű, $\frac{1}{2}$ paraméterű binomiális eloszlás valószínűségértékei: $\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}$. Könnyű azonban ellenőrizni, hogy a negyedrendű, $\frac{1}{3}$ paraméterű binomiális eloszlás értékeiből nem lehet pl. $\frac{1}{2}$ valószínűséget komponálni összeadással. Így a diszkrét valószínűségeloszlások transzformációjának definíciója szerint nem létezik a keresett transzformáció.

10. *a)* X^2 eloszlását sűrűségfüggvény-transzformációval határozzuk meg:

$t(x)=x^2$, $\quad t^{-1}(y)=\sqrt{y}\ \ (0\le y\le 1)$. Így

$$g(y)=14(\sqrt{y})^{13}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}=7y^6\quad(0\le y\le 1).$$

b) Így a μ mediánra:

$$\int_0^{\mu}7y^6\,dy=\frac{1}{2},\ \text{amiből}\ \mu=\sqrt[7]{0{,}5}.$$

c) $m = M(X) = \int_0^1 x\cdot 14x^{13}dx = \frac{14}{15}$.

Az átlagos abszolút ingadozás:

$$\int_0^1 |x-m|\cdot 14x^{13}dx = \int_0^m (m-x)\cdot 14x^{13}dx + \int_m^1 (x-m)\cdot 14x^{13}dx =$$

$$= m\left[x^{14}\right]_0^m - \left[\frac{14}{15}x^{15}\right]_0^m - m\left[x^{14}\right]_m^1 + \left[\frac{14}{15}x^{15}\right]_m^1 = 2m^{15}\left(1-\frac{14}{15}\right),$$

ahol $m = \frac{14}{15}$.

11. A centrális határeloszlás-tétel értelmében $\sum_{i=1}^{1000} X_i^2 = Y$ közel normális eloszlású. Várható értéke $1000M(X_i^2)$, szórása $\sqrt{1000}D(X_i^2)$, ahol

$$M(X_i^2) = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3},\quad D^2(X_i^2) = M(X_i^4) - M^2(X_i^2),$$

$$M(X_i^4) = \int_0^1 x^4dx = \frac{1}{5},\quad \text{így}\quad D(X_i^2) = \frac{2}{3\sqrt{5}}.$$

Standardizálva az Y valószínűségi változót, kapjuk, hogy

$$P\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i^2 > 350\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{350 - 1000\cdot\frac{1}{3}}{\frac{20}{3}\sqrt{2}}\right) \approx 0{,}9616.$$

12. A helyes tippelés a medián: $1 - e^{-2\mu} = \frac{1}{2}$. Innen $\mu = \frac{\ln 2}{2}$.

A tippelésnél elkövetett hiba:

$$\int_0^\infty |x-\mu| 2e^{-2x}dx = \int_0^\mu (\mu - x)2e^{-2x}dx + \int_\mu^\infty (x-\mu)2e^{-2x}dx.$$

13. Az egyenlőség a $\int_{-\infty}^{\infty} t(x)f(x)dx = M(t(X))$ összefüggésből következik, ahol $t(x) = x^3$ és $M(t(x))$ kiszámítására a várható érték definícióját és az $f(x)$ sűrűségfüggvény t szerinti transzformáltjának $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}f(\sqrt[3]{x})$ formuláját használjuk: $M(t(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}f(\sqrt[3]{x})dx$.

Megjegyzés: helyettesítéses integrált használva, $u = x^3$ helyettesítéssel kapjuk a jobb oldalt a bal oldalból.

14. A feladat modellezhető úgy, hogy tekintve az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokon az egyenletes eloszlást, ez transzformálódik a –1, –2 és 5 pontokra úgy, hogy a transzformált eloszlás valószínűségértékei rendre: $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$.

A várható érték: $-1\cdot\frac{1}{6} - 2\cdot\frac{1}{3} + 5\cdot\frac{1}{2} = \frac{10}{6}$.

A szórásnégyzet: $(-1)^2\cdot\frac{1}{6} + (-2)^2\cdot\frac{1}{3} + (5)^2\cdot\frac{1}{2} - \left(\frac{10}{6}\right)^2 = \frac{101}{9}$, a szórás $\frac{\sqrt{101}}{3}$.

15. A kedvezményes járatra jelentkezők száma Poisson-eloszlással modellezhető $\lambda = 3$ paraméterrel. Ez az eloszlás transzformálódik a

$$t(k) = \begin{cases} 0, & \text{ha}\quad k \le 5, \\ k-5, & \text{ha}\quad k > 5 \end{cases}\quad \text{transzformációval.}$$

Így a transzformált eloszlás valószínűségértékei: $\sum_{k=0}^{5}\frac{3^k}{k!}e^{-3}$, ha $n = 0$, $\frac{3^{n+5}}{(n+5)!}e^{-3}$, ha $n > 0$ (tehát az eloszlás a $0, 1, 2, 3, \ldots$ pontokra koncentrálódik).

16. Az s út az X időnek $s = \frac{g}{2}X^2$ szerinti transzformáltja, ahol X $N(6,\ 0{,}1)$ eloszlásúnak tekinthető.

a) $t(x) = \frac{g}{2}x^2$, $t^{-1}(y) = \sqrt{\frac{2}{g}y}$, $f(x) = \frac{1}{0{,}1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-6)^2}{2\cdot 0{,}1^2}}$,

$$g(y)=\frac{1}{0{,}1\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\sqrt{\frac{2}{g}y}-6\right)^2\frac{1}{2\cdot 0{,}1^2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{g}}\frac{1}{2\sqrt{y}}\quad (y\ge 0).$$

b) $M\left(\frac{g}{2}X^2\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{g}{2}x^2 f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{g}{2}(u+6)^2 f(u+6)du$. Utóbbi:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{g}{2}(u^2+36+12u)\frac{1}{0{,}1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2\cdot 0{,}1^2}}du=\frac{g}{2}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u^2\frac{1}{0{,}1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2\cdot 0{,}1^2}}du+\right.$$

$$\left.+36\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{0{,}1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2\cdot 0{,}1^2}}du+12\int\limits_{-\infty}^{\infty}u\frac{1}{0{,}1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2\cdot 0{,}1^2}}du\right)=\frac{g}{2}\cdot 0{,}1^2+\frac{g}{2}\cdot 36+0,$$

ahol az utolsó egyenlőségnél felhasználtuk, hogy az $N(6,\ 0{,}1)$ eloszlás valószínűségeloszlás.
Másik megoldás:

$$M\left(\frac{g}{2}X^2\right)=\frac{g}{2}M(X^2)=\frac{g}{2}(D^2(X)+M^2(X))=\frac{g}{2}(0{,}1^2+6^2).$$

17. Az ajtó és a küszöbnek megfelelő 1 m-es hosszúságok egyenlő szárú háromszöget alkotnak, melynek csúcsnál lévő φ szögéről tehát tudjuk, hogy egyenletes eloszlású valószínűségi változó $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$-ben.

Modellezzük úgy a feladatot, hogy jószágunk akkor nem tud besurranni az ajtón, ha „szélessége”, s, nagyobb, mint a nyitott ajtó és a vele nem szomszédos ajtófélfa távolsága. Ha a küszöbbel bezárt szög φ, akkor ezen esemény valószínűségére: $P(\sin\varphi<s)=\frac{4}{5}$. Innen $P(\varphi<\arcsin s)=\frac{4}{5}$. Kihasználva, hogy φ egyenletes $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$-ben $P(\varphi<\arcsin s)=\frac{2}{\pi}\arcsin s=\frac{4}{5}$, tehát $s=\sin\frac{2\pi}{5}$.

18. Ha az x tengellyel bezárt szög ψ, akkor az y tengelyen vett vetület hossza $\sin|\psi|$, ahol ψ egyenletes eloszlású $(0,\ 2\pi)$-ben.

a) Sűrűségfüggvény-transzformációt közvetlenül nem alkalmazhatunk, mert nem létezik az adott intervallumon inverz függvény. Meghatározzuk a transzformált eloszlás $G(y)$ eloszlásfüggvényét:

Szimmetriaokok miatt, $P(|\sin\psi|<y)=P(\sin\psi<y)$, ahol ψ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$-ben egyenletes $(0\le y\le 1)$.

$P(\sin\psi<y)=P(\psi<\arcsin y)=\frac{2}{\pi}\arcsin y$. Tehát

$G(y)=\frac{2}{\pi}\arcsin y\ (0\le y\le 1)$ és $g(y)=G'(y)$.

b) A várható érték: $\int\limits_0^1 y\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy=\left[-\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$.

Másik megoldás (eloszlástranszformáció nélkül):

$$\int\limits_0^{2\pi}|\sin\psi|\frac{1}{2\pi}d\psi=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\psi\frac{1}{2\pi}d\psi=\frac{2}{\pi}.$$

19. *a)* A nyert diszkrét eloszlás: $P(X=k)=\int\limits_{k-0{,}5}^{k+0{,}5}\lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda(k-0{,}5)}-e^{-\lambda(k+0{,}5)}$,
ha $k=1,2,3,\ldots$ és $P(X=0)=1-e^{-\lambda\cdot 0{,}5}$.

b) $M(X)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k(e^{-\lambda(k-0{,}5)}-e^{-\lambda(k+0{,}5)})=\sum\limits_{k=1}^{\infty}ke^{-\lambda k}(e^{0{,}5\lambda}-e^{-0{,}5\lambda})=$

$$=\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}(e^{0{,}5\lambda}-e^{-0{,}5\lambda})\sum_{k=1}^{\infty}k(e^{-\lambda})^{k-1}(1-e^{-\lambda})=$$

$$=\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}2\,\mathrm{sh}(0{,}5\lambda)\frac{1}{e^{-\lambda}}=\frac{2\,\mathrm{sh}(0{,}5\lambda)}{1-e^{-\lambda}},$$

ahol felhasználtuk a geometriai eloszlás várható értékének képletét.

20. Az X élettartam α paraméterű exponenciális eloszlással modellezhető. A transzformált eloszlás $(0,\ 1)$-re koncentrálódik. Eloszlásfüggvénye:

$$G(u)=P(X-[X]<u)=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_k^{k+u}\alpha e^{-\alpha x}dx=\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha e^{-\alpha k}-\alpha e^{-\alpha(k+u)})=$$

$$= \alpha(1-e^{-\alpha u})\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha k} = \alpha(1-e^{-\alpha u})\frac{1}{1-e^{-\alpha}} \quad (0 \le u \le 1).$$

21. Legyen φ a sorompónak a vízszintessel bezárt szöge egy véletlen időpillanatban. Ekkor φ eloszlása kevert: a 0-n $\frac{1}{2}$, a $\frac{\pi}{2}$-n $\frac{3}{8}$ valószínűségértékkel, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$-ben pedig φ eloszlása csonkított egyenletes, $\frac{1}{4\pi}$ sűrűségfüggvénnyel.

a) A sorompó végének a földtől való távolságát az $1+3\sin\varphi$ transzformáció eredménye adja. A transzformált eloszlás is kevert. Így az 1 ponton $\frac{1}{2}$, a 4-en $\frac{3}{8}$ valószínűségérték van, a folytonos rész eloszlásfüggvénye pedig

$$G(y) = P(1+3\sin\varphi < y) = P\left(\varphi < \arcsin\frac{y-1}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi}\arcsin\frac{y-1}{3} \quad (1 < y < 4).$$

b) A folytonos rész várható értéke: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+3\sin x)\frac{1}{4\pi}\,dx = \frac{3}{4\pi} + \frac{1}{8}$.

Tehát a várható érték: $1\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} + \frac{1}{8} + 4\cdot\frac{3}{8} \approx 2{,}761$.

22. Tehát a háromszög területe, $\frac{\sin\varphi}{2}$, egyenletes eloszlású $\left(0, \frac{1}{2}\right)$-n. Vegyük észre, hogy $\sin x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ szigorúan monoton eloszlásfüggvény. Az ismert transzformációs tétel értelmében, ha φ eloszlásfüggvénye $\sin x$ lenne, akkor $\sin\varphi$ egyenletes eloszlású lenne (0, 1)-ben. Ebből következik, hogy ekkor $\frac{\sin\varphi}{2}$ eloszlása a $\left(0, \frac{1}{2}\right)$-n lesz egyenletes. Tehát φ keresett eloszlásfüggvénye: $F(x) = \sin x \; \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$.

23. Az $Y=X^3$ eloszlása egyenletes (2, 5)-ben, ezért $\sqrt[3]{Y}$ sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}} \; (\sqrt[3]{2} \le x \le \sqrt[3]{5})$, sűrűségfüggvény-transzformációt alkalmazva.

24. Legyen X a kalkulátorral generált szám.

a) A (0, 1) intervallumot hat egyenlő részre osztjuk, és őket pl. balról jobbra beszámozzuk. $t(X)$ értéke legyen az a sorszám, ahová az X szám esik. $t(X)$ ekkor nyilván egyenletes eloszlású az 1, 2, …, 6 számokon.

b) A (0, 1) intervallumot tíz egyenlő részre osztjuk és az intervallumokat pl. balról jobbra beszámozzuk. $t(X)$ értéke legyen 1, ha X az első vagy második, legyen 2, ha X a harmadik vagy negyedik, legyen 3, ha X az ötödik, hatodik vagy hetedik intervallumba esik, és legyen 4 egyébként.

25. Az ismert transzformációs tétel alapján tudjuk, hogy mivel az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye $1-e^{-\frac{x}{15}}$, így e függvény inverze $-15\ln(1-y)$, a (0, 1)-en vett egyenletes eloszlást az adott exponenciális eloszlásba viszi. Tehát $-15\cdot\ln\left(1-\frac{y}{10}\right)$ viszi a (0, 10)-en vett egyenletes eloszlást az adott exponenciális eloszlásba.

26. A haszon értéke $B\min(x, c) - Ac$. Várható értéke:

$$\int_0^{\infty} B\min(x, c)\lambda e^{-\lambda x}dx - cA = \int_0^{c} Bx\lambda e^{-\lambda x}dx +$$

$$+\int_c^{\infty} Bc\min(x, c)\lambda e^{-\lambda x}dx - cA = B\left[-ce^{-c\lambda} + \frac{1}{\lambda}(1-e^{-c\lambda})\right] + cBe^{-c\lambda} - cA =$$

$$= -\frac{B}{\lambda}(e^{-\lambda c} - 1) - Ac.$$

Utóbbit deriválva c szerint és 0-val egyenlővé téve kapjuk, hogy $c = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{B}{A}$, ahol $\lambda = \frac{1}{3}$.

VI.3. Vegyes feladatok

39.

$$Y=\lim_{n\to\infty}\frac{X^{n+2}}{\sqrt{4^n+X^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}X^2\sqrt{1-\frac{1}{1+\left(\frac{X}{2}\right)^{2n}}}=\begin{cases}X^2, & \text{ha } X>2,\\ \frac{4}{\sqrt{2}}, & \text{ha } X=2,\\ 0, & \text{ha } 0<X<2.\end{cases}$$

A transzformált eloszlás kevert, ugyanis $P(Y=0)=P(X\in(0,2))=1-e^{-4}$.
A folytonos rész eloszlásfüggvénye $P(Y<y)=P(Y=0)+P(4<Y<y)$, ha $Y>4$.
Innen $P(4<Y<y)=P(4<X^2<y)=P(2<X<\sqrt{y})=e^{-4}-e^{-2\sqrt{y}}$.
Az $X=2$ esemény nulla valószínűségű. Ezért Y eloszlásfüggvénye:

$$F(y)=P(Y<y)=\begin{cases}0, & \text{ha } y\le 0,\\ 1-e^{-4}, & \text{ha } 0<y\le 4,\\ 1-e^{-2\sqrt{y}}, & \text{ha } y>4.\end{cases}$$

40. *a)* $\dfrac{1}{4\sqrt{y}}$ $(0\le y\le 4)$; *b)* $\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$.

41. $0<A<1$ esetén kevert.

$P(Y=-1)=1-A$; $P(Y=k)=A(e-1)\,e^{k+1}$ $(k=-2,-3,-4\ldots)$.

42. Y eloszlásfüggvényét határozzuk meg. Tegyük fel, hogy $z>0$. Ha $0<z<c$, akkor

$P(Y<z)=P(X\in(-c,z))+P(-X<-c)=\Phi(z)-\Phi(-c)+1-\Phi(c)=\Phi(z)$.

Ha $z>c$, akkor

$$P(Y<z)=P(X\in(-c,c))+P(-X<-c)+P(c<X<z)=$$

$$=\Phi(c)-\Phi(-c)+1-\Phi(c)+\Phi(z)-\Phi(c)=\Phi(z).$$

A $z<0$ eset hasonlóan vizsgálható. A feladat állítása bármely szimmetrikus eloszlásra általánosítható.

43. $f(x)=\dfrac{1}{2x}$ $(e^{-1}\le x\le e)$.

44. *a)* Nincs; *b)* pl. standard normális.

45. Osszuk fel a (0, 1) intervallumot diszjunkt, rendre a geometriai eloszlás tagjainak megfelelő hosszúságú intervallumokra. Ha az egyenletes eloszlású szám a k-adik intervallumba esik, akkor legyen a transzformáció értéke k.

46. $\dfrac{16}{81}$.

47. *a)* $f(y)=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}\dfrac{1}{\cos^2 y}$ $\left(y\in\left(-\dfrac{\pi}{3},-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$;

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}+\ln\sqrt{2}\right)$;

c) $\operatorname{arc\,tg}\left(-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\approx -0{,}939$.

48. $\Phi\left(\dfrac{3-50c^2}{2c^2}\right)\approx 0{,}2$-ből $c\approx 0{,}25$.

49. Legyenek a mérések: $X_1, X_2, \ldots, X_{1000}$.

a) $\ln(X_1X_2\ldots X_{1000})=\sum_{i=1}^{1000}\ln X_i\approx 1000M(\ln X_i)$ a nagy számok törvénye szerint, ahol $M(\ln X_i)=\int_1^3(\ln x)\frac{1}{2}\,dx=\dfrac{3(\ln 3)-2}{2}$.

b) A centrális határeloszlás-tétel szerint $\sum_{i=1}^{1000}\ln X_i$ közelítőleg $N(m,\sigma)$ eloszlásúnak tekinthető, ahol $m=1000\,M(\ln X_i)\approx 647{,}9$ és

$$\sigma^2=1000D^2(\ln X_i)=1000[M(\ln^2 X)-M^2(\ln X_i)]\approx(9{,}74)^2,$$

ahol $M(\ln^2 X_i)=\int_1^3(\ln^2 x)\frac{1}{2}\,dx$.

50. $P([X]=k)=\int_k^{k+1}\lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda k}-e^{-\lambda(k+1)}=(e^{-\lambda})^k\cdot(1-e^{-\lambda})\,(k=0,1,2,\ldots)$.

Tehát $p=1-e^{-\lambda}$.

51. Egyenletes $(0, 1)$-ben.

52. $\frac{\pi^3}{216}$.

53. *a)* Ha $c\geq 1$, akkor $Y=1$, ezért $M(Y)=1$. Ha $c<0$, akkor nyilván $X>c$, ezért $Y=X-c$ és így: $M(Y)=M(X)-c$. $M(X)=\int_0^1 x2xdx=\frac{2}{3}$, ezért

$M(Y)=\frac{2}{3}-c$.

Ha $0<c<1$, akkor valószínűségi változó függvényének várható értékét számolva:

$$M(Y)=\int_0^c 1\cdot 2xdx+\int_c^1(x-c)\cdot 2xdx=c^2+\left[\frac{2}{3}x^3-cx^2\right]_c^1=\frac{c^3}{3}+c^2-c+\frac{2}{3}.$$

b) $\frac{dM}{dc}=0$-ból $c\approx 0{,}4142$. Ez minimumhely, hiszen a derivált negatívból pozitívba vált.

54. $P(0{,}3\leq\sqrt{X}<0{,}4)=P(0{,}09\leq X<0{,}16)=0{,}07$.

55. *a)* Egyenletes eloszlás a $-2,-1,0,1,2,3$ számokon;
b) egyenletes eloszlás a $0, 6^2, 24^2, 60^2, 120^2, 210^2$ számokon.

56. *a)* -1-en $\frac{2}{3}$, $+1$-en $\frac{1}{3}$ valószínűség van; *b)* $-\frac{1}{3}$; *c)* $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

57. $\frac{a^2}{(4A-40000)^p}$.

58. *a)* $\Phi\left(10^3\sqrt{\frac{6y}{\pi}}-300\right)$, ahol Φ $N(0, 1)$ eloszlásfüggvénye;

b) $\approx 27001\cdot\frac{\pi}{6}$.

59. Tekintsünk egy origó középpontú, a tengelyekkel rendre párhuzamos oldalú négyzetet és egy állandó szögsebességgel mozgó, origóból induló félegyenest, illetve annak a négyzettel közös pontját. Legyen a félegyeneshez tartozó polárszög φ. φ egyenletes eloszlású $(0, 2\pi)$-ben. A négyzet *átlós* szimmetriájára gondolva, nyilván elegendő megadni a legközelebbi saroktól mért távolság eloszlását pl. $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ esetén, azaz $\varphi\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$-re csonkított eloszlását alapul véve az X távolság eloszlásfüggvénye:

$F(x)=0$, ha $x\leq 0$, és $F(x)=1$, ha $x\geq 3$. Ha $0\leq x\leq 3$, akkor

$$F(x)=P(X<x)=P(3-3\operatorname{tg}\varphi<x)=P\left(\frac{3-x}{3}<\operatorname{tg}\varphi\right)=$$

$$=P\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{3-x}{3}<\varphi\right)=\frac{\frac{\pi}{4}-\operatorname{arc\,tg}\frac{3-x}{3}}{\frac{\pi}{4}}\quad(0\leq x\leq 3).$$

Innen a sűrűségfüggvény: $f(x)=F'(x)=\frac{4}{3\pi}\frac{1}{1+\left(\frac{3-x}{3}\right)^2}\quad(0\leq x\leq 3)$.

60. *a)* $f(y)=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$; *b)* $\frac{2}{5}$.

61. Legyen a félkör az origó középpontú egységkör $y\geq 0$ köríve, φ pedig jelölje a szokásos polárszöget. Ekkor a szóban forgó háromszög Z magassága $\sin\varphi$, ahol φ egyenletes eloszlású $(0, \pi)$-ben. Szimmetria miatt feltehető, hogy $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, tehát elég a $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$-re csonkított eloszlást vizsgálni. A magasság eloszlásfüggvénye:

$$P(Z<m)=P(\sin\varphi<m)=P(\varphi<\arcsin m)=\frac{2}{\pi}(\arcsin m)\quad(0\leq m\leq 1).$$

Innen a $P(Z<m)$ valószínűség $m\leq 0$-ra 0, $m\geq 1$-re pedig 1.

62. $5-4=1$.

63. *a)* $\frac{1}{2\sqrt{y-1}}\;(y\in(1,2))$; *b)* $\frac{4}{3}$; *c)* $\frac{2}{\sqrt{45}}$.

64. Legyen az intervallum középpontjának az origótól való távolsága X, az intervallum és (0, 7) közös részének hossza pedig Y. A t transzformációfüggvény a következő:

$$Y=\begin{cases}1+X, & \text{ha } 0<X\le 1,\\ 2, & \text{ha } 1<X\le 6,\\ 8-X, & \text{ha } 6<X\le 8,\\ 0, & \text{ha } 8<X<10.\end{cases}$$

A transzformált eloszlás kevert: ugyanis $P(Y=0)=0{,}2$, $P(Y=2)=0{,}5$.

Ha $0<y<1$, akkor $P(0<Y<y)=P(0<8-X<y)=\mathrm{P}(8-y<X<8)=\frac{y}{10}$.

Ha $1<y<2$, akkor $P(1<Y<y)=P(0<X\le 1)P(1<1+X<y\,|\,0<X\le 1)+$
$+P(6<X\le 8)P(1<8-X<y\,|\,6<X\le 8)=P(0<X<y-1\,|\,0<X\le 1)+$
$+P(8-y<X<7\,|\,6<X\le 8)=\frac{y-1}{10}+\frac{y-1}{10}=\frac{y-1}{5}$.

Ebből a folytonos rész $f(y)$ sűrűségfüggvénye:

$$f(y)=\begin{cases}0{,}1, & \text{ha } 0<y\le 1,\\ 0{,}2, & \text{ha } 1<y<2.\end{cases}$$

65. *a)* A transzformáló függvény $t(x)=|x|$, $x\in(-k,k)$. Az Y kimeneti feszültség $F(y)$ eloszlásfüggvénye:

$$F(y)=0,\text{ ha } y\le 0,\quad F(y)=P(Y<y)=P(-y<X<y)=\frac{2y}{2k}=\frac{y}{k},$$

ha $y>0$.

b) A transzformált eloszlás kevert lesz:

$$P(Y=0)=\frac{2(k-a)}{2k}=\frac{k-a}{k}\text{ és } P(0<Y<y)=\frac{2y}{2k},\text{ ha } 0<y<a,\text{ ezért a}$$

folytonos rész sűrűségfüggvénye: $f(y)=\frac{1}{k}$, ha $0<y<a$.

66. *a)* $t(x)=5x+5,\ x\in(0,1)$; *b)* $t(x)=-\frac{\ln(1-x)}{5}$.

67. Nem.

68. $\sum_{k=0}^{\infty}|k-5|\frac{5^k}{k!}e^{-5}\approx 1{,}755$.

69. Legyen X a napi kereslet. Ekkor a gombaárus Y haszna:

$$Y=\begin{cases}140X-100c, & \text{ha } x\le c,\\ 40c, & \text{ha } c<x.\end{cases}$$

Az Y valószínűségi változó X-nek transzformáltja, így a transzformált eloszlás $m(c)$ várható értékére:

$$m(c)=\int_{-\infty}^{c}(140x-100c)f(x)dx+\int_{c}^{\infty}140cf(x)dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{c}140xf(x)dx-100cF(c)+40c(1-F(c)).$$

Ebből $m'(c)=40-140F(c)$. Így $m'(c)$ ott 0, ahol $F(c)=\frac{2}{7}$, ahonnan $c\approx 1{,}63$.

Látható, hogy c-ben valóban maximum van, hiszen a derivált előjelet vált pozitívból negatívba.

70. *a)* $\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{x}{2}\quad(0\le x\le 2)$;

b) a „kedvező" pontok és az „összes" pontok alkotta felszínek hányadosát véve: $\frac{x^2}{4}\quad(0\le x\le 2)$, egyébként 0, ill. 1.

VI.4. Ellenőrző kérdések

71. Nem.
72. Nem.
73. Nem.
74. *a)* Nem; *b)* igen; *c)* nem.
75. Igen.
76. Igen.
77. *a)* Nem; *b)* nem.
78. *a)* Igen; *b)* igen; *c)* igen.
79. Igen.
80. *a)* Nem; *b)* igen; *c)* nem; *d)* nem.
81. *a)* Igen; *b)* nem; *c)* igen; *d)* nem.

VII. Kétdimenziós valószínűségi változók eloszlása (eloszlások R^2-n)

VII.1. Gyakorlófeladatok

1. Y eloszlása a $-1, 2$ pontokon $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$; X eloszlása a $-1, 2, 2$ pontokon $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$. A szorzateloszlás értéke az $X = 2$ koordinátájú pontokban 0, a fennmaradó négy ponton az eloszlás egyenletes: $\frac{1}{4}$. A szorzateloszlás nem az eredeti eloszlás, így a megadott eloszlás nem szorzateloszlás.

$$P(X+Y=1)=\frac{1}{3}+\frac{2}{6}=\frac{2}{3}.$$

2. A két binomiális eloszlás szorzateloszlása megfelel a követelményeknek.

3. Ekkor

$$g(y)=\int_{-1}^{+1}\frac{1}{4}(1+xy(x^2-y^2))dx=\frac{1}{4}\left[x+\frac{x^4}{4}\cdot y-\frac{x^2}{2}\cdot y^3\right]_{-1}^{+1}=\frac{1}{2},$$

$f(x)$ meghatározása hasonló.

4. *a)* $P(X+Y<1)=1-P(X+Y\geq 1)$. $P(X+Y\geq 1)=\int_c^1\left(\int_{1-x}^{x^2}\frac{1}{\sqrt{y}}dy\right)dx,$

ahol c az $y = 1 - x$ és $y = x^2$ metszéspontja és pozitív, tehát $c=\sqrt{5}-1$.

$$\int_c^1[2\sqrt{y}]_{1-x}^{x^2}dx=\int_c^1(2x-2\sqrt{1-x})dx=$$

$$=\left[x^2+\frac{4}{3}\cdot(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_c^1=1-c^2-\frac{4}{3}\cdot(1-c)^{\frac{3}{2}}.$$

b) $f(x)=\int_0^{x^2}\frac{1}{\sqrt{y}}dy=[2\sqrt{y}]_0^{x^2}=2x$, ha $x\in(0,1)$.

$g(y)=\int_{\sqrt{y}}^1\frac{1}{\sqrt{y}}dx=\frac{1}{\sqrt{y}}(1-\sqrt{y})=\frac{1}{\sqrt{y}}-1$, ha $y\in(0,1)$.

X és Y nem független, hiszen a peremek szorzata nem egyezik meg az együttes eloszlással.

5. *a)* Azt kapjuk, hogy

$F(x)=P(X<x)=\lim\limits_{y\to\infty}H(x,y)=1-e^{-x}$ $(x>0)$, $G(y)$ hasonló.

Mivel $H(x,y)=F(x)\cdot G(y)$, így X és Y függetlenek.
Másik megoldás: az együttes sűrűségfüggvény kiszámítható deriválással, majd abból integrálással meghatározhatók a peremsűrűség-függvények.

b) X és Y függetlensége miatt

$P(X<1,\ Y<1)=H(1,1)=F(1)\cdot G(1)=(1-e^{-1})^2$.

6. *a)* Nem lehetnek függetlenek, hiszen az együttes eloszlás nem téglatartományra koncentrálódik (nem peremeloszlások szorzateloszlása).

b) $H(u,v)=P(X<u,Y<v)=\int_0^u\int_0^v 24xy\,dy\,dx=$

$$=\int_0^u 12xv^2dx=6u^2v^2\quad(u+v\leq 1,\quad u,v\geq 0).$$

Ha $v\geq 1$ és $0\leq u\leq 1$, akkor

$$H(u,v)=1-\int_u^1\int_0^{1-u}24xy\,dy\,dx=1-\int_u^1 24x\frac{(1-u)^2}{2}dx=1-6(1-u)^2(1-u^2).$$

Hasonlóan, ha $u\geq 1$ és $0\leq v\leq 1$, akkor $H(u,v) = 1-6(1-v)^2(1-v^2)$.
Ha $0\leq u\leq 1$ és $0\leq v\leq 1$, $u+v\leq 1$, akkor
$H(u,v) = 1-6(1-u)^2(1-u^2)-6(1-v)^2(1-v^2)$.

7. Az együttes eloszlásfüggvény: $H(x,y)=(1-e^{-3y})\frac{x^2}{4}$. Ebből kétszeri parciális deriválással $h(x,y)=3e^{-3y}\frac{x}{2}$ $(0\leq x\leq 2,\ y>0)$.

8. Figyelembe véve, hogy a standard normális eloszlás körszimmetrikus, továbbá valószínűségeloszlás, így a szögtartományba esés valószínűsége $\frac{\gamma}{2\pi}$.

9. A peremeloszlások rendre: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, illetve $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ (összegzéssel). Az adott eloszlás ezek szorzateloszlása, így a koordináták függetlenek.

10. $f(x) = \int_0^x 10e^{-2x-3y}dy = e^{-2x}\frac{10}{3}\int_0^x 3e^{-3y}dy = e^{-2x}\frac{10}{3}(1-e^{-3x})\ (x \geq 0)$,

nem exponenciális, de

$$g(y) = \int_y^\infty 10e^{-2x-3y}dx = 5e^{-3y}\int_y^\infty 2e^{-2x}dx = 5e^{-3y}e^{-2y} = 5e^{-5y} \quad (y \geq 0)$$

exponenciális sűrűségfüggvény.

11. *a)* Az x tengelyen a vetület sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{2x}{y}dy = 2x\left(\ln\frac{1}{x} - \ln x\right) = -4x\ln x \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Az y tengelyen a vetület sűrűségfüggvénye:

$$g(y) = \int_0^y \frac{2x}{y}dx = y, \text{ ha } 0 \leq y \leq 1 \text{ és } g(y) = \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{2x}{y}dx = \frac{1}{y^3}, \text{ ha } 1 \leq y.$$

b) $\int_0^1\int_0^y \frac{2x}{y}dx\,dy = \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{2}$.

12. *a)* A sűrűségfüggvény tehát $c\sqrt{x^2+y^2}$ alakú. A K körlapon:

$$\iint_K c\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{2\pi} c\cdot r\cdot r\cdot d\varphi\,dr = c\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{3} = 1. \text{ Ebből } c = \frac{3}{2\pi}.$$

b) A sűrűségfüggvény $c(1-\sqrt{x^2+y^2})$ alakú. A K körlapon:

$$\iint_K c(1-\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{2\pi} c(1-r)r\,d\varphi\,dr = 2\pi c\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right] = 1.$$

Ebből $c = \frac{3}{\pi}$.

13. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a cél origó középpontú, egység sugarú kör. Ekkor a függetlenség miatt
$P(|X|<0,5\,;\ |Y|<0,5) = P^2(|X|<0,5)$.
X eloszlása a körlapon vett egyenletes eloszlás vetületeloszlása:

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1). \text{ Így}$$

$$\int_{-0,5}^{0,5} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_0^{0,5}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2}{\pi}\cos^2 u\,du = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2u+1)du =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\pi} + \frac{1}{3}.$$

Tehát a keresett valószínűség: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi}+\frac{1}{3}\right)^2 \approx 0,37$.

14. Kétdimenziós intervallumon két egydimenziós intervallum direkt szorzatát értjük, tehát $I = [a, b) \times [c, d)$-t, ahol a, b, c, d végtelen is lehet. Ahhoz, hogy az I-be esés valószínűségét megkapjuk, $F(b, d)$-ből levonjuk $F(b, c)$-t és $F(a, d)$-t, majd mivel $F(a, c)$-t kétszer vontuk le, egyszer hozzá is kell adni az eredményhez. Tehát $P(I) = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)$.

15. Helyezzük a háromszöget az x tengelyre, szimmetrikusan. Ekkor az y tengelyen lévő magasságvonalra eső vetület:

$$g(y) = \int_{\frac{y}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\frac{y}{\sqrt{3}}} \frac{4}{\sqrt{3}}dx = \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot(\sqrt{3}-2y) \quad \left(0 \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$ Mivel az eloszlás nem téglatartományra koncentrálódik, így a derékszögű koordináták nyilván nem függetlenek.

16. $\frac{1}{n}[(X_1, Y_1) + (X_2, Y_2) + \ldots + (X_n, Y_n)]$ eloszlása közelítőleg – a többdimenziós centrális határeloszlás-tétel miatt – kétdimenziós normális eloszlás.

17. Az R sugarú körlapon az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye $h(x,y) = \frac{1}{R^2\pi}$, ha $(x,y) \in R$, 0 egyébként. A kis kör akkor van benne a nagy körben, ha középpontja az R sugarú körrel koncentrikus $R-r$ sugarú körlapra esik. Ennek valószínűsége: $\frac{(R-r)^2}{R^2}$.

18. A szorzástételt alkalmazva:

$$P(X=k,\ Y=m) = P(X=k)\cdot P(Y=m \mid X=k) =$$

$$= \binom{6}{k}(0{,}5)^k(0{,}5)^{6-k}\binom{k}{m}\left(\frac{1}{3}\right)^m\left(\frac{2}{3}\right)^{k-m} =$$

$$= \binom{6}{k}\binom{k}{m}(0{,}5)^6\cdot 2^{k-m}\left(\frac{1}{3}\right)^k \quad (k \ge m,\ 1 \le k \le 6).$$

19. A klasszikus képletet alkalmazva:

a) $P(Y=k) = \dfrac{(k-1)(6-k)}{\binom{6}{3}}$ $(k = 2, 3, 4, 5)$.

b) $P(X=k,\ Z=m) = \dfrac{m-1-k}{\binom{6}{3}}$ $(k = 1, 2, 3, 4;\ m = k+2, \ldots, 6)$.

20. Csak akkor határozható meg, ha függetlenséget tételezünk fel a két városban bekövetkezett balesetek számai között (pl. az esetlegesen hasonló időjárási viszonyokra nem vagyunk tekintettel).
Függetlenség feltételezése esetén a két városban összesen bekövetkezett balesetek száma $40 + 10 = 50$ paraméterű Poisson-eloszlás. Azonban a két városban együttesen bekövetkező koccanások száma a függetlenség feltételezése nélkül is *modellezhető* Poisson-eloszlással, jó közelítéssel.

21. Modellezzük a cukor súlyát $N(400, 10)$, a csomagolás súlyát $N(10, 0{,}5)$ eloszlással. Függetlenséget tételezhetünk fel e két súly között, így az együttes eloszlás eloszlásfüggvénye a két egydimenziós eloszlásfüggvény szorzata.

22. *a)* (X, Y, Z, U) eloszlása negyedrendű polinomiális eloszlás $n = 8$, $\left(\frac{4}{14}, \frac{3}{14}, \frac{5}{14}, \frac{2}{14}\right)$ paraméterekkel.

b) Binomiális eloszlás $n = 8, p = \frac{4}{14}$ paraméterekkel.

23. A peremeloszlás az x tengelyen:

$$f(x) = \int_0^1 2(x^3 + y^3)\,dy = 2\left(x^3 + \frac{1}{4}\right) \quad (0 \le x \le 1).$$

Hasonlóan, az y tengelyen vett peremeloszlás: $g(y) = 2\left(y^3 + \frac{1}{4}\right)$ $(0 \le y \le 1)$.

(X, Y) együttes eloszlása a függetlenség miatt a szorzateloszlás.

Az $X^2 < Y$ eseményt reprezentáló síkbeli halmazba esés valószínűsége:

$$\int_0^1\int_{x^2}^1 2\left(x^3 + \frac{1}{4}\right)\cdot 2\left(y^3 + \frac{1}{4}\right)dy\,dx = \int_0^1 2\left(x^3 + \frac{1}{4}\right)2\left(\frac{1}{2} - \frac{x^8}{4} - \frac{x^2}{4}\right)dx = \frac{23}{36}.$$

24. Legyenek az érkezési időpontok az X és Y valószínűségi változók. Az $|X-Y|$ valószínűségi változó eloszlását kellene meghatározni, de ez az együttes eloszlás ismerete nélkül nem lehetséges.

Ha függetlenséget feltételezünk, akkor $h(x,y) = \frac{1}{15^2}$, ha $0 \le x,\ y \le 15$.

A várakozási idő eloszlásfüggvénye:

$$G(z) = P(|X-Y| < z) = \frac{1}{15^2}[15^2 - (15-z)^2] \quad (0 \le z \le 15).$$

25. Legyen a négyzet a $[0, 1] \times [0, 1]$ négyzet a síkon. Szimmetriaokokból feltételezhetjük, hogy csak az $y = 0$ oldalon történhet bemetszés és szöge 0 és $\frac{\pi}{2}$ közé esik, ahol a szög legyen az x tengellyel bezárt szög. Rögzített φ szögre, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ esetén, mindenképpen lemetszünk háromszöget, ennek valószínűsége $\frac{1}{2}$. Ha $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, a bemetszés akkor kedvező (nem ad háromszöget), ha az origó és az $r = 1 - \operatorname{ctg}\varphi$ közötti szakaszra kerül.

Tekintsük a (φ, r) vektorváltozót, ahol r jelenti a szóban forgó szakasz hosszát. φ és r függetlenek, együttes eloszlásuk sűrűségfüggvénye: $\frac{2}{\pi}$.

A „kedvező” (φ, r) pontokat reprezentáló síkbeli tartományba esés valószínűsége:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{1-\operatorname{ctg}\varphi} \frac{2}{\pi}\,dr\,d\varphi = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1-\operatorname{ctg}\varphi\, d\varphi = \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{4} - [\ln\sin\varphi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}279\,.$$

Tehát a kérdezett valószínűség: $\frac{1}{2} + 0{,}279 = 0{,}779$.

26. Legyen X az egyórás, Y a kétórás rakodási idejű teherhajó érkezési időpontja. Tekintsük az (X, Y) vektorváltozót a $0 \le x,\ y \le 24$ négyzeten, valamint a szóban forgó esemény bekövetkezését reprezentáló K ponthalmazt az $X < Y$ esetben. Akkor nem kell várni a rakodásra, ha $Y - X > 1$. $Y < X$ esetben akkor nem kell várni a rakodásra, ha $X - Y > 2$. A függetlenség miatt az együttes sűrűségfüggvény $\frac{1}{24^2}$. A keresett valószínűség arányos K területével, tehát: $P(K) = \frac{1}{24^2}\left[\frac{22^2}{2} + \frac{23^2}{2}\right]$.

27. A botot egységnyi hosszúságúnak feltételezve, tegyük fel, hogy az X és Y helyeken törjük el. A függetlenség miatt X és Y együttes eloszlása a szorzateloszlás: tehát egyenletes eloszlás a $0 \le x,\ y \le 1$ négyzeten. Az $|X-Y| > 0{,}5$ feltételt reprezentáló halmazba esés valószínűsége ezen egyenletes eloszlás szerint: $(0{,}5)^2 = 0{,}25$.

28. A gyökök akkor komplex számok, ha $b^2 - 4c < 0$. Tekintve a (b, c) vektorváltozót, a $b^2 - 4c < 0$ feltétel valószínűsége:

$$\frac{1}{16}\left(16 - \int_0^4 \frac{b^2}{4}\,db\right) = \frac{2}{3}\,.$$

29. A függetlenség miatt a két izzó élettartamának, X és Y együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye hónapban: $h(x,y) = \frac{1}{12}e^{-\frac{x}{12}}\cdot\frac{1}{12}e^{-\frac{y}{12}}$ $(x, y \ge 0)$.

Azt az eseményt, hogy a két izzó azonos hónapban ég ki, a következő K halmaz reprezentálja: $K = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, ahol $A_k = \{(x,y) : k \le x, y \le k+1\}$ reprezentálja azt, hogy az izzók a k-adik hónapban égnek ki. Ezért

$$P(K) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1}\int_k^{k+1} \frac{1}{12}e^{-\frac{1}{12}x}\cdot\frac{1}{12}e^{-\frac{1}{12}y}\,dy\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-\frac{1}{12}k} - e^{-\frac{1}{12}(k+1)}\right)^2 =$$

$$= \left(1 - e^{-\frac{1}{12}}\right)^2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-\frac{1}{12}}\right)^{2k} = \left(1 - e^{-\frac{1}{12}}\right)^2\frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{6}}}\,.$$

30. *a)* (R, Φ) eloszlása szorzateloszlás. Eloszlásfüggvénye:

$$F(r,\varphi) = \frac{r}{1+r}\cdot\frac{\varphi}{\pi}\quad (r > 0,\ 0 \le \varphi \le \pi)\,.$$

b) $P\left(R < 1,\ \Phi < \frac{\pi}{2}\right) = F\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1+1}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

31. Legyen a két választott osztópont X, ill. Y. Tegyük fel, hogy $X < Y$. A háromszög szerkesztésének feltétele, hogy a keletkező szakaszok kielégítsék a háromszög-egyenlőtlenségeket. A három háromszög-egyenlőtlenségből kapjuk rendre, hogy $X < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < Y$ és $Y - X < \frac{1}{2}$. X és Y független, ezért (X, Y) eloszlása egyenletes $(0, 1)$-ben. A megfelelő ponthalmazok metszetét véve az egységnégyzetben, a terület: $\frac{1}{8}$. Hasonlóan az $X > Y$ esetre. Ezért a keresett valószínűség: $\frac{1}{4}$.

VII.3. Vegyes feladatok

38. *a)* $\frac{1}{6}$; *b)* nem.

39. $\frac{p_1 \cdot p_2}{p_1 - p_2}((1-p_2)^9 - (1-p_1)^9)$.

40. $\int_0^5 \int_0^{2,5-0,5x} 6 \cdot e^{-2x-3y} dy\, dx = \int_0^5 [-2e^{-2x-3y}]_{y=0}^{2,5-0,5x} dx = 3e^{-10} - 4e^{-7,5} + 1$.

41. *a)* $2-2x$ $(0 \le x \le 1)$, illetve $\frac{1}{2}(2-y)$ $(0 \le y \le 2)$;

b) $0{,}5x$, ha $x \le \frac{1}{4}$, $x - x^2 - 0{,}0625$, ha $\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2}$, $0{,}1875$, ha $\frac{1}{2} \le x$;

c) nem.

42. *a)* $P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}, \frac{1}{4} < Y < \frac{1}{2}\right) = P\left(X < \frac{3}{4}, Y < \frac{1}{2}\right) - P\left(X < \frac{3}{4}, Y < \frac{1}{4}\right) -$

$-P\left(X < \frac{1}{4}, Y < \frac{1}{2}\right) + P\left(X < \frac{1}{4}, Y < \frac{1}{4}\right) = H\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) - H\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) -$

$-H\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) + H\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{13}{128}$.

b) $F(x) = P(X < x) = H(x, 1) = x^3$, $G(y) = H(1, y) = y$.
Mivel $H(x, y) = F(x) \cdot G(y)$ teljesül, ezért X és Y függetlenek.

43. $0{,}1 + 0{,}125 + 0{,}025\frac{\pi}{4}$.

44. $2\sqrt{x}\left(\frac{1}{2} + y - \frac{y^2}{2}\right)$, ha $0 < y < 1$; $2\sqrt{x}\left(\frac{1}{2} + y + \frac{y^2}{2}\right)$, ha $-1 < y < 0$,

$2\sqrt{x}$, ha $1 < y$.

45. Tudjuk, hogy $h(x, y) = \frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x \partial y} = -e^{-x-y}$. Azonban ellentmondáshoz jutottunk, hiszen a sűrűségfüggvénynek nemnegatívnak kell lennie.

46. *a)* $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$; *b)* $\int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr\,d\varphi$.

47. *a)* Nem, mert az egyenes 0 valószínűségű (mértékű) halmaz a síkon, ezért a *síkon* folytonos, tehát kétváltozós sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlás definíciója szerint az egyenesre nem koncentrálódhat pozitív valószínűség.

b) Az *a)*-beli eloszlással szemben, itt egydimenziós eloszlásról van szó. Paraméterezve t-vel az egyenest, $x = t$, $y = t$, azt kapjuk, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-|t|} dt = 1$, tehát az eloszlás folytonos és $h(t, t)$ a sűrűségfüggvény.

c) $\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx\,dy = 1$ nem teljesül, ezért $h(x, y)$ nem sűrűségfüggvény.

48. $\left(\frac{2}{3}\right)^i \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{1}{6}\right)^{20-i-j} \frac{20!}{i!\,j!(20-i-j)!}$ $(i + j \le 20,\ i,\ j \ge 0)$.

49. Pl. $g(y) = \frac{2}{a\pi}\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$. Nem függetlenek.

50. $\frac{\pi}{10}$.

51. $H(x, y) = (\sin x)\frac{y}{1+y}$.

52. $1 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)^4 \approx 0{,}5323$.

53. *a)* $(0{,}5)^4 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}05 \frac{9!}{4!2!2!}$; *b)* binomiális, 0,3 és 9 paraméterekkel.

54. $P\{1, 1\} = \frac{3}{22}$, $P\{0, 1\} = \frac{4}{22}$, $P\{1, 0\} = \frac{8}{22}$, $P\{0, 0\} = \frac{7}{22}$.

55. Jelöljék rendre A, B és C azokat az eseményeket, hogy egy jutalmat az 1., 2., 3., vagy a 4., 5., 6., 7., vagy a 8. számú gyerek nyer el. Nyilván

$P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{8}$.

$$P(X=n,\, Y=m)=\frac{18}{n!m!(18-n-m)!}\left(\frac{3}{8}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^m\left(\frac{1}{8}\right)^{18-n-m} \quad (n+m\le 18).$$

56. *a)* $\dfrac{\binom{30}{i}\binom{30}{j}\binom{40}{20-i-j}}{\binom{100}{20}}$ $(i+j\le 20)$; *b)* $\dfrac{\binom{30}{i}\binom{70}{20-i}}{\binom{100}{20}}$ $(i\le 20)$ pl. X eloszlása.

57. $1-2\int\limits_6^{\infty}\int\limits_0^{x-6} 4e^{-2x-2y}\,dydx=1-e^{-\frac{1}{4}}$. Kihasználjuk a függetlenséget.

58. Jelölje X, ill. Y az egyes szállítmányok érkezési időpontjait éjféltől számítva órában. X és Y független, ezért együttes eloszlásuk egyenletes a $(0,1)\times(0,1)$ négyzeten, azaz a területtel számolhatunk:

$$P\left(|X-Y|>\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2,\quad P(X+Y<1)=\frac{1}{2},\quad P\left(|X-Y|>\frac{1}{3}\cap X+Y<1\right)=$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right),$$ tehát $P(AB)=P(A)\,P(B)$, azaz A és B függetlenek.

59. $\dfrac{1}{16}$.

60. Közömbös, hogy az első pontot hol választjuk a kerületen. Ezután a másik két pontot, P_1-et, ill. P_2-t már csak a választott ponttal 'átellenes' köríven választhatjuk. Ha például X és Y rendre ezen pontoknak az 'átellenes' körív egyik rögzített végpontjától való távolsága, akkor $|X-Y|\ge\dfrac{1}{4}$ és $X\le\dfrac{1}{2}$, $Y\le\dfrac{1}{2}$. Az ezen feltételeknek eleget tevő pontok halmazának területe: $\dfrac{1}{16}$.

61. $\dfrac{5}{9}$.

62. $P(X\cdot Y\ge 100)=\int\limits_{\frac{100}{11}}^{11}\int\limits_{\frac{100}{x}}^{11}\frac{1}{4}\,dydx\approx 0{,}484$.

63. Legyen a kör sugara 1 és tekintsünk egy, a körbe írható szabályos háromszöget.

a) A körív egyik pontja legyen a szabályos háromszög egyik csúcsa. A húr másik végpontjának választása akkor kedvező, ha a háromszög másik két csúcsa közötti íven választjuk. Ennek valószínűsége $\dfrac{1}{3}$.

b) Válasszuk a szóban forgó sugarat úgy, hogy merőleges legyen a beírható háromszög egyik oldalára. Ekkor a háromszög oldala a súlyponttétel miatt éppen felezi ezt a sugarat. A véletlenül választott húrt definiáló pont választása pontosan akkor kedvező, ha a pontot a sugárnak a középponthoz közelebb eső felén választjuk. Ennek valószínűsége $\dfrac{1}{2}$.

c) Könnyű belátni, hogy a pont választása pontosan akkor kedvező, ha a pont a szabályos háromszögbe írható kör belsejébe esik. E kör sugara $\dfrac{1}{2}$, így a kérdéses valószínűség $\dfrac{1}{4}$.

A három kapott eredmény különböző, azonban nincs ellentmondás, mert a véletlen húr választására három különböző modellt alkalmaztunk, melyek fizikailag nem ekvivalensek.

A várható értékek számolása:

Az *a)* esetben legyen φ a választott húr és a rögzített pontból induló átmérő szöge. Feltehetjük, hogy $\varphi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. A választott húr hossza ekkor $2\cos\varphi$, ezért a várható érték: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{2}{\pi}2\cos\varphi\, d\varphi=\dfrac{4}{\pi}$.

A *b)* esetben legyen x a sugáron választott pont távolsága a kör középpontjától. Ekkor a sugárra merőleges húr hossza $2\sqrt{1-x^2}$. A keresett várható érték:

$$\int\limits_0^1 2\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2x\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

64. Foglaljuk bele az érmét szimmetrikusan egy érintő gömbbe. Az érme majdani földet érési pontját jelölje ki a gömb egy sugara. Válasszuk meg az érme vastagságát úgy, hogy három egyenlő felszínű részre ossza a gömbfelszínt. Egyszerű geometriai okoskodással kapjuk, hogy ez akkor teljesül, ha az érme vastagsága a sugarának $\frac{1}{2\sqrt{2}}$-e.

65. $P(X_1 = i,\ X_2 = j,\ X_3 = k,\ X_4 = l) = \frac{10!}{i!\,j!\,k!\,l!}\cdot\frac{1}{4^{10}} \quad (i+j+k+l = 10)$.

66. *a)* $i+j+k+l = 10 \quad (i,\ j,\ k,\ l \geq 0)$. *b)* Egyenletes eloszlás az (i, j, k, l) pontokon: $\frac{1}{\binom{13}{3}}$.

67. *a)* $\frac{23}{24}$; *b)* 10.

68. A két pont választása ekvivalens egy síkbeli pont választásával a $(0, 1)\times(0, 1)$ négyzeten, valamint a függetlenség miatt egyenletes eloszlással, azaz területtel számolhatunk. A kedvező pontválasztásokat reprezentáló síkbeli pontok kielégítik az

$$\begin{cases} x < y-x & \text{és} \quad 1-y < y-x, \quad \text{ha} \quad x<y \\ y < x-y & \text{és} \quad 1-x < x-y, \quad \text{ha} \quad y<x \end{cases}$$

egyenlőtlenségeket. Az egyenlőtlenségeket egyszerre kielégítő pontok halmazának területe (egyszerű területszámolással): $\frac{1}{3}$.

VII.4. Ellenőrző kérdések

69. Egyiket sem.
70. *a)*, *b)*, *c)* igen; *d)* nem.
71. Nem.
72. *a)* Nem; *b)* nem.
73. Igen.

VIII. Feltételes eloszlás

VIII.1. Gyakorlófeladatok

1. *a)* $P(Y=0) = \frac{1}{6}$, így $P(X=0\,|\,Y=0) = P(X=1\,|\,Y=0) = \frac{1}{2}$.

Az $Y=0$ sorhoz tartozó eloszlást normáltuk 1-re.

b) $P(Y<2\,|\,X=0) = \frac{P(Y<2, X=0)}{P(X=0)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$.

$$P(X=0\,|\,X+Y=1) = \frac{P(X=0 \cap X+Y=1)}{P(X+Y=1)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}.$$

c) Tekintsük pl. az X-re vett feltételes eloszlásokat. Nem igaz, hogy az oszlopokban álló – nem normált – eloszlások csak arányossági tényezőben térnek el (így normáltjuk sem egyezhet meg). Hasonló igaz a másik feltételes eloszlásrendszerre is.

2. *I. megoldás:*

A VII. fejezet **11.** feladata szerint

$$g(y) = \begin{cases} y, & \text{ha} \quad 0 \leq y \leq 1, \\ \frac{1}{y^3}, & \text{ha} \quad 1 < y. \end{cases}$$

Így $l(x\,|\,y) = \begin{cases} \frac{2x}{y^2}, & \text{ha} \quad 0 < y \leq 1, \quad 0 < x \leq 1, \\ 2xy^2, & \text{ha} \quad 1 < y, \quad 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$

felhasználva az $l(x\,|\,y) = \frac{h(x,y)}{g(y)}$ összefüggést.

II. megoldás:
Minden rögzített y-ra a $h(x, y)$-hoz tartozó eloszlást kell normálni, ahol a normáló tényező $\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)dx$. Ha $0 < y \le 1$, akkor a normáló tényező:

$$\int_0^y \frac{2x}{y}dx = y, \text{ tehát } l(x\,|\,y) = \frac{\frac{2x}{y}}{y} = \frac{2x}{y^2} \quad (0 < x \le 1).$$

Ha $1 < y$, akkor a normáló tényező:

$$\int_0^{\frac{1}{y}} \frac{2x}{y}dx = \frac{1}{y^3}, \text{ tehát } l(x\,|\,y) = \frac{\frac{2x}{y}}{\frac{1}{y^3}} = 2xy^2 \quad (0 < x \le 1).$$

3. *I. megoldás:*
A VII. fejezet **3.** feladatának eredményét használva, tudjuk, hogy a peremeloszlások egyenletesek, tehát sűrűségfüggvényük konstans $\frac{1}{2}$. Így

$$l(x\,|\,y) = \frac{\frac{1}{4}(1+xy(x^2-y^2))}{\frac{1}{2}} = \frac{1+xy(x^2-y^2)}{2} \quad (0 \le x, y \le 1).$$

Hasonlóan kapjuk $k(y \mid x)$-et is.
X és Y nem függetlenek, hiszen $h(x, y)$ nem a peremsűrűség-függvények szorzata.
II. megoldás:
Pl. rögzített y-ra $h(x, y)$-t normáljuk úgy, hogy valószínűségeloszlás sűrűségfüggvénye legyen. A normáló tényező: $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{4}(1+xy(x^2-y^2))dx = \frac{1}{2}$, y-tól függetlenül, mint azt tudjuk a VII. fejezet **3.** feladata alapján. Így $l(x|y)$-ra az I. megoldásbeli függvényt kapjuk. Hasonlóan kapjuk $k(y|x)$-et is.

4. $f(x) = \int_0^1 6xy^2dy = 2x$, így $k(y\,|\,x) = \frac{6xy^2}{2x} = 3y^2$ $(0 \le x,\ y \le 1)$ nem függ a feltételtől, így a koordinátaeloszlások függetlenek. Tehát a másik feltételes eloszlásrendszer sem függhet a feltételtől.

5. *a)* A feltételes eloszlásokra vonatkozó szorzástételt használva:

$$P(X=0, Y=i) = P(X=0)\cdot P(Y=i\,|\,X=0) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9} \quad (i = 0, 1, 2),$$

$$P(X=1, Y=i) = P(X=1)\cdot P(Y=i\,|\,X=1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} \quad (i = 0, 1),$$

$$P(X=2, Y=0) = \frac{1}{3}.$$

b) $P(X+Y=2) = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$,

$P(X+Y=1) = \frac{1}{9} + \frac{1}{6}$, $P(X+Y=0) = \frac{1}{9}$.

Ezeket az értékeket összegzéssel kapjuk az *a)*-beli együttes eloszlás megfelelő értékeiből.

6. *a)* A feltételes eloszlásokra vonatkozó szorzástételt alkalmazva:

$$P(X=i, Y=j) = P(X=i)\cdot P(Y=j\,|\,X=i) = \frac{6i-i^2}{35}\binom{i}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{1}{2}\right)^{i-j}$$

$(i = 1, 2, 3, 4, 5;\quad 0 \le j \le i)$.

b) $P(Y=j) = \sum_{i=j}^{5} P(X=i, Y=j)$ és $P(X=i\,|\,Y=j) = \dfrac{\frac{6i-i^2}{35}\binom{i}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^i}{P(Y=j)}$

$(j = 1, 2, 3, 4, 5;\quad j \le i \le 5)$.

7. *a)* Mivel az x koordinátára vett feltételes eloszlások nem függnek a feltételtől, így a koordinátaeloszlások függetlenek, tehát az együttes eloszlás szorzateloszlás.

b) Az *a)* értelmében $\frac{1}{3}$ paraméterű geometriai eloszlás.

8. A feltételes eloszlásokra vonatkozó szorzástételt használva

$$a)\ g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)k(y|x)dx\,;$$

$$b)\ k(y|x) = \frac{h(x,y)}{f(x)} = \frac{g(y)l(x|y)}{f(x)}.$$

9. Az együttes eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$h(x,y) = f(x)k(y|x) = 1\frac{1}{\sqrt{x}} \quad (0 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le \sqrt{x}).$$

A peremeloszlás sűrűségfüggvénye:

$$g(y) = \int_{y^2}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = [2\sqrt{x}]_{y^2}^{1} = 2(1-y) \quad (0 \le y \le 1).$$

Tehát $l(x|y) = \frac{h(x,y)}{g(y)} = \frac{1}{2(1-y)\sqrt{x}} \quad (0 \le y \le 1,\quad y^2 \le x \le 1)$.

10. $h(x,y) = f(x)k(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x^2}{2}\cdot y}$. Tehát

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}x^2 e^{-\frac{x^2}{2}(1+y)}dx \quad (y \ge 0).$$

Az integrál meghatározásához felhasználhatjuk, hogy a 0 várható értékű, σ szórású normális eloszlás varianciája:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Ha $\frac{1}{\sigma^2} = 1+y$, akkor $\frac{1}{1+y} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\sqrt{1+y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}(1+y)}dx$.

Így $2\sqrt{1+y}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\cdot\sqrt{2\pi}}x^2 e^{-\frac{x^2}{2}(1+y)}dx = 2\sqrt{1+y}\cdot g(y) = \frac{1}{1+y}$.

Tehát $g(y) = \frac{1}{2(1+y)^{\frac{3}{2}}} \quad (0 \le y \le \infty)$.

11. (X, Y) sűrűségfüggvénye $3e^{-3x}3e^{-3y} = 9e^{-3(x+y)} \quad (x, y \le 0)$.
Az eloszlásfüggvényt határozzuk meg:

$$G(u) = P(X < u\,|\,X+Y \le 3) = \frac{P(X < u \cap X+Y \le 3)}{P(X+Y \le 3)} =$$

$$= \frac{\int_0^u\int_0^{3-x} 9e^{-3(x+y)}dy\,dx}{\int_0^3\int_0^{3-x} 9e^{-3(x+y)}dy\,dx} = \frac{\int_0^u 3(e^{-3x}-e^{-9})dx}{\int_0^3 3(e^{-3x}-e^{-9})dx} = \frac{1-e^{-3u}-3ue^{-9}}{1-10e^{-9}}, \quad \text{ha } u \le 3.$$

$G(u) = 1$, ha $u \ge 3$ és $G(u) = 0$, ha $u \le 0$.

12. *a)* Az együttes eloszlás 6-dimenziós, 10-edrendű polinomiális, ahol a teljes eseményrendszer az, hogy 0, 1, 2, 3, 4 vagy 5 találatot érünk el egy héten.

b) $P(X_2 = j\,|\,X_4 = i) = \binom{10-i}{j}p^j(1-p)^{10-i-j} \quad (i+j \le 10)$ binomiális eloszlás, ahol p annak valószínűsége, hogy egy héten 2 találatunk van, feltéve, hogy nincs 4 találatunk. Tehát a feltételes valószínűség definícióját használva $p = \frac{p_2}{1-p_4}$, ahol $p_2 = \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}$ a kettes, $p_4 = \frac{5\cdot 85}{\binom{90}{5}}$ a négyes találat valószínűsége.

13. $P(X=i\,|\,Y=j) = \frac{P(X=i, Y=j)}{P(Y=j)} = \frac{P(X=i)\cdot P(Y=j\,|\,X=i)}{P(Y=j)} =$

$$=\frac{\binom{6}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)^{6-i}\binom{i}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^j\left(\frac{2}{3}\right)^{i-j}}{\binom{6}{j}\left(\frac{1}{6}\right)^j\left(\frac{5}{6}\right)^{6-j}}=\binom{6-j}{i-j}\frac{1}{2^{6-j}}\quad (j=1,2,\ldots 6;\ j\le i\le 6),$$

ahol felhasználtuk, hogy X, Y és Y-nak X-re vett feltételes eloszlása is binomiális.

A feladat megoldható közvetlenül, klasszikus képlettel is.

14. Ha a legkisebb szám X, a legnagyobb Y, akkor

$$P(X=i\,|\,Y=60)=\frac{\binom{59-i}{3}}{\binom{59}{4}}\quad (i=1,2,\ldots,56)\text{, a klasszikus képletet használva.}$$

15. $\int\limits_0^1\int\limits_{-x}^{x} c\,y^2\,dy\,dx=\int\limits_0^1\frac{2c}{3}x^3\,dx=\frac{2c}{12}=1$, így $c=6$;

$$f(x)=\int\limits_{-x}^{x}6y^2\,dy=4x^3\quad (0\le x\le 1).$$

A feltétel szerint:

$$\int\limits_{-0,5}^{0,5}k(y|x_0)dy=\frac{1}{4}\text{, így }\int\limits_{-0,5}^{0,5}\frac{h(x_0,y)}{f(x_0)}dy=\int\limits_{-0,5}^{0,5}\frac{6y^2}{4x_0^3}dy=\frac{0,5^3}{x_0^3}=\frac{1}{4}.\text{ Innen }x_0=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

16. A szóban forgó ellipszis területe $2\sqrt{3}\pi$. Így az egyenletes eloszlás $h(x,y)$ sűrűségfüggvénye: $\frac{1}{2\sqrt{3}\pi}$ az ellipszistartományon, 0 egyébként.

Például az Y koordinátára vett feltételes eloszlás meghatározásához rögzített y-ra a $h(x,y)$-hoz tartozó egyenletes eloszlást kell normálni. Utóbbi a $\left(-2\sqrt{1-\frac{y^2}{3}},\ 2\sqrt{1-\frac{y^2}{3}}\right)$ intervallumra koncentrálódik, így $l(x\mid y)$ sűrűségfüggvénye: $\frac{1}{4\sqrt{1-\frac{y^2}{3}}}$, ha $-2\sqrt{1-\frac{y^2}{3}}\le x\le 2\sqrt{1-\frac{y^2}{3}}$, $-\sqrt{3}\le y\le\sqrt{3}$, és 0 egyébként. Az X koordinátára vett feltételes eloszlást hasonlóan kaphatjuk.

17. Az *a)* esetben függetlenek a koordináták, a *b)* esetben viszont nem, hiszen egy szorzateloszlás mindig olyan téglatartományra koncentrálódik, amelynek oldalai párhuzamosak a tengelyekkel.

18. Az évente lezuhant repülőgépek X száma Poisson-eloszlásúnak tekinthető. A paraméter értéke a $P(X=0)=e^{-\lambda}=0{,}01$ feltételből $\lambda=\ln 100$. Ha x gép zuhan le egy évben, a megtalált fekete dobozok Y száma $B\left(x,\frac{3}{4}\right)$ eloszlásúnak tekinthető. Ismert tehát X eloszlása és Y-nak X-re vonatkozó feltételes eloszlása.

a) $P(Y=j)=\sum\limits_{i=j}^{\infty}P(X=i,Y=j)=\sum\limits_{i=j}^{\infty}P(X=i)P(Y=j\,|\,X=i)=$

$$\sum_{i=j}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\binom{i}{j}\left(\frac{3}{4}\right)^j\left(\frac{1}{4}\right)^{i-j}=\frac{\left(\lambda\cdot\frac{3}{4}\right)^j}{j!}e^{-\lambda\frac{3}{4}}\sum_{i=j}^{\infty}\frac{\left(\frac{\lambda}{4}\right)^{i-j}}{(i-j)!}e^{-\frac{\lambda}{4}}.$$

A szumma 1-gyel egyenlő. Tehát Y eloszlása Poisson-eloszlás, $\frac{3}{4}\lambda$ paraméterrel.

Megjegyzés: Ez az eredmény közvetlenül is belátható abból, hogy Y jelentése az, hogy sok, független, kis valószínűségű esemény közül (fekete dobozok „lezuhanása” és megtalálása) hány következik be, valamint tudjuk azt is, hogy

$$M(Y)=\frac{3}{4}\cdot M(X)=\frac{3}{4}\lambda.$$

b) $P(X=40\,|\,Y=20)=\dfrac{P(X=40,Y=20)}{P(Y=20)}=\dfrac{\dfrac{\lambda^{40}}{40!}e^{-\lambda}\dbinom{40}{20}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{20}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{20}}{\dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\lambda\right)^{20}}{20!}e^{-\frac{3}{4}\lambda}}$,

kihasználva az *a)*-beli eredményt.

c) Igen, függetlenek, kielégítik a szorzattulajdonságot.

19. Jelölje X azt, hogy hány virág található a fán, Y pedig azt, hogy hány alma lesz a fán. Y-nak X-re vonatkozó feltételes eloszlása binomiálisnak tekinthető X és $\frac{2}{3}$ paraméterekkel.

$$P(Y=30)=\sum_{i=30}^{\infty}P(X=i,Y=30)=\sum_{i=30}^{\infty}P(X=i)P(Y=30\,|\,X=i)=$$

$$=\sum_{i=30}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{i-1}\left(\frac{1}{5}\right)\binom{i}{30}\left(\frac{2}{3}\right)^{30}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-30}.$$

20. Legyen az X valószínűségi változó értéke rendre 1, 2, ill. 3, attól függően, hogy a rádió a Kossuthra, a Petőfire vagy a Danubiusra van beállítva. Legyen az Y valószínűségi változó 1, ha próza, 2, ha zene megy egy, a három közül véletlenül kiválasztott adón. Y-nak X-re vonatkozó feltételes eloszlásai adottak. Tehát:

$$P(X=1\,|\,Y=2)=\frac{P(X=1,Y=2)}{P(Y=2)}=\frac{P(X=1)P(Y=2\,|\,X=1)}{\sum_{i=1}^{3}P(X=i)P(Y=2\,|\,X=i)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{8}{23}.$$

21. *a)* Legyen az első pont X, a második pont Y. X sűrűségfüggvénye $f(x)=$ $=a\cdot(1-x)$ alakú, ahol $a=2$, felhasználva, hogy $f(x)$ integrálja 1 a $(0,1)$ intervallumon.

Az $X=x$ feltétel mellett Y eloszlása a $(0,x)$ intervallumra koncentrálódik, a sűrűségfüggvény $k(y\,|\,x)=b\cdot y$ alakú, ahol $1=\int_0^x k(y|x)dy$, ahonnan $k(y|x)=\dfrac{2y}{x^2}$ $(0<y<x)$. Tehát X és Y együttes sűrűségfüggvénye: $h(x,y)=f(x)\cdot k(y|x)=4(1-x)\cdot\dfrac{y}{x^2}$ $(0<y<x<1)$. A második jel sűrűségfüggvénye: $g(y)=\int_y^1 4y\dfrac{1-x}{x^2}dx=4(1-y+y\ln y)$ $(0<y<1)$.

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{\frac{1}{2}}^{x}4(1-x)\frac{y}{x^2}\,dy\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}2\frac{1-x}{x^2}\left(x^2-\frac{1}{4}\right)dx=\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{4}\approx 0{,}0966.$

22. *a)* Legyen X az izzószálban található kén mennyisége, Y az izzó élettartama. Együttes $h(x,y)$ sűrűségfüggvényük a szorzásszabály szerint $h(x,y)=f(x)\cdot k(y\,|\,x)=2e^{-2x}xe^{-xy}$ $(x,y\geq 0)$. Y sűrűségfüggvénye:

$g(y)=\dfrac{1}{2+y}\displaystyle\int_0^{\infty}x(2+y)e^{-x(2+y)}dx=\dfrac{2}{(2+y)^2}$ $(y\geq 0)$, ahol felhasználtuk, hogy a $2+y$ paraméterű exponenciális eloszlás várható értéke: $\dfrac{1}{2+y}$.

b) Ha x gramm kén van az izzóban, várható átlagos élettartama az x paraméterű exponenciális eloszlás várható értéke: $\dfrac{1}{x}$. Mivel ez fordítottan arányos az x kéntartalommal, így a kén rontja az izzó élettartamát.

23. Legyen X az ugrás magassága, Y pedig az ernyő kioldásának magassága. Y eloszlása a $(2,X)$ intervallumra koncentrálódik.

$Y=\dfrac{g}{2}t^2$, ahol t egyenletes eloszlású $\left(\sqrt{\dfrac{4}{g}},\sqrt{\dfrac{2X}{g}}\right)$-ben.

Y feltételes eloszlását sűrűségfüggvény-transzformációval kaphatjuk:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2x}{g}}-\sqrt{\frac{4}{g}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2gy}}\quad(2\leq y\leq x,\ 2\leq x\leq 4).$$

X és Y együttes sűrűségfüggvénye a szorzástétel szerint:

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}}\frac{1}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})}\frac{1}{\sqrt{2gy}}=\frac{1}{4\sqrt{y}}\frac{1}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})}.$$ Tehát a $g(y)$ sűrűségfüggvény:

$$g(y)=\int_y^4 \frac{1}{4\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}\,dx=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(2-\sqrt{y}+\sqrt{2}\ln\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{y}-\sqrt{2}}\right)\quad (2\le y\le 4).$$

24. Legyen a dekódolás időtartama Y. A szorzástétel értelmében ekkor (X, Y) együttes sűrűségfüggvénye:

$$h(x,y)=\frac{6}{5}\left(x+\frac{1}{3}\right)\frac{x+(y-1)^2}{x+\frac{1}{3}}=\frac{6}{5}(x+(y-1)^2)\quad (0\le x,y\le 1).$$

Így $$P(X<Y)=\int_0^1\left(\int_x^1\frac{6}{5}(x+(y-1)^2)dy\right)dx=\int_0^1\frac{6}{5}\left[x-x^2-\frac{(x-1)^3}{3}\right]dx=0{,}3.$$

25. Válasszuk a pontokat egymás után, valamint lássuk el a körívet pozitív körüljárással és terítsük a körívet rendre az x, ill. y tengelyekre az origóból kiindulva úgy, hogy az elsőnek választott pont kerüljön az origóba, és a másodiknak választott X pontot az x, a harmadiknak választott Y pontot az y tengelyen ábrázoljuk. Ha X-et $\left(0,\frac{1}{2}\right)$-ben választjuk, akkor Y választása csak akkor kedvezőtlen, ha $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{2}+X$ közé esik. Az egységnégyzeten a kedvezőtlen (X, Y) választásokat így $\frac{1}{8}$ területű halmaz: $\left\{(x,y): 0\le x\le\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}+x\right\}$ reprezentálja. Szimmetriamegfontolások miatt hasonlóan okoskodhatunk az $\frac{1}{2}\le x\le 1$ esetre is. Így a kérdezett valószínűség: $1-2\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$.

26. X és Y nyilván független, hiszen például Y-nak X-re vonatkozó feltételes eloszlása nem függ X-től. Mivel X és Y függetlenek, így X-nek Y-ra vonatkozó feltételes eloszlása sem függ Y-tól, vagyis megegyezik X eloszlásával, a 2 paraméterű exponenciális eloszlással.

VIII.3. Vegyes feladatok

33. A vízszintes egyeneseken a feltételes eloszlások, rendre $j=1, 2, 3$ esetén:

$$\frac{2}{9},\frac{3}{9},\frac{4}{9};\quad \frac{5}{18},\frac{6}{18},\frac{7}{18};\quad \frac{10}{33},\frac{11}{33},\frac{12}{33}.$$

Ezek nem függenek a feltételtől.

34. *a)* $$P\left(X+Y<1\,\middle|\,X=\frac{1}{2}\right)=P\left(\frac{1}{2}+Y<1\,\middle|\,X=\frac{1}{2}\right)=P\left(Y<\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}2y\,dy=\frac{1}{4}.$$

b) $$P\left(X+Y<1\,\middle|\,X<\frac{1}{2}\right)=\frac{P\left(X+Y<1, X<\frac{1}{2}\right)}{P\left(X<\frac{1}{2}\right)}=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{1-x}2x\,2y\,dy\,dx}{\frac{1}{4}}=$$

$$=4\int_0^{\frac{1}{2}}4x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x}dx=1-\frac{2}{3}+\frac{1}{8}=\frac{11}{24}.$$

35. Önmaga, mivel szorzateloszlás.

36. *a)* $\frac{1}{2-2x}$, illetve $\frac{2}{2-y}$;

b) $$\begin{cases}\frac{8}{3}x, & \text{ha } 0\le x<\frac{1}{4}\\ \frac{16}{3}\left(x-x^2-\frac{1}{16}\right), & \text{ha } \frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2}\end{cases}$$

egyébként 0, illetve 1.
Nem szorzateloszlás.

37. *a)* $k(y\,|\,x)=\frac{1}{x}\quad (0\le x\le 1,\ 0\le y\le x)$;

$$b)\ \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad 0 \le x < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{ha} \quad \dfrac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1. \end{cases}$$

38. Elég megmutatni, hogy a feltételes sűrűségfüggvény nem függ x-től:

$$k(y|x) = \frac{h(x,y)}{f(x)} = \frac{r(x)s(y)}{\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)dy} = \frac{r(x)s(y)}{\int_{-\infty}^{\infty} r(x)s(y)dy} = \frac{s(y)}{\int_{-\infty}^{\infty} s(y)dy},$$

tehát $k(y \mid x)$ valóban nem függ x-től.

39. Mivel a geometriai eloszlás a pozitív egészekre koncentrálódik, ezért

$$P\{(x,y): x+y \le 4\} = P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=1) + P(X=2, Y=2) +$$
$$+ P(X=3, Y=1) = P(X=1)\,P(Y=1 \mid X=1) + P(X=2)\,P(Y=1 \mid X=2) +$$
$$+ P(X=2)\,P(Y=2 \mid X=2) + P(X=3)\,P(Y=1 \mid X=3) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{3} = \frac{28}{64}.$$

40. Az együttes eloszlás:

$$h(n,y) = p(n)k(y|n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n ny^{n-1} \quad (n \in \mathbf{N},\ y \in [0, 1]).$$

Így Y sűrűségfüggvénye

$$g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n,y) = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n y^{n-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{y}{2}}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{y}{2}\right)^{n-1}\left(1-\frac{y}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\left(1-\frac{y}{2}\right)^2} \quad (0 \le y \le 1),$$ felhasználva az $1-\dfrac{y}{2}$ paraméterű geometriai eloszlás várható értékét.

Innen a vízszintes egyeneseken vett feltételes eloszlások:

$$l(n|y) = \frac{h(n,y)}{g(y)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} ny^{n-1}(2-y)^2 \quad (n \in \mathbf{N},\ y \in [0, 1]).$$

41. Legyen u, $v \in \mathbf{R}$ olyan, hogy $0 < u < v < 1$, legyen k tetszőleges nemnegatív egész. Elég belátni, hogy ekkor

$$P(u \le \{x\} < v \,|\, [x] = k) = P(u \le \{x\} < v) \tag{1}$$

mindig fennáll.

Az $[x]=k$ esemény ekvivalens azzal, hogy $k \le x < k+1$, ezért (1) bal oldala:

$P(u \le \{x\} < v \mid [x] = k) = P(u \le \{x\} < v \mid k \le x < k+1) =$
$= P(k+u \le x < k+v \mid k \le x < k+1) = P(u \le x < v \mid 0 \le x < 1)$.

Az utolsó átalakítás az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságából következett. Legyen az eloszlás paramétere λ, ekkor

$$P(u \le x < v \,|\, 0 \le x < 1) = \frac{P(u \le x < v, 0 \le x < 1)}{P(0 \le x < 1)} = \frac{P(u \le x < v)}{P(0 \le x < 1)} =$$

$$= \frac{e^{-u\lambda} - e^{-v\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

(1) jobb oldala:

$$P(u \le \{x\} < v) = P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}(k+u \le x < k+v)\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+u \le x < k+v) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-(k+u)\lambda} - e^{-(k+v)\lambda}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k}\left(e^{-u\lambda} - e^{-v\lambda}\right) = \left(e^{-u\lambda} - e^{-v\lambda}\right)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k} = \frac{e^{-u\lambda} - e^{-v\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

Ezt a bal oldalra kapott eredményünkkel összevetve kapjuk a bizonyítandót.

42. Nem.

43. *a)* $\dfrac{3}{4}$; *b)* $-4y\ln y \quad (y \in (0, 1))$.

44. *a)* $\dfrac{3}{8}$; *b)* $\dfrac{26}{27}$; *c)* $\dfrac{14}{27}$; *d)* $\dfrac{8}{15}$.

45. $e^2\,(e^{-2} - e^{-3}) = 1 - e^{-1}$.

46. Mindkettő diszkrét egyenletes eloszlás.

47. Az $\{(x,y): 8(x-x^2)\ge y,\ x\in[0,1],\ y\in[0,2]\}$ tartományra csonkított egyenletes eloszlás peremsűrűség-függvényét kell meghatározni.

A csonkított eloszlás sűrűségfüggvénye: $\dfrac{1}{\int_0^1 8(x-x^2)dx}=\dfrac{3}{4}$ a fenti tartományon. Tehát a csonkított eloszlásnak az x tengelyre vett vetülete:

$$\int_0^{8(x-x^2)}\frac{3}{4}dy=6(x-x^2)\quad(0\le x\le 1).$$

48. Legyen $q(k)=P(X=k\mid X+Y=n)\quad(0\le k\le n)$. Ekkor

$$q(k)=\frac{P(X=k,X+Y=n)}{P(X+Y=n)}=\frac{P(X=k,Y=n-k)}{P(X+Y=n)}=$$

$$=\frac{P(X=k)P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)}=\frac{\frac{\alpha_1^k}{k!}e^{-\alpha_1}\cdot\frac{\alpha_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\alpha_2}}{P(X+Y=n)}=$$

$$=\binom{n}{k}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^k\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^{n-k}c,\ \text{ ahol }\ c=\frac{e^{-(\alpha_1+\alpha_2)}(\alpha_1+\alpha_2)^n}{n!P(X+Y=n)}$$ nem függ

k-tól. Továbbá $1=\sum_{k=0}^{n}q(k)=c\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^k\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^{n-k}=c$, tehát

$$q(k)=\binom{n}{k}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^k\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^{n-k}\quad(0\le k\le n).$$ Ez valóban binomiális eloszlás n és $p=\dfrac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}$ paraméterekkel.

49. X eloszlása $B\left(10,\frac{1}{2}\right)$ binomiális, Y eloszlása pedig:

$$P(Y=m)=\left(\frac{1}{2}\right)^m\quad(1\le m\le 10),\quad P(Y=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

X feltételes eloszlása rögzített $Y=m$-re szintén binomiális:

$$P(X=k\mid Y=m)=\binom{10-m}{k-(m-1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-(m-1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-m-k+(m-1)}=$$

$$=\binom{10-m}{k-(m-1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-m}\quad(1\le m\le 10,\ m-1\le k\le 9)\ \text{ és }\ P(X=10\mid Y=0)=1.$$

Mindebből a kérdezett másik feltételes eloszlás, tehát Y-nak $X=k$-ra vonatkozó feltételes eloszlása is meghatározható:

$$P(Y=m\mid X=k)=\frac{P(Y=m)}{P(X=k)}\cdot P(X=k\mid Y=m)=$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^m}{\binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}\binom{10-m}{k-m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-m}=\frac{\binom{10-m}{k-m+1}}{\binom{10}{k}}\quad(0\le k\le 9,\ 1\le m\le k+1)$$

és $P(Y=0\mid X=10)=1$.

A feladat megoldható közvetlenül klasszikus képlettel is.

50. A $P(X<\frac{1}{2}\mid Y=y)$ valószínűséget fogjuk meghatározni. Y sűrűségfüggvénye:

$$g(y)=\int_0^1 h(x,y)dx=\int_0^1 0{,}8(x+xy+y)dx=\frac{6y+2}{5}\quad(0\le y\le 1).$$

Így $l(x\mid y)=\dfrac{0{,}8(x+xy+y)}{\frac{6y+2}{5}}=\dfrac{2(xy+x+y)}{3y+1}$,

$$P(X<\frac{1}{2}\mid Y=y)=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2(xy+x+y)}{3y+1}dx=\frac{5y+1}{12y+4}\quad(0\le y\le 1).$$

Ha ez a valószínűség nagyobb $\frac{1}{2}$-nél, akkor az $X < \frac{1}{2}$ esemény bekövetkezésére tippelünk, amennyiben kisebb, akkor az ellenkezőjére.

Esetünkben $\frac{5y+1}{12y+4} < \frac{6y+2}{12y+4} = \frac{1}{2}$ minden y-ra, tehát bármely y esetén $X > \frac{1}{2}$ -re kell tippelnünk, a hibázás valószínűségét pedig $P(X < \frac{1}{2} | Y = y)$ adja. Az $\frac{5y+1}{12y+4}$ függvény $\left(\frac{5y+1}{12y+4}\right)' = \frac{1}{2(3y+1)^2} > 0$ miatt monoton növekvő, tehát a minimális hibavalószínűség $y=0$ mellett adódik és értéke $\frac{1}{4}$.

51. Igen.

52. *a)* $B\left(10, \frac{1}{6}\right)$ és $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$ szorzateloszlása; *b)* $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$.

53. Úgy tekintjük, hogy n olyan kísérletet végzünk, ahol egy kísérlet abból áll, hogy sikerül-e dobókockával páros számot dobni úgy, hogy feldobjuk először a kockát és csak akkor próbálkozhatunk egy újabb dobással, ha hatost kapunk. Ha nem kerül sor második dobásra, akkor úgy tekintjük, hogy nem sikerült másodszorra páros számot dobni.

A másodszori páros dobás valószínűsége így szorzástétellel: $p = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

A keresett eloszlás n és $\frac{1}{12}$ paraméterű binomiális eloszlás.

54. $\frac{1}{\binom{10}{7}}$.

55. *a)* $\frac{12^5}{5!} e^{-12}$;

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1000^k}{k!} e^{-1000} \binom{k}{5} \left(\frac{1}{100}\right)^5 \left(\frac{99}{100}\right)^{k-5} = \frac{10^5}{5!} e^{-10}$ (Poisson-eloszlás).

56. Legyen egy versenyző helyezése a versenyen X, az előfutamon Y. A megadott feltételek alapján létezik olyan c, hogy

$$P(X = 1 | Y = j) = \frac{c}{j} \quad (j = 1, 2, \ldots, 10). \qquad (*)$$

X és Y a versenyzők azonos képessége miatt egyenletes eloszlásúak az $1, 2, \ldots, 10$ számokon, ezért $P(X=i) = P(Y=j) = 0{,}1$, ha $i, j \in \{1, 2, \ldots, 10\}$.

(*) alapján $P(X = 1, Y = j) = \frac{c}{j} P(Y = j) = \frac{c}{10j}$.

Így $\sum_{j=1}^{10} P(X = 1, Y = j) = P(X = 1) = \frac{1}{10} = \sum_{j=1}^{10} \frac{c}{10j}$, ahonnan $c = \frac{1}{\sum_{j=1}^{10} \frac{1}{j}}$.

A kérdezett valószínűség: $P(Y \in \{1, 2, 3\} \mid X = 1) =$

$$= \sum_{i=1}^{3} P(Y = i | X = 1) = \sum_{i=1}^{3} \frac{P(Y = i) P(X = 1 | Y = i)}{P(X = 1)} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}} \cdot \frac{c}{i} = \frac{420}{671} \approx$$

$\approx 0{,}626$.

57. *a)* $\frac{1}{6} x^3 e^{-x}$ $(x > 0)$; *b)* $g(y) = \frac{1}{4} \cdot e^{-|y|} \left(1 - \frac{y^2}{2}\right)$ $(-\infty < y < +\infty)$.

58. *a)* $\left(\frac{1}{6}\right)^7 + \left(\frac{1}{6}\right)^6$; *b)* $\frac{6}{7}$.

59. $\frac{4}{9}$.

60. A megoldás hasonló a **18.** feladat megoldásához.

A 20 s alatt áthaladó autók X száma Poisson-eloszlásúnak tekinthető. Jelentse Y a 20 s alatt a sebességhatárt átlépő autók számát. Y feltételes eloszlása X-re nézve binomiálisnak tekinthető $p = 0{,}15$ paraméterrel. Ekkor

$$P(X < 30 | Y = 15) = \sum_{k=15}^{29} \frac{\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}{P(Y = 15)} \binom{k}{15} (0{,}15)^{15} (0{,}85)^{k-15} =$$

$$= e^{-0{,}85\lambda} \sum_{j=0}^{14} \frac{(0{,}85\lambda)^j}{j!},$$

ahol λ az $e^{-\lambda} = 0{,}01$ feltételből számolható, és

$$P(Y=15) = \sum_{n=15}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \binom{n}{15} (0{,}15)^{15} (0{,}85)^{n-15} = \frac{(0{,}15\lambda)^{15}}{15!} e^{-0{,}15\lambda}.$$

61. *a)* Helyezzük az átfogót az x tengelyre úgy, hogy felezőpontja az $\frac{1}{2}$-ben legyen. Legyen X az átfogón választott pont és Y a befogón választott pont távolsága az origótól, és tegyük fel, hogy $0 < X < \frac{1}{2}$. Y feltételes eloszlása $X = x$-re vonatkozóan a feltevés szerint egyenletes $(0, \sqrt{x})$-en, felhasználva a derékszögű háromszögek befogótételét. Feltételes sűrűségfüggvénye ezért $\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\left(y \in (0, \sqrt{x}),\ x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)\right)$. Az együttes sűrűségfüggvény:

$$h(x,y) = f(x)k(y|x) = 2\frac{1}{\sqrt{x}} \quad \left(y \in (0, \sqrt{x}),\ x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)\right).$$

Innen Y sűrűségfüggvénye:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)dx = \int_{y^2}^{\frac{1}{2}} 2\frac{1}{\sqrt{x}} dx = 4\left(\sqrt{\frac{1}{2}} - y\right) \quad \left(y \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

b) $$l\left(x \,\middle|\, \frac{1}{3}\right) = \frac{h\left(x, \frac{1}{3}\right)}{g\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{2\frac{1}{\sqrt{x}}}{4\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\right)} \quad \left(x \in \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{2}\right)\right).$$

62. X és Y együttes sűrűségfüggvénye X sűrűségfüggvényének, $x + \frac{1}{2}$-nek és a feltételes sűrűségfüggvénynek: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2x+y}{2x+1}$-nek szorzata.

Így $h(x,y) = \frac{1}{4}(2x+y) \quad (0 \le x, y \le 1)$.

Tehát a kérdezett valószínűség:

$$P(Y > 2X^2) = \int_0^1 \int_{2x^2}^2 \frac{1}{4}(2x+y)dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{xy}{2} + \frac{y^2}{8}\right]_{2x^2}^2 dx = \frac{13}{20}.$$

63. $\ln 2 - 0{,}5$.

64. Legyen az első ugrás nagysága X, a másodiké Y. Y eloszlása az $X = x$ feltétel mellett egyenletes, várható értéke x, szórása $\frac{40}{\sqrt{12}}$. Az (a, b)-n egyenletes eloszlás szórása $\frac{b-a}{\sqrt{12}}$, ezért $b - a = 40$. X és Y együttes sűrűségfüggvénye a perem- és feltételes sűrűségfüggvények szorzata, tehát $h(x,y) = \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{40}$ $(750 \le x \le 810,\ x - 20 \le y \le x + 20)$. A keresett valószínűség:

$$P(X > 800 \cup Y > 800) = \frac{810-800}{810-750} + \int_{780}^{800} \int_{800}^{x+20} \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{40} dy\,dx = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}.$$

65. $\frac{1}{\sqrt{y}} - 1, \quad y \in (0, 1)$. Nem függetlenek.

66. *a)* $h(n,y) = \frac{1}{6n} \quad (n = 1, 2, \ldots, 6), \quad g(2{,}2) = \sum_{i=3}^{6} \frac{1}{6i},$

$$P(X = n \mid Y = 2{,}2) = \frac{\frac{1}{n}}{\sum_{i=3}^{6} \frac{1}{i}} = \frac{20}{19n} \quad (n = 3, 4, 5, 6);$$

b) $\frac{1}{3}$.

67. Legyen az A és az $(1, 0)$ pont távolsága Z, a B és a $(0, 0)$ pont távolsága U, és legyenek X, ill. Y a B pont derékszögű koordinátái. Könnyen látható, hogy $X = \frac{U}{\sqrt{1+Z^2}}$, $\frac{Y}{X} = Z$. Adott Z esetén U egyenletes eloszlású $(0, \sqrt{1+Z^2})$-ben, $X = \frac{U}{\sqrt{1+Z^2}}$ pedig egyenletes eloszlású $(0, 1)$-ben Z értékétől függetlenül. Az X Z-re vonatkozó feltételes eloszlásai tehát nem függenek Z-től, azaz X és Z függetlenek.

X sűrűségfüggvénye: $f(x)=1\ (0\le x\le 1)$. $Y=X\cdot Z$, tehát, ha $X=x$, akkor Y is egyenletes eloszlású $(0,x)$-ben (hiszen Z egyenletes eloszlású (0, 1)-en). Ezért Y-nak az $X=x$ feltétel melletti sűrűségfüggvénye $k(y|x)=$

$=\frac{1}{x}\quad (0<y<x)$.

a) X és Y együttes sűrűségfüggvénye:

$$h(x,y)=f(x)k(y|x)=\frac{1}{x}\quad (0<y<x<1).$$

b) $f(x)=1\quad (0\le x\le 1)$.

c) Y sűrűségfüggvénye: $g(y)=\int_y^1 h(x,y)dx=\int_y^1 \frac{1}{x}dx=-\ln y\quad (0<y<1)$.

68. Legyen X a tűzesetek száma. X Poisson-eloszlásúnak tekinthető $\lambda=200$ paraméterrel.

a) Jelölje A azt, hogy a tűzesetek száma páros. Ekkor

$$P(X=2k|A)=\frac{P(X=2k\cap A)}{P(A)}=\frac{P(X=2k)}{P(A)}=\frac{\frac{200^{2k}}{(2k)!}e^{-200}}{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{200^{2j}}{(2j)!}e^{-200}}=$$

$$=\frac{\frac{200^{2k}}{(2k)!}}{\operatorname{ch}200}.$$

b) $P(A)=e^{-200}\operatorname{ch}200=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-400}$. Ez $\frac{1}{2}$-nél valamivel nagyobb érték, ezért a játék, elvileg, nem igazságos $(P(A)>1-P(\overline{A}))$. (Gyakorlatilag ez az érték $\frac{1}{2}$, ezért gyakorlatilag a játék igazságos.)

69. Jelentse X egy házaspár gyermekeinek számát, Y pedig jelentse a fiúgyerekek számát. X eloszlása a 0, 1, 2, ill. 3 pontokon: 0,1, 0,3, 0,4, ill. 0,2. Y feltételes eloszlása $Y=k$-ra nézve binomiális, $n=k$ és $p=\frac{1}{2}$ paraméterekkel. Az együttes eloszlást szorzással kapjuk:

$$P(X=k,Y=m)=P(X=k)P(Y=m|X=k)=$$

$$=P(X=k)\binom{k}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^m\left(\frac{1}{2}\right)^{k-m}\quad (0\le m\le k,\ 0\le k\le 3).$$

Az eloszlás peremeloszlása Y-ra nézve

$$P(Y=m)=\sum_{k=m}^{3}P(X=k,Y=m)=\sum_{k=m}^{3}P(X=k)\binom{k}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^m.$$

Megjegyzés: a feladat közvetlenül, Bayes-tétellel is megoldható.

70. $k(y|x)=\lambda e^{-\lambda(y-x)}\quad (0<x<y)$.

71. $\frac{F(T+\tau)-F(\tau)}{1-F(T)}$.

VIII.4. Ellenőrző kérdések

72. *a)* Igen, 1 valószínűséggel; *b)* nem, mert $f(x)$ 0 is lehet; *c)* nem; *d)* nem.
73. *a)* Nem; *b)* nem.
74. Igen.
75. Igen.
76. Igen.
77. *a)* Igen; *b)* igen; *c)* igen; *d)* nem.
78. Igen.

IX. Többdimenziós valószínűségi változó (többdimenziós eloszlás) paraméterei

IX.1. Gyakorlófeladatok

1. *a)* A teljes várható érték tételt alkalmazva:

$$M(Y)=\sum_{i=1}^{\infty}M(Y|X=i)\cdot p_i=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1/i}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1}=4\text{, használva a geomet-}$$

riai eloszlás várható értékét.

b) A $P(Y=k)=\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1}\left(\frac{1}{i}\right)\left(1-\frac{1}{i}\right)^{k-1}$, ha $k>1$;

$P(Y=1)=\frac{1}{4}+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1}\left(\frac{1}{i}\right)$ függvény k-ban monoton csökkenő, így a módusz $k=1$-ben van.

c) $(4,4)$.

2. *a)* $M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\left(\int_{-\infty}^{\infty}h(x,y)dy\right)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xh(x,y)dy\,dx$,

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}y\left(\int_{-\infty}^{\infty}h(x,y)dx\right)dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yh(x,y)dx\,dy.$$

A *b)* állítás igazolása hasonló.

3. $h(x,y)$ a vízszintes egyeneseken konstans, így a feltételes eloszlások egyenletes eloszlások a megfelelő intervallumokon.

a) Kihasználva az egyenletes eloszlás szimmetriáját:

$$\mu(y)=\begin{cases}\dfrac{y}{2}, & \text{ha } 0\le y\le 1\\[2mm] \dfrac{1}{2y}, & \text{ha } y>1.\end{cases}$$

b) A feltételes szórásnégyzet függvénye y-nak. Kihasználva az egyenletes eloszlás szórásképletét: $\frac{y^2}{12}$, ha $0\le y\le 1$; $\frac{1}{12y^2}$, ha $y>1$.

c) A $g(y)$ peremsűrűség $y\ge 1$-re $\int_0^{\frac{1}{y}}\frac{1}{2y}dx=\frac{1}{2y^2}$. Azonban $\int_1^{\infty}y\frac{1}{2y^2}dy$ nem létezik, így a peremeloszlásnak sem létezik várható értéke.

4. A Steiner-tétel értelmében tudjuk, hogy a $k(y\mid x_0)$ sűrűségfüggvényű eloszlás várható értékére kell tippelni.

$$k(y|x_0)=\frac{x_0}{2}\frac{2}{x_0^2}y=\frac{y}{x_0}\quad(0\le x_0\le 2,\ 0\le y\le x_0).$$

Így $M(Y|X=x_0)=\int_0^{x_0}y\frac{y}{x_0}dy=\frac{x_0^2}{3}\quad(0\le x_0\le 2)$.

5. Csonkított eloszlás egyik peremeloszlásának várható értékét kell számolni. A csonkítás normáló tényezője: $\int_0^1\int_0^y 16x^3y^3dx\,dy=\frac{1}{2}$, tehát a csonkított eloszlás sűrűségfüggvénye: $32x^3y^3$ $(0\le y\le 1, 0\le x\le y)$.

Peremeloszlásának várható értéke: $\int_0^1 yg(y)dy=\int_0^1\int_0^y 32x^3y^4dx\,dy=\frac{8}{9}$.

6. $M(X)=0{,}56$, $M(Y)=0{,}54$, $M(XY)=0{,}5$, így

$\mathrm{cov}\,(X,Y)=0{,}5-0{,}56\cdot 0{,}54\approx 0{,}2$.

$M(X^2)=0{,}56$, $M(Y^2)=M(Y)=0{,}54$, tehát

$D^2(X)=0{,}56-(0{,}56)^2\approx 0{,}25$, $D^2(Y)=0{,}54-(0{,}54)^2\approx 0{,}25$;

$$R(X,Y)=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{D(X)\cdot D(Y)}\approx\frac{0{,}2}{0{,}25}=0{,}8.$$

7. Legyen $U=X+Y$ és $V=|X-Y|$. U 0-n kívül 1-et, ill. 2-t vehet fel, rendre $\frac{1}{2}$, ill. $\frac{1}{4}$ valószínűséggel. Hiszen például U akkor vesz fel 1-et, ha $X=0$, $Y=1$, vagy fordítva, $X=1$, $Y=0$. A függetlenség miatt $P(X=1,Y=0)=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$. Így $P(U=1)=P(X=1, Y=0)+P(X=0, Y=1)=\frac{1}{2}$. Hasonlóan, $P(U=2)=\frac{1}{4}$.

Így U várható értéke 1. V 0-n kívül csak 1-et vehet fel, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel, így várható értéke $\frac{1}{2}$.

UV lehetséges értéke 0-n kívül csak az 1. Ezt akkor veszi fel, hogyha X és Y közül pontosan az egyik 1. Ennek valószínűsége $\frac{1}{2}$. Tehát $M(UV)=\frac{1}{2}$.

$\operatorname{cov}(U, V)=M(UV)-M(U)\,M(V)=0$, valóban.

U és V azonban nem függetlenek, hiszen pl.

$P(U=2,\ V=1)=0,\ P(U=2)=\frac{1}{4},\ P(V=1)=\frac{1}{2}$, így

$P(U=2,\ V=1)\neq P(U=2)\,P(V=1)$.

8. Kihasználva a **2.** feladat állítását:

$$M(X)=\int_0^1\int_0^1 x\frac{6}{5}(x+y^2)\,dy\,dx=\int_0^1\frac{6}{5}\left(x^2+\frac{x}{3}\right)dx=\frac{3}{5};$$

$$M(Y)=\int_0^1\int_0^1 y\frac{6}{5}(x+y^2)\,dx\,dy=\int_0^1 y\frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}+y^2\right)dy=\frac{3}{5};$$

$$M(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy\frac{6}{5}(x+y^2)\,dy\,dx=\int_0^1 x\frac{6}{5}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)dx=\frac{7}{20}.$$

Így $\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{7}{20}-\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{-1}{100}$.

$$M(X^2)=\int_0^1\int_0^1 x^2\frac{6}{5}(x+y^2)\,dy\,dx=\frac{13}{30};\ M(Y^2)=\int_0^1\int_0^1 y^2\frac{6}{5}(x+y^2)\,dx\,dy=\frac{11}{25}.$$

Ezért $D^2(X)=\frac{13}{30}-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{11}{150}$, $D^2(Y)=\frac{11}{25}-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{2}{25}$.

a) $R(X,Y)=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D(X)\cdot D(Y)}\approx -0{,}13$.

b) $D^2(X+Y)=\frac{11}{150}+\frac{2}{25}+2\cdot(-0{,}01)\approx 0{,}133$.

9. $M(\sin X)=\int_0^\pi \sin x\left(\frac{1}{\pi}\right)dx=\frac{2}{\pi}$, $M(\cos X)=\int_0^\pi \cos x\left(\frac{1}{\pi}\right)dx=0$,

$$M(\sin X\cdot\cos X)=\int_0^\pi \sin x\cos x\left(\frac{1}{\pi}\right)dx=\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin 2x\cdot\frac{1}{\pi}\,dx=0,$$

$$M(\sin^2 X)=\int_0^\pi \sin^2 x\left(\frac{1}{\pi}\right)dx=\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\,dx=\frac{1}{2}.$$

Hasonlóan $M(\cos^2 x)=\frac{1}{2}$.

Használva, hogy $D^2(\sin X)=M(\sin^2 X)-M^2(\sin X)$ és $D^2(\cos X)=$ $=M(\cos^2 X)-M^2(\cos X)$, kapjuk:

$$K_{(\sin X,\sin Y)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

10. Az együttes eloszlás szorzateloszlás, így a kovariancia nulla. Tehát a kovarianciamátrix: $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

11. *a)* A VIII.**18.** feladat megoldásánál megállapítottuk, hogy a megtalált fekete dobozok száma Poisson-eloszlású $\lambda=\frac{3}{4}\cdot\ln 100$ paraméterrel. Ezért várható értéke $\frac{3}{4}\cdot\ln 100$, szórása $\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\ln 100}$.

b) A feltételes eloszlás binomiális eloszlás n és $\frac{3}{4}$ paraméterekkel, így a feltételes várható érték: $n \cdot \frac{3}{4}$.

12. Jelölje X azt, hogy hányan adakoznak, Y pedig azt, hogy mennyit adtak az adott idő alatt. X Poisson-eloszlásúnak tekinthető. A paraméter a $\frac{\lambda^4}{4!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^5}{5!}e^{-\lambda}$ feltételből $\lambda = 5$.
Egy adakozónál az adomány várható értéke: $0{,}1 \cdot 1 + 0{,}6 \cdot 2 + 0{,}3 \cdot 5 = 2{,}8$.
Ezért k adakozónál, a várható értékeket összegezve, a feltételes várható érték: $k \cdot 2{,}8$.
Y várható értékének kiszámításához teljes várható érték tételt alkalmazunk:
$M(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \cdot k \cdot 2{,}8 = 2{,}8 \cdot \lambda$, kihasználva, hogy a Poisson-eloszlás várható értéke λ. Tehát $M(Y) = 14$.

13. Jelölje X azt, hogy a mondott feltétel mellett hányadikra dobunk fejet. X a 2, 3 és 4 értékeket rendre $\frac{1}{4}:\frac{7}{16}, \frac{1}{8}:\frac{7}{16}$ és $\frac{1}{16}:\frac{7}{16}$ valószínűségekkel veszi fel.
Y jelentse azt, hogy hány hatost dobunk. Y feltételes eloszlása X-re nézve binomiális, amelynek várható értéke $\frac{k}{6}$.

a) Y várható értékét teljes várható érték tétellel számoljuk:

$$M(Y) = \frac{4}{7} \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{7} \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdot 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{7}.$$

b) $\left[(k+1)\frac{1}{6}\right]$ $(k = 2, 3, 4)$.

14. A VIII.**24.** feladat megoldásánál meghatároztuk az együttes sűrűségfüggvényt: $h(x,y) = \frac{6}{5}(x + (y-1)^2)$ $(0 \le x, y \le 1)$.

a) $M(Y) = \int_0^1 \int_0^1 y \frac{6}{5}(x + (y-1)^2)dx\, dy = \int_0^1 \frac{6}{5} y\left(\frac{1}{2} + (y-1)^2\right)dy = \frac{2}{5}$.

b) $g(y) = \int_0^1 \frac{6}{5}(x + (y-1)^2\, dx) = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2} + (y-1)^2\right)$ $(0 \le y \le 1)$.

Tehát $l(x|y) = \dfrac{x + (y-1)^2}{\frac{1}{2} + (y-1)^2}$, $(0 \le y \le 1)$. Így

$$M(X|Y = y) = \int_0^1 x l(x|y)dx = \frac{1}{\frac{1}{2} + (y-1)^2}\left[\frac{1}{3} + \frac{(y-1)^2}{2}\right] \quad (0 \le y \le 1).$$

15. (X, Y) együttes sűrűségfüggvénye:

$h(x, y) = l(x \mid y)\, g(y) = 6x$, ha $0 \le x \le y$ és $0 \le y \le 1$.

a) Az átlag az $x = 0{,}2$-re vonatkozó feltételes várható érték körül ingadozik. Látható, hogy a x-re vonatkozó feltételes eloszlások egyenletes eloszlások az $x \le y \le 1$ intervallumban. A várható érték ezért $\frac{1+x}{2}$. Ha $x = 0{,}2$, akkor a várható érték: $0{,}6$.

b) Független méréseknél az X koordináták mérési átlaga X várható értékéhez esik közel. X sűrűségfüggvénye: $f(x) = \int_x^1 6x\, dy = 6x(1-x)$ $(0 \le x \le 1)$.

$$M(X) = \int_0^1 x\, 6x(1-x)dx = \frac{1}{2}.$$

(0,2-től eltérő eredményt kaptunk, így a tapasztalt mérés bekövetkezése „kis valószínűségű").

16. X és Y között lineáris kapcsolat van, ezért $|R(X, Y)| = 1$, tehát $\left|\dfrac{\mathrm{cov}(X, Y)}{D(X)D(Y)}\right| = 1$.

Innen $|\mathrm{cov}(X, Y)| = D(X)\, D(Y)$.

Nyilván $M(X)=2{,}5$, $D^2(X)=M(X^2)-M^2(X)$, ahol

$M(X^2)=\frac{1}{\binom{90}{5}}\sum_{k=0}^{5}\binom{45}{k}\binom{45}{5-k}k^2$. X és Y azonos eloszlásúak, tehát

$|\mathrm{cov}(X,Y)|=D^2(X)$.

17. X Poisson-eloszlásúnak tekinthető. Legyen az egy órai szálszakadások átlagos száma λ. Ekkor $M\left(\frac{1}{4}X\right)=\frac{\lambda}{4}$, $D^2\left(\frac{1}{4}X\right)=\frac{\lambda}{16}$.

Legyen $Y=60-\frac{X}{4}$. Ekkor $M(Y)=60-\frac{\lambda}{4}$, $D^2(Y)=D^2\left(60-\frac{X}{4}\right)=\frac{\lambda}{16}$;

$$M\left(\frac{X}{4}\left(60-\frac{X}{4}\right)\right)=M\left(60\cdot\frac{X}{4}-\frac{X^2}{4^2}\right)=60\cdot\frac{\lambda}{4}-\frac{1}{4^2}(\lambda+\lambda^2),$$

hiszen, mivel X Poisson-eloszlású, $M(X^2)-\lambda^2=\lambda$.

$\mathrm{cov}\left(\frac{X}{4},Y\right)=60\cdot\frac{\lambda}{4}-\frac{1}{4^2}(\lambda+\lambda^2)-\frac{\lambda}{4}\left(60-\frac{\lambda}{4}\right)=-\frac{\lambda}{16}$. Ezért a

kovarianciamátrix: $\frac{\lambda}{16}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

Megjegyzés: felhasználva, hogy $\frac{X}{4}$ és Y között lineáris kapcsolat van, a kovariancia úgy is számolható, hogy $R\left(\frac{X}{4},Y\right)=1$, azaz $\frac{\mathrm{cov}\left(\frac{X}{4},Y\right)}{D\left(\frac{X}{4}\right)D(Y)}=-1$,

innen $\mathrm{cov}\left(\frac{X}{4},Y\right)=-\frac{\lambda}{16}$.

18. $M(X)=\frac{1}{2}$, $D^2(X)=\frac{1}{12}$, mivel X egyenletes eloszlású,

$h(x,y)=1\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}-\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$, ha $\sqrt{x}\le y\le 2\sqrt{x}$. $M(Y)$-t és $M(Y^2)$-et közvetlenül kettős integrállal számolva

$$M(Y)=\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} y\frac{1}{\sqrt{x}}\,dy\,dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\left(2x-\frac{x}{2}\right)dx=1.$$

$$M(Y^2)=\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} y^2\frac{1}{\sqrt{x}}\,dy\,dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}\right)dx=\frac{7}{6}.$$

$$M(X\cdot Y)=\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} xy\frac{1}{\sqrt{x}}\,dy\,dx=\int_0^1\sqrt{x}\left(2x-\frac{x}{2}\right)dx=\frac{3}{5}.$$

a) Tehát $K_{(X,Y)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{12} & \frac{3}{5}-\frac{1}{2}\\ \frac{3}{5}-\frac{1}{2} & \frac{7}{6}-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{12} & 0{,}1\\ 0{,}1 & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$.

b) $D^2(X+Y)=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{10}=\frac{9}{20}$.

19. $\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$.

IX.3. Vegyes feladatok

25. $D(Y)=\frac{4}{7}\sqrt{6}$. A feltételes szórások 0, 2, 3-n rendre $\sqrt{2}$, 0, $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

A feltételes móduszok 0, 2, 3-n rendre 2, 2, 1.

26. Indirekt. Tegyük fel, hogy $M(X)$ és $M(Y)$ is létezik. Ebből az következik, hogy $M(X+Y)$ is létezik.

$X+Y$ eloszlása: $P(X+Y=k)=\sum_{n=1}^{k-1}P(X=n,Y=k-n)=$

$$=\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{(k-1)k(k+1)}=\frac{k-1}{(k-1)k(k+1)}=\frac{1}{k(k+1)}.$$

$X+Y$ várható értéke: $\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}$.

Utóbbi sor divergens, tehát $(X+Y)$-nak nem létezik várható értéke. Ez ellentmond az indirekt feltevésnek.

27. $\begin{pmatrix}\pi-3 & 0\\ 0 & \pi-3\end{pmatrix}$.

28. $\frac{\sqrt{3}}{50}$.

29. $g(y)=\begin{cases}y, & \text{ha } 0\le y<1,\\ y^{-3}, & \text{ha } y\ge 1;\end{cases}$ ezért *a)* $\frac{3}{4}$; *b)* 1.

30. A teljes várható érték tétel szerint:

$$M(Y)=\sum_{k=1}^{\infty}P(\alpha=k)\cdot M(X_1+...+X_k)=\sum_{k=1}^{\infty}P(\alpha=k)\cdot k\,M(X_k)=$$

$$=M(X_i)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}P(\alpha=k)\cdot k=M(X_k)M(\alpha).$$

31. $(2,\ 2+2\ln 2)$.

32. $\operatorname{cov}[(X+a),(Y+b)]=M[(X+a)(Y+b)]-M(X+a)\cdot M(Y+b)=$
$=M(XY+bX+aY+ab)-(M(X)+a)\cdot(M(Y)+b)=$
$=M(XY)+bM(X)+aM(Y)+ab-M(X)M(Y)-bM(X)-aM(Y)-ab=$
$=M(X\cdot Y)-M(X)\,M(Y)=\operatorname{cov}(X,Y)$.

33. *a)* $\begin{pmatrix}\frac{37}{18} & \frac{5}{9}\\ \frac{5}{9} & \frac{37}{18}\end{pmatrix}$; *b)* $\frac{47}{9}$.

34. $p_2=0$, valamint p_1 és p_3 tetszőleges $p_1+p_3=1$-et kielégítő valószínűségek.

35. $R(X_A,X_B)=\frac{\operatorname{cov}(X_A,X_B)}{D(X_A)D(X_B)}=\frac{M(X_A\cdot X_B)-M(X_A)\cdot M(X_B)}{M(X_A^2)-M^2(X_A)}=$

$$=\frac{P(AB)-P(A)\cdot P(B)}{P(A)-P^2(A)}=\frac{P(AB)-0{,}6^2}{0{,}6-0{,}6^2}=\frac{1}{6}.$$

Innen $P(AB)=0{,}4$. Tehát $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0{,}4}{0{,}6}=\frac{2}{3}$.

36. Legyenek X értékei a_1 és a_2, Y értékei b_1 és b_2, és ezeket vegyék fel rendre p_1 és p_2, illetve q_1 és q_2 valószínűségekkel, továbbá az együttes eloszlásra legyen $P(X=a_i,Y=b_j)=p_{ij}$. A korrelálatlanság miatt: $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_i^{\varepsilon_1}b_j^{\varepsilon_2}(p_{ij}-p_iq_j)=0$, $\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\{0,1\}$. Ezt homogén, lineáris egyenletrendszernek tekintve $D=\begin{pmatrix}1 & a_1\\ 1 & a_2\end{pmatrix}$ együtthatómátrixszal, det $D\neq 0$ miatt azt kapjuk, hogy csak triviális megoldása van, tehát $\sum_{i=1}^{2}b_j^{\varepsilon_2}(p_{ij}-p_iq_j)=0$.

Megismételve az előző gondolatmenetet, azt kapjuk, hogy ezen egyenletrendszernek is csak triviális megoldása van, tehát $p_{ij}-p_iq_j=0$, azaz X és Y valóban függetlenek.

37. Az y tengelyre vett peremeloszlásnak nem létezik szórása.

Ugyanis $M(Y^2)=\int_1^{\infty}\int_1^{\infty}y^2\frac{1}{x^3y^3}\,dx\,dy=\int_1^{\infty}\frac{1}{2y}\,dy$,

és ez az integrál divergens. $M(Y)$ létezik, ezért $D(Y)=\sqrt{M(Y-M(Y))^2}$ nem létezik.

38. γ.

39. $M(X+Y)=M(X)+M(Y)=10$, ezért Csebisev-egyenlőtlenség szerint

$$P(|X+Y-M(X)-M(Y)|<2)>1-\frac{D^2(X+Y)}{2^2}.$$

$$\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D(X)D(Y)}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\frac{1}{2}}=-\frac{3}{4},\quad\text{innen}\quad \operatorname{cov}(X,Y)=-\frac{3}{8}.$$

$$D^2(X+Y)=D^2(X)+D^2(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{1}{4},$$

tehát $1-\dfrac{D^2(X+Y)}{4}=1-\dfrac{1}{16}=\dfrac{15}{16}$.

40. $\mathrm{cov}(X, Y) = M(XY) - M(X)M(Y)$. $M(X) = M(Y) = 0$, továbbá Y függvénye X-nek, tehát $Y = t(X)$, ahol t Y definíciójában adott. Valószínűségi változó függvényének várható értékét számolva:

$$M(X\cdot t(X))=\int_{-\infty}^{\infty} x\,t(x)f(x)dx=\int_{-\infty}^{-c} -x^2 f(x)dx+\int_{-c}^{c} x^2 f(x)dx+\int_{c}^{\infty} -x^2 f(x)dx\,,$$

ahol $f(x)$ a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye és kihasználjuk, hogy

$M(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$ a standard normális eloszlás szórásnégyzete, tehát 1.

$$\mathrm{cov}(X,Y)=M(X\cdot t(X))=2\int_{-c}^{c} x^2 f(x)dx-1\,.$$

41. *a)* Legyen X az első dobás eredménye, és Y az azt követő dobássorozatból elért 6-osok száma. A teljes várható érték tételét alkalmazva,

$$M(Y)=\sum_{i=0}^{6} P(X=i)\cdot M(Y\,|\,X=i)=\frac{1}{6}\sum_{i=0}^{6} M(Y\,|\,X=i)\,.$$

Az $X=i$ feltétel mellett Y eloszlása i-edrendű, $\dfrac{1}{6}$ paraméterű binomiális eloszlás, melynek várható értéke $\dfrac{i}{6}$.

Ezért $M(Y)=\dfrac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\dfrac{i}{6}=\dfrac{1}{36}\cdot\dfrac{6\cdot 7}{2}=\dfrac{7}{12}$.

b) $D^2(Y) = M(Y^2) - M^2(Y)$. $M(Y)$-t *a)*-ban kiszámoltuk.
$M(Y^2)$-re teljes várható érték tételt alkalmazunk:

$M(Y^2)=\sum_{i=0}^{6} P(X=i)M(Y^2\,|\,X=i)$. Mivel $Y|X=i$ $\quad B\left(i,\dfrac{1}{6}\right)$ eloszlás, ezért a $D^2(Y\,|\,X=i)=M(Y^2\,|\,X=i)-M^2(Y\,|\,X=i)$ összefüggést és $B\left(i,\dfrac{1}{6}\right)$ szórását használva $M(Y^2\,|\,X=i)=i\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6}+\left(i\cdot\dfrac{1}{6}\right)^2$.

Ezért $M(Y^2)=\sum_{i=0}^{6}\dfrac{1}{6}\left(i\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6}+i^2\cdot\dfrac{1}{36}\right)=\dfrac{1}{6^3}\sum_{i=0}^{6}(5i+6i^2)$.

42. *a)* $\dfrac{n}{3}$; *b)* $\dfrac{1}{3}\sqrt{2n}$.

43. *a)* $\dfrac{425}{12}$; *b)* $\dfrac{5}{24}\sqrt{238}$.

44. *a)* $\dfrac{\sqrt{x}}{2}$; *b)* $\sqrt{\dfrac{x}{12}}$.

45. *a)* $\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix}1 & 0{,}5\\ 0{,}5 & \dfrac{7}{12}\end{pmatrix}$; *b)* $\dfrac{31}{144}$.

46. *a)* A feladat $M(|C_1-X|+|C_2-Y|)=M(|C_1-X|)+M(|C_2-Y|)$ minimalizálása, ahol (X, Y) az átfogó másik végpontját jelöli. X és Y sűrűségfüggvénye: $f(x)=\int_{y=0}^{\infty}\dfrac{1}{4}e^{-\frac{x+y}{2}}dy=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$ és hasonlóan $g(y)=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}$ $(0<x,y)$.

Ismeretes, hogy $M(|C_1-X|)$, ill. $M(|C_2-Y|)$ akkor minimális, ha C_1, ill. C_2 az X, ill. Y eloszlásához tartozó medián, tehát pl. C_1-re

$$\frac{1}{2}=\int_0^{c_1} f(x)dx=\int_0^{c_1}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx=1-e^{-\frac{c_1}{2}}\,,$$

ahonnan, használva a szimmetriát, $C_1 = C_2 = 2\ln 2 \approx 1{,}386$.

b) A minimalizálandó:
$M((X-C_1)^2+(Y-C_2)^2)=M(X-C_1)^2+M(Y-C_2)^2$.
A Steiner-egyenlőtlenség szerint $M(X-C_1)^2\ge D^2(X)$, ahol egyenlőség csak $C_1=M(X)$ esetén teljesül. A fenti kifejezés tehát akkor minimális, ha

$C_1 = M(X)$ és $C_2 = M(Y)$. Tekintve, hogy X és Y eloszlása az $\frac{1}{2}$ paraméterű exponenciális eloszlás, $C_1 = C_2 = 2$.

47. Ha $i = j$, $1 \le i$, $j \le 90$, akkor $P(X = i, Y = j) = \frac{1}{90}$.

$M(X) = M(Y) = \frac{91}{2} = 45{,}5$, hiszen X és Y egyenletes eloszlásúak az 1, 2, …, 90 számokon.

$\mathrm{cov}(X, Y) = M(XY) - M(X)\,M(Y) = M(XY) - 45{,}5^2$.

$$M(XY) = \sum_{\substack{1\le i,\, j\le 90\\ i\ne j}} \frac{ij}{\binom{90}{2}} = \frac{1}{90\cdot 89}\sum_{i=1}^{90} i\left(\sum_{j=1}^{90} j - i\right) =$$

$$= \frac{1}{90\cdot 89}\sum_{i=1}^{90}\frac{90\cdot 91}{2}i - \frac{1}{90\cdot 89}\sum_{i=1}^{90} i^2 = \frac{\left(\frac{90\cdot 91}{2}\right)^2}{90\cdot 89} - \frac{\frac{90\cdot 91\cdot 181}{6}}{90\cdot 89} = \frac{6188}{3}.$$

Tehát $\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{6188}{3} - 45{,}5^2 = -7{,}5833$.

48. $c = \frac{1}{2}$.

X. Regresszió

X.1. Gyakorlófeladatok

1. *a)* A feltételes várható érték függvénnyel érdemes közelíteni:

$$M(X \mid Y = 0) = 0\cdot\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} + 1\cdot\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} + 2\cdot\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{5}{4};$$

$$M(X \mid Y = 1) = 0\cdot\frac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{3}} + 1\cdot\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}} + 2\cdot\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{11}{8}.$$

b) A regressziós egyenessel érdemes tippelni:

$$M(Y) = 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3},\quad D^2(Y) = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9};$$

$$M(X) = 0\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{2} = \frac{4}{3},\quad D^2(X) = \frac{7}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{5}{9};$$

$$M(XY) = 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{11}{12},\quad \mathrm{cov}(X,Y) = \frac{11}{12} - \frac{8}{9} = \frac{1}{36}.$$

Ezzel a regressziós egyenes összes paramétere adott, az egyenes:

$$y = \frac{x}{20} + \frac{3}{5}.$$

2. *a)* A feltételes módusz függvénnyel közelítünk: $[(n+1)p_n]$.

b) A feltételes várható érték függvényt használjuk: np_n.

3. *a)* A feltételes medián:

$$\int_{y^2}^{\mu} \frac{1}{2\sqrt{x}(1-y)}\,dx = \frac{(\sqrt{\mu} - y)}{1-y} = \frac{1}{2}\text{-ből } \mu(y) = \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 \quad (0 \le y \le 1).$$

b) A feltételes várható érték:

$$\int_{y^2}^{1} x\frac{1}{2\sqrt{x}(1-y)}\,dx = \frac{1-y^3}{3(1-y)} = \frac{1}{3}(1+y+y^2) \quad (0\le y\le 1).$$

c) Az együttes sűrűségfüggvény:

$$h(x,y)=g(y)l(x|y)\frac{1}{\sqrt{x}} \quad (0\le y\le 1,\ y^2\le x\le 1);$$

$$M(Y)=\int_0^1 y\cdot 2(1-y)dy=\frac{1}{3},\ M(Y^2)=\int_0^1 y^2 2(1-y)dy=\frac{1}{6};$$

$$D^2(Y)=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{18}.$$

X eloszlása egyenletes (0, 1)-ben, hiszen $h(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ és

$$f(x)=\int_0^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}dy=1.$$ Tehát $M(X)=\frac{1}{2}$, $D^2(X)=\frac{1}{12}$,

$$M(XY)=\int_0^1\int_0^{\sqrt{x}} xy\frac{1}{\sqrt{x}}dy\,dx=\int_0^1\sqrt{x}\frac{x}{2}dx=\frac{1}{5}.$$

Így a regressziós egyenes implicit egyenlete:

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{12}}}=\frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{\sqrt{12}}\cdot\frac{1}{\sqrt{18}}}\cdot\frac{y-\frac{1}{6}}{\frac{1}{\sqrt{18}}}.$$

4. Jelölje $k(y)$ a *b)*-beli függvényt. Ekkor:

$$\int_0^1\int_{y^2}^1 (x-k(y))^2\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\,dy=\int_0^1\int_{y^2}^1 x^{\frac{3}{2}}+\frac{k^2(y)}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}\,k(y)\,dx\,dy=$$

$$=\int_0^1\frac{8}{45}-\frac{2}{9}y-\frac{2}{9}y^2+\frac{2}{9}y^3+\frac{2}{9}y^4-\frac{8}{45}y^5\,dy.$$

5. A feltételes mediánnal tippelünk. $|Y|$ feltételes eloszlása X-re vonatkozóan egyenletes a $(0, \sqrt{1-x^2})$ intervallumon. Így a feltételes medián függvény: $\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}$ (az egyenletes eloszlás miatt ez éppen a feltételes várható érték függvény).

6. *a)* Az optimális az, ha a feltételes várható érték függvénnyel közelítünk:

$$g(y)=\int_0^{1-y}60xy^2dx=30y^2(1-y)^2\quad(0\le y\le 1).\ \text{Így}$$

$$l(x|y)=\frac{60xy^2}{30y^2(1-y)^2}=\frac{2x}{(1-y)^2}\quad(0\le y\le 1,\ 0\le x\le 1-y);$$

$$M(X|Y=y)=\int_0^{1-y}x\frac{2x}{(1-y)^2}dx=\frac{2}{3}(1-y)$$ valóban, így ez az optimális közelítő függvény.

Megjegyzés: mivel a négyzetes hibát optimalizáló függvény egyenes, ez szükségképpen a regressziós egyenes.

b) A hiba: $\int_0^1\int_0^{1-x}\left(x-\frac{2}{3}(1-y)\right)^2 60xy^2\,dy\,dx=\frac{1}{63}$.

7. $G(z)=P(X+Y<z)=\int_{-1}^{z+1}\int_{-1}^{z-x}\frac{1}{8}(x+y+2)\,dy\,dx=$

$$=\int_{-1}^{z+1}\frac{1}{8}\left(x(z-x)+\frac{(z-x)^2}{2}+2(z-x)+x-\frac{1}{2}+2\right)dx,\ \text{ ha } -2<z\le 0.$$

$$G(z)=P(X+Y<z)=1-P(X+Y\ge z)=1-\int_{z-1}^{1}\int_{z-x}^{1}\frac{1}{8}(x+y+2)\,dy\,dx=$$

$$=1-\int_{z-1}^{1}\frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{2}+2-x(z-x)-\frac{(z-x)^2}{2}-2(z-x)\right)dx,\ \text{ ha } 2>z>0.$$

8. $|R(X, Y)|=1$, így X és Y között lineáris kapcsolat van, 1 valószínűséggel.

. *a)* A feltételes várható érték függvénnyel tippelünk. A feltételes eloszlások binomiális eloszlások. Így a tippelőfüggvény: $q(i) = i \cdot \frac{1}{6}$.

b) $M(X) = 2,\ D^2(X) = 2,\ M(Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i i \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, ahol a teljes várható érték tételt használtuk, valamint a binomiális és a geometriai eloszlás várható értékét. Hasonlóan, $M(Y^2) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \frac{i(i+5)}{36}$, ahol kihasználtuk, hogy a $B\left(i, \frac{1}{6}\right)$ binomiális eloszlásnál a második momentum $\frac{1}{36} i(i+5)$.

$$\frac{1}{36}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i \frac{i(i+5)}{36} + \frac{5}{36}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i \frac{i(i+5)}{36} = \frac{1}{36}(2+2^2+10) = \frac{4}{9},$$

ahol ismét kihasználtuk a geometriai eloszlás várható értékének és szórásának értékét. $D^2(Y) = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$.

$$M(X \cdot Y) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i} ik\left(\frac{1}{2}\right)^i \binom{i}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{i-k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} i\left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\sum_{k=1}^{i} k\binom{i}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{i-k}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} i\left(\frac{1}{2}\right)^i i\frac{1}{6} = \frac{1}{6}(2+2^2) = 1.$$

Tehát a regressziós egyenes egyenlete:

$$\frac{y - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{3}{9}}} = \frac{1 - 2\cdot\frac{1}{3}}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{3}{9}}} \cdot \frac{x-2}{\sqrt{2}}.\ \text{Ebből } y = \frac{x}{6}.$$

0. Adott (X, Y) együttes eloszlása. Ebből X eloszlása: 0,52, ill. 0,48 az 1, ill. 0-n, Y eloszlása ugyanez.
Tehát $M(X) = M(Y) = M(X^2) = M(Y^2) = 0{,}52$.
$D^2(X) = D^2(Y) = 0{,}52 - (0{,}52)^2 = 0{,}249$.
$\mathrm{cov}\,(X, Y) = 0{,}32 - (0{,}52)^2 = 0{,}049$.

Így $R(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{D(X)\cdot D(Y)} \approx 0{,}199$.

A regressziós egyenes $\frac{x-m}{\sigma} = R\frac{y-m}{\sigma}$ egyenletéből behelyettesítéssel kapjuk a tippelőfüggvény implicit egyenletét. Ebből $x = 0{,}199\,y + 0{,}42$.

11. A feltételes várható érték függvénnyel tippelünk, amely az egyenletes eloszlások miatt azonosan 0. Legyen Y a második szám.

$h(x,y) = f(x)\cdot k(y|x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2|x|}$. Tehát a hiba:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-|x|}^{|x|}(y-0)^2\frac{1}{4|x|}\,dy\,dx = \int_{-1}^{+1}\frac{1}{6}x^2\,dx = \frac{1}{9}.$$

12. A feltételes mediánnal tippelünk. Jelölje X az ugrás magasságát, Y az ernyő kioldásának magasságát. A VIII.**23.** megoldásában meghatároztuk Y feltételes eloszlását X-re nézve:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2x}{g}} - \sqrt{\frac{4}{g}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2gy}} \quad (2 \le y \le x,\ \ 2 \le x \le 4).$$

$$\int_2^{\mu}\frac{1}{\sqrt{\frac{2x}{g}} - \sqrt{\frac{4}{g}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2gy}}\,dy = \frac{1}{2}\text{-ből} \quad \mu(x) = \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{2}\right)^2 \quad (2 \le x \le 4).$$

13. A függetlenség miatt, az egyik izzó élettartama a másikra nézve nem ad információt. Így, függetlenül a másik izzó élettartamától, a mediánnal érdemes tippelni.

X.3. Vegyes feladatok

20. *a)* Feltételes módusz; *b)* feltételes várható érték;
c) lásd az **1.***a)* feladatot.

21. $-x + 1$.

22. Legyenek a koordinátáknak megfelelő valószínűségi változók X és Y.

a) A regressziós egyenes egyenlete

$$\frac{x-M(X)}{D(X)}=R(X,Y)\frac{y-M(Y)}{D(Y)},\quad \text{ahol}\quad R(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D(X)\cdot D(Y)},$$

tehát $x=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D^2(Y)}(y-M(Y)+M(X))$.

Itt $M(Y)=\displaystyle\int_{x=0}^{2}\int_{y=x}^{2x}\frac{1}{6}xy^2\,dy\,dx=\int_{x=0}^{2}\left[\frac{xy^3}{18}\right]_{y=x}^{2x}dx=\frac{112}{45}$.

$$D^2(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)=\int_{x=0}^{2}\int_{y=x}^{2x}\frac{1}{6}xy^3\,dy\,dx-\left(\frac{112}{45}\right)^2=$$

$$=\int_{x=0}^{2}\left[\frac{xy^4}{24}\right]_{y=x}^{2x}dx-\left(\frac{112}{45}\right)^2=\frac{956}{2025}.$$

$$M(X)=\int_{x=0}^{2}\int_{y=x}^{2x}\frac{1}{6}x^2y\,dy\,dx=\int_{x=0}^{2}\left[\frac{x^2y^2}{12}\right]_{y=x}^{2x}dx=\frac{8}{5}.$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=M(X\cdot Y)-M(X)\cdot M(Y)=$$

$$=\int_{x=0}^{2}\int_{y=x}^{2x}\frac{x^2y^2}{6}dy\,dx-\frac{8}{5}\cdot\frac{112}{45}=\int_{x=0}^{2}\left[\frac{x^2y^3}{18}\right]_{y=x}^{2x}dx-\frac{896}{225}=$$

$$=\frac{112}{27}-\frac{896}{225}=\frac{112}{675}.$$

Tehát a regressziós egyenes egyenlete $x=\dfrac{\frac{112}{675}}{\frac{956}{2025}}\left(y-\dfrac{112}{45}\right)+\dfrac{8}{5}$.

b) $r(y)$-nak az $M(X\mid Y=y)$ $(0<y<4)$ függvényt kell választanunk.

Ha $0<y\le 2$, akkor Y sűrűségfüggvénye $g(y)=\displaystyle\int_{x=\frac{y}{2}}^{y}\frac{xy}{6}dx=\frac{y^3}{16}$, illetve,

ha $2<y<4$, $g(y)=\displaystyle\int_{x=\frac{y}{2}}^{2}\frac{xy}{6}dx=\frac{y}{3}-\frac{y^3}{48}$.

Ha $0<y\le 2$, $l(x\mid y)=\dfrac{h(x,y)}{g(y)}=\dfrac{8x}{3y^2}$ $\left(\dfrac{y}{2}<x<y\right)$, tehát

$$M(X\mid Y=y)=\int_{x=\frac{y}{2}}^{y}x\cdot\frac{8x}{3y^2}dx=\frac{7}{9}y.$$

Ha $2<y<4$, $l(x\mid y)=\dfrac{h(x,y)}{g(y)}=\dfrac{8x}{16-y^2}$ $\left(\dfrac{y}{2}<x<2\right)$, tehát

$$M(X\mid Y=y)=\int_{x=\frac{y}{2}}^{2}x\cdot\frac{8x}{16-y^2}dx=\frac{y^2+4y+16}{3(y+4)}.$$

23. Az $m(c)=M((X-c\sqrt{Y})^2)=M(X^2)+c^2M(Y)-2cM(X\sqrt{Y})=$

$$=M(X^2)+M(Y)\left(c^2-2\frac{M(X\sqrt{Y})}{M(Y)}c\right)=$$

$$=M(X^2)+M(Y)\left(c-\frac{M(X\sqrt{Y})}{M(Y)}\right)^2-\frac{M(X\sqrt{Y})^2}{M(Y)}$$

függvényt kell minimalizálnunk. Akkor minimális c-ben, ha $c=\dfrac{M(X\sqrt{Y})}{M(Y)}$.

Itt $M(Y)=\dfrac{112}{45}$, a **22.***a)* megoldásból.

$$M(X\sqrt{Y}) = \int_{x=0}^{2}\int_{y=x}^{2x} x\sqrt{y}\,\frac{xy}{6}\,dy\,dx = \int_{x=0}^{2}\left[\frac{x^2 y^{\frac{5}{2}}}{15}\right]_{y=x}^{2x} dx =$$

$$= \frac{512-64\sqrt{2}}{165} \approx 2{,}555, \quad \text{tehát} \quad c \approx \frac{2{,}555}{\frac{112}{45}} \approx 1{,}02635.$$

4. Legyen $h(x,y)=f(x)\,k(y\mid x)$ és rögzített $r(x)$-re $T=\left\{(x,y): |y-r(x)|>\frac{1}{2}\right\}$;

$$P\left(|Y-r(X)|>\frac{1}{2}\right) = \iint_{T} f(x)k(y|x)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\int_{T_x} k(y|x)\,dy\,dx, \quad \text{ahol}$$

$$T_x=\left\{y: |y-r(x)|>\frac{1}{2}\right\}.$$

A belső integrál rögzített x-re éppen a $P\left(|Y-r(x)|>\frac{1}{2}\,\middle|\,X=x\right)$ valószínűség.

A III.**48.** feladat alapján tudjuk, hogy ez olyan r-re maximális, amelyre

$$k\left(r(x)-\frac{1}{2}\,\middle|\,x\right) = k\left(r(x)+\frac{1}{2}\,\middle|\,x\right).$$

25. $n = 1$-re tippelünk, minden $y\in(0, 1)$-re.

26. *a)* A szóban forgó regressziós egyenes akkor konstans, ha $\operatorname{cov}(\alpha,\beta)=0$.
$\operatorname{cov}(X+Y, X-Y) = M((X+Y)\cdot(X-Y)) - M(X+Y)\cdot M(X-Y) =$
$= M(X^2) - M(Y^2) - (M^2(X) - M^2(Y)) = D^2(X) - D^2(Y) = 0$-ból kapjuk, hogy $D^2(X) = D^2(Y)$.

b) Az első gondolatmenet megfordításaként, ha X és Y azonos eloszlásúak, akkor $D^2(X) = D^2(Y)$, ezért $\operatorname{cov}(\alpha,\beta)=0$, vagyis a regressziós egyenes konstans és $M(\beta) = 0$ miatt ez a konstans nulla.

27. $\dfrac{x^2-1}{2x\ln x}$ $(0<x<1)$. Lineáris függvényt nem használhatunk, mert m_2 nem létezik.

28. *a)* Feltételes módusszal: $[0{,}75\ i]$;
b) feltételes várható értékkel: $0{,}75\ i$.

29. $\dfrac{3}{5\sqrt{2}}$.

30. $r(x)=\dfrac{3}{4}\dfrac{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}{1+2x^2}$, $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (y-r(x))^2\,\frac{8}{\pi}(x^2+y^2)\,dy\,dx$.

A regressziós egyenes paraméterei:

$$m_x=m_y=\frac{8}{5\pi},\quad \sigma_x=\sigma_y=\frac{1}{3}-\left(\frac{8}{5\pi}\right)^2,\quad c=\frac{2}{9\pi}-\left(\frac{8}{5\pi}\right)^2.$$

31. Azon n-re érdemes tippelni, amelyre a $P(U=n\mid Y=93, X=4)$ valószínűség a legnagyobb.

$$P(U=n\mid Y=93, X=4)=\frac{P(Y=93,\ X=4,\ U=n)}{P(Y=93,\ X=4)}.$$

Innen $P(Y=93, X=4, U=n) = P(U=n)\,P(Y=93, X=4\mid U=n)$.

Ha $n=15$, akkor ez az érték $\dfrac{1}{100}\cdot\dfrac{1}{15\cdot 61}$.

Ha $31\le n\le 80$, akkor ez az érték kisebb, mint $\dfrac{99}{5000}\cdot\dfrac{1}{31\cdot 125}$.

Az első érték nagyobb, ezért $n=15$-re érdemes tippelni.

32. Kódoljuk 1-gyel, illetve 2-vel rendre azt, hogy a szurkoló férfi, illetve nő. Jelentse az X valószínűségi változó a kódolt nemet, az Y valószínűségi változó a magasságot. (X, Y) ekkor egyik koordinátájában diszkrét, másikban folytonos eloszlás, $Y\mid X=1$ egy $N(178, 10)$, az $Y\mid X=2$ pedig egy $N(166, 8)$ eloszlás.

a) Bayes-tétel szerint:

$$P(X=2\mid Y<170)=$$

$$=\frac{P(X=2)P(Y<170\mid X=2)}{P(X=1)P(Y<170\mid X=1)+P(X=2)P(Y<170\mid X=2)}=$$

$$=\frac{0{,}1\Phi\left(\frac{170-166}{8}\right)}{0{,}9\Phi\left(\frac{170-178}{10}\right)+0{,}1\Phi\left(\frac{170-166}{8}\right)}.$$

b) Jelölje $f_1(x)$, ill. $f_2(x)$ rendre az $N(178, 10)$, ill. $N(166, 8)$ eloszlások sűrűségfüggvényét. Ekkor az egyik komponensükben diszkrét, másikban folytonos eloszlásokra vonatkozó összefüggés szerint:

$$P(X=1 \mid Y=x)=\frac{P(X=1)f_1(x)}{P(X=1)f_1(x)+P(X=2)f_2(x)}=\frac{0{,}9f_1(x)}{0{,}9f_1(x)+0{,}1f_2(x)}.$$

c) Jelölje a *b)*-beli függvényt $q(x)$. Férfire tippelünk, ha $q(x)>\frac{1}{2}$. Rövid számolással kapjuk, hogy $x>155{,}49$.

33. Ha $t>\frac{1}{8}\ln\frac{5}{4}\approx 0{,}028$ év, akkor magyarra, egyébként németre tippel.

X.4. Ellenőrző kérdések

34. *a)* Igen; *b)* nem; *c)* nem; *d)* igen.
35. Nem, de fordítva igen.
36. Mindkettő van.
37. Igen.
38. *a)* Igen; *b)* nem; *c)* igen.
39. *a)* Nem; *b)* igen; *c)* igen.
40. Nem.
41. A regressziós egyenes iránytangensének előjele.
42. Átlagos hibanégyzet $=\sigma_2^2(1-R^2)$.
43. *a)* Nem; *b)* igen.
44. Nem.

XI. Valószínűségi változók skalárfüggvényének eloszlása és paraméterei ($\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1$ eloszlástranszformáció)

XI.1. Gyakorlófeladatok

1. $X\cdot Y$ eloszlása a 0-ra, 1-re és 2-re koncentrálódik és rendre $\frac{5}{12}, \frac{1}{4}$ és $\frac{1}{3}$ értékekből áll.

$$M(X\cdot Y)=\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{3}=\frac{11}{12},\qquad M((X\cdot Y)^2)=\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{3}=\frac{19}{12}.$$

Ezért $D^2(X\cdot Y)=M((X\cdot Y)^2)-M^2(X\cdot Y)=\frac{19}{12}-\left(\frac{11}{12}\right)^2=\frac{107}{144}$.

2. Legyen tehát X $B\left(5,\frac{1}{4}\right)$, Y pedig $B\left(8,\frac{1}{4}\right)$ eloszlású, és független. Ekkor a binomiális eloszláshoz vezető alapfeladat szerint $X+Y$ $B\left(13,\frac{1}{4}\right)$ eloszlású, hiszen úgy tekinthetjük $X+Y$ értékét, mint 13 kísérletnél egy $\frac{1}{4}$ valószínűségű eseményre a bekövetkezések számát.

3. $X-Y$ eloszlásfüggvényét határozzuk meg területszámítással, az egyenletes eloszlás miatt. Tehát a $G(z)=P(X-Y<z)$ valószínűség:

ha $-2\le z<-1$, akkor $\frac{(2+z)^2}{4}$,

ha $-1\le z<0$, akkor $\frac{(2+z)+(1+z)}{4}=\frac{3+2z}{4}$,

ha $0\le z\le 1$, akkor $\frac{2-\frac{(1-z)^2}{2}}{2}=\frac{3-z^2+2z}{4}$.

Így az $f(z)$ sűrűségfüggvény:

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{(2+z)}{2}, & \text{ha } -2\le z<-1,\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & \text{ha } -1\le z<0,\\[2mm] \dfrac{2-2z}{4}, & \text{ha } 0\le z\le 1.\end{cases}$$

4. Az $U=[X]$ és $V=[Y]$ diszkrét eloszlások konvolúcióját kell meghatározni: Már levezettük, hogy $[X]$ eloszlása $p=e^{-\lambda}$ paraméterű geometriai eloszlás eltoltja (-1)-gyel:

$p_k=p^k(1-p) \quad (k=0,1,2,\dots)$.

$$P(U+V=n)=\sum_{k=0}^{n}p_kp_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}p^k(1-p)p^{n-k}(1-p)=(n+1)(1-p)^2p^n$$

$(n=0,1,2,\dots)$.

5. *a)* $M(X-Y-b)^2=M(X^2)+M(Y^2)+b^2-2\,M(X\cdot Y)-2bM(X)+2bM(Y)=$
$=b^2+(2\,M(Y)-2M(X))b+M(X^2)+M(Y^2)-2\,M(X\cdot Y)$.
Az utóbbi függvény b-ben egy parabola, ezért minimuma
$b=M(Y)-M(X)$, azaz $b=m_2-m_1$.

b) $M(X-aY)^2=M(X^2)+a^2\,M(Y^2)-2a\,M(X\cdot Y)$. Ez a függvény a-ban szintén parabola, ezért minimuma $a=\dfrac{M(XY)}{M(Y^2)}$, azaz $a=\dfrac{c+m_1m_2}{\sigma_2^2+m_2^2}$.

6. $G(z)=P(X+Y<z)=\displaystyle\iint_{\{(x,y):x+y<z\}}2x\cdot 3y^2\,dy\,dx$. Utóbbi integrál

ha $z<1$, akkor $\displaystyle\int_0^{z}\int_0^{z-x}6xy^2\,dy\,dx=\int_0^{z}6x(z-x)^3\frac{1}{3}\,dx=\frac{z^5}{10}$,

ha $1\le z\le 2$, akkor

$$1-\int_{z-1}^{1}\int_{z-x}^{1}6xy^2\,dy\,dx=1-\int_{z-1}^{1}6x\left(\frac{1}{3}-\frac{(z-x)^3}{3}\right)dx=\frac{10z^3+2-z^5-10z^2}{10}.$$

$f(x)$-nek önmagával vett konvolúciója: $\displaystyle\int_{\{(x,y):x+y<z)\}}2x\cdot 2y\,dy\,dx$.

7. Legyen X az elsőnek, ill. Y a másodiknak választott érték:

X sűrűségfüggvénye: $f(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{2}{3}(2x+y)dy=\frac{1}{3}(4x+1) \quad (0\le x\le 1)$,

Y sűrűségfüggvénye: $g(y)=\displaystyle\int_0^1\frac{2}{3}(2x+y)dy=\frac{2}{3}(1+y) \quad (0\le y\le 1)$.

$$P(X>Y)=\int_0^1\int_0^x\frac{1}{3}(4x+1)\frac{2}{3}(1+y)dy\,dx=\int_0^1\frac{1}{3}(4x+1)\frac{2}{3}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{5}{9}.$$

8. Legyen K az egységkörlap és d a valószínűségi változó.
A második momentum:

$$M(d^2)=\iint_K(x^2+y^2)\frac{1}{\pi}dy\,dx=\int_0^{2\pi}\int_0^1r^2r\frac{1}{\pi}dr\,d\varphi=\frac{1}{2},\ \text{tehát}\ \sqrt{M(d^2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$M(d)=\iint_K\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{1}{\pi}dy\,dx=\frac{2}{3}.$$

9. *a)* $\displaystyle\iint_K e^{x^2+y^2}\frac{1}{\pi}dy\,dx=\int_0^{2\pi}\int_0^1e^{r^2}\frac{1}{\pi}r\,dr\,d\varphi=e-1$.

Megjegyzés: Ha a transzformált eloszlás ismert, akkor a várható érték mint egydimenziós eloszlás várható értéke is meghatározható.

b) $\dfrac{1}{2}=P(e^{X^2+Y^2}<c)=P(X^2+Y^2<\ln c)=\ln c$, tehát $c=\sqrt{e}$.

10. A feltételes eloszlásokra vonatkozó szorzástétel értelmében:

$h(x,y)=2x(1+x)e^{-y(1+x)}$, ha $0\le x\le 1$, $0\le y$.

Ezért $P(X+Y<1)=\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x}2x(1+x)e^{-y(1+x)}dy\,dx=$

$=\displaystyle\int_0^1 2x(1-e^{-(1-x)(1+x)})dx=1-(1-e^{-1})=e^{-1}$.

11. XY eloszlásfüggvényét határozzuk meg:

$$P(XY<z)=\iint_{\{(u,v):u\cdot v<z\}} f(u)g(v)\,dv\,du=$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\int_{\frac{z}{u}}^{\infty} f(u)g(v)\,dv\,du+\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\frac{z}{u}} f(u)g(v)\,dv\,du=$$

$$=\int_{-\infty}^{0} f(u)\left[G(\infty)-G\left(\frac{z}{u}\right)\right]du+\int_{0}^{\infty} f(u)\left[G\left(\frac{z}{u}\right)-G(-\infty)\right]du,$$

ahol G Y-nak eloszlásfüggvénye. z szerinti deriválással a sűrűségfüggvény:

$$\int_{-\infty}^{0} f(u)g\left(\frac{z}{u}\right)\left(-\frac{1}{u}\right)du+\int_{0}^{\infty} f(u)g\left(\frac{z}{u}\right)\frac{1}{u}\,du=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g\left(\frac{z}{u}\right)\left|\frac{1}{u}\right|du,$$

hiszen $\dfrac{dG\left(\frac{z}{u}\right)}{dz}=g\left(\frac{z}{u}\right)\dfrac{1}{u}$.

12. A transzformált eloszlás kevert. Ha $Y=0$, ennek $\frac{1}{4}$ a valószínűsége, akkor $X^Y=1$. A folytonos rész eloszlásfüggvényét teljes valószínűség tétel segítségével határozhatjuk meg.

$$G(z)=P(X^Y<z)=P(Y=0)P(X<z)+P(Y=2)P(X^2<z)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^z 2x\,dx+\frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{z}} 2x\,dx=\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4}z\quad(0\le z\le 1).$$

13. Jelölje $h(x^2+y^2)$ a körszimmetrikus eloszlás ismeretlen sűrűségfüggvényét. Ekkor a transzformált eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$G(z)=P(X^2+Y^2<z)=\iint_{K_z} h(x^2+y^2)\,dy\,dx=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{z} h(r^2)r\,dr\,d\varphi=2\pi\cdot\frac{H(z^2)}{2},$$

ahol K_z a z sugarú kör, és H h-nak eloszlásfüggvénye. Másrészt

$P(X^2+Y^2<z)=z$, ha $0\le z\le 1$.

Innen $H(u)=\dfrac{\sqrt{u}}{\pi}$, tehát $h(x^2+y^2)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\dfrac{1}{2\pi}$.

14. A vitorlásbalesetek száma Poisson-eloszlásúnak tekinthető. A balatoni, ill. a genfi tavi balesetek X, ill. Y számának λ_1, ill. λ_2 paraméterére: $e^{-\lambda_1}=0{,}001$, ill. $e^{-\lambda_2}=0{,}005$, tehát $\lambda_1=\ln 1000$, $\lambda_2=\ln 5000$. Megmutatjuk, hogy két független Poisson-eloszlású valószínűségi változó összege is Poisson-eloszlású (azaz Poisson-eloszlások konvolúciója is Poisson-eloszlás).

$$P(X+Y=N)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}=$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n.$$

Az utóbbi egyenlőség a binomiális tétel miatt igaz. Tehát $\lambda_1+\lambda_2$ paraméterű Poisson-eloszlást kaptunk.

Megjegyzés: Az, hogy az összeg modellezhető Poisson-eloszlással, már a Poisson-eloszlás alkalmazhatóságának feltételeiből is következik.

15. *a)* Az eloszlás az 5, 4, 3, 2, 1 és 0 értékekre koncentrálódik, rendre $\frac{2}{36}, \frac{4}{36}, \frac{6}{36}, \frac{8}{36}, \frac{10}{36}$ és $\frac{6}{36}$ valószínűségértékekkel. Ez a klasszikus képlet alkalmazásával következik.

b) $5\cdot\frac{1}{18}+4\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{2}{9}+1\cdot\frac{5}{18}+0\cdot\frac{1}{6}$.

16. Két egyenletes eloszlás konvolúcióját kell meghatározni. Legyen X a villamosra, Y pedig a buszra várakozás ideje. $X+Y$ eloszlásfüggvényét határozzuk meg. A $G(z)=P(X+Y<z)=P(Y<z-X)$ valószínűség:

$$\frac{z^2}{2\cdot 75},\ \text{ha } 0\le z<5,\quad \frac{5(2z-5)}{2\cdot 75},\ \text{ha } 5\le z<15,$$

$$1-\frac{(20-z)^2}{2\cdot 75}, \text{ ha } 15\le z\le 20.$$

17–18. $Y-X$ eloszlása nem meghatározható, ha az együttes eloszlás, azaz (X, Y) eloszlása nem ismert. Ugyanez igaz $Y-X$ szórására is.
A várható érték meghatározható: $M(Y-X)=M(Y)-M(X)=0$. Azonban $M|Y-X|$ kiszámításához már szükség van az együttes eloszlásra. Ha feltételezzük X és Y függetlenségét, ez már az együttes eloszlás ismeretét jelenti és a kérdéses mennyiségek kiszámíthatók.
Pl.: $M|Y-X|$ meghatározása:
A hét időtartamát egységnyi hosszúságúnak véve, X-et, ill. Y-t az x, ill. y tengelyen tekintve, a függetlenség miatt a $0\le x,y\le 1$ négyzeten egyenletes eloszlást alkalmazhatunk:

$$M|Y-X|=\int_0^1\int_0^1|y-x|dy\,dx=2\cdot\int_0^1\int_0^x(x-y)dy\,dx=2\cdot\int_0^1\left(x^2-\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{1}{3}.$$

19. *a)* Az eloszlásfüggvény:

$$P(X^2+Y^2<z)=\iint_{\{(x,y):x^2+y^2<z\}}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{z}}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}r\,dr\,d\varphi=1-e^{-\frac{z}{2}}$$

$(z\ge 0)$. Az eloszlás tehát $\frac{1}{2}$ paraméterű exponenciális eloszlás.

b) 2, hiszen az exponenciális eloszlás várható értéke $\frac{1}{\lambda}$.
A várható értéket az eloszlás meghatározása nélkül is kiszámolhatjuk:

$$\iint_{R^2}(x^2+y^2)\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dy\,dx=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}r^3\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}dr\,d\varphi=2.$$

20. Az (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a feltételes eloszlásokra vonatkozó szorzástétel értelmében:

$$h(x,y)=2x\frac{2y}{x^2}=\frac{4y}{x}\quad(0\le x\le 1,\ 0\le y\le x),$$

$$M\left(\frac{X}{Y}\right)=\int_0^1\int_0^x\frac{x}{y}\cdot\frac{4y}{x}dy\,dx=\int_0^1\int_0^x 4dy\,dx=2.$$

21. Legyen X, ill. Y rendre a két pont távolsága az oldalak megfelelő végpontjaitól $(0\le X,Y\le 1)$. Ekkor a pontok távolsága: $\sqrt{1+(X-Y)^2}$.
a) Távolságuk $G(z)$ eloszlásfüggvénye:

$$G(z)=P(\sqrt{1+(X-Y)^2}<z)=P(|X-Y|<\sqrt{z^2-1})\quad(1\le z\le\sqrt{2}).$$

Ábrázoljuk X-et, ill. Y-t az x, ill. y tengely $(0, 1)$ intervallumain. (X, Y) egyenletes eloszlású a $0\le x,y\le 1$ négyzeten a függetlenség miatt. Ezért területszámítással: $G(z)=1-z^2+2\sqrt{z^2-1}\quad(1\le z\le\sqrt{2})$.

b) A $-(z^2-1)+2\sqrt{z^2-1}=0{,}5$ egyenletet kell megoldani. $u=\sqrt{z^2-1}$ helyettesítéssel: $-u^2+2u=0{,}5$. Innen $u=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Tehát $z^2-1=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Mivel $1\le z\le\sqrt{2}$, így $z=\sqrt{2-\frac{\sqrt{2}}{2}}$, ez a medián.

22. *a)* A magasság a két vetület, X és Y mértani közepe, tehát $\sqrt{X\cdot Y}$.

Eloszlásfüggvénye: $G(z)=P(\sqrt{X\cdot Y}<z)=P\left(Y<\frac{z^2}{X}\right)$.

X-et, ill. Y-t az x, ill. y tengelyen ábrázolva, együttes eloszlásuk egyenletes a $0\le x\le 1$, $0\le y\le 2$ téglán – a függetlenség miatt.

$$G(z)=P\left(Y<\frac{z^2}{x}\right)=1-P\left(Y\ge\frac{z^2}{x}\right)=1-\int_{\frac{z^2}{2}}^{1}\int_{\frac{z^2}{x}}^{2}\frac{1}{2}dy\,dx=$$

$$=1-\int_{\frac{z^2}{2}}^{1}\frac{1}{2}\left(2-\frac{z^2}{x}\right)dx=\frac{z^2\ln 2}{2}+\frac{z^2}{2}-z^2\ln z,\text{ ha } 1\le z\le\sqrt{2},$$

$G(z)=1$, ha $z\ge\sqrt{2}$.

b) $\int_0^1\int_0^2 \sqrt{xy}\,\frac{1}{2}\,dy\,dx = \int_0^1 \sqrt{x}\,\frac{1}{2}\,\frac{4\sqrt{2}}{3}\,dx = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

Megjegyezzük, hogy a várható érték meghatározásához nincs szükség $\sqrt{XY}$ eloszlásának meghatározására.

23. *a)* Legyen a két szám X és Y. A $\min(X, Y)$ eloszlásfüggvényére:

$$G(z) = P(\min(X,Y) < z) = 1 - P(\min(X,Y) \geq z) =$$

$$= 1 - P(X \geq z \cap Y \geq z) = 1 - P(X \geq z)P(Y \geq z) = 1 - \left(\frac{4-z}{2}\right)^2$$

$(2 \leq z \leq 4)$.

b) A sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvény deriváltja: $\frac{4-z}{2}$. Így a várható érték: $\int_2^4 z\frac{4-z}{2}\,dz = \frac{8}{3}$.

24. Az $|\alpha - S|$ abszolútérték-eltérés akkor minimális, ha S a medián. Legyenek a választott pont koordinátái X és Y, ekkor α eloszlásfüggvénye:

$P(\sqrt{X^2+Y^2} < z) = z^2$. $z^2 = \frac{1}{2}$-ből a medián $S = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Legyen K az egység sugarú, origó középpontú kör. Az átlagos veszteség:

$$M(100|\alpha - S|) = \iint_K 100\left|\sqrt{x^2+y^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right|\frac{1}{\pi}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 100\left|r - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| r\frac{1}{\pi}\,dr\,d\varphi = 200\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - r\right)dr + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 r\left(r - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)dr\right) =$$

$$= 200\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 19{,}53.$$

25. Legyen X a Gin, Y pedig a Martini valódi mennyisége.

Tudjuk, hogy X a $\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{30},\ \frac{2}{3} + \frac{2}{30}\right)$-ban, Y az $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{30},\ \frac{1}{3} + \frac{1}{30}\right)$-ban egyenletes eloszlású. Legyen

$$a = \frac{2}{3} - \frac{2}{30} = \frac{9}{15},\quad b = \frac{2}{3} + \frac{2}{30} = \frac{22}{30},\quad c = \frac{1}{3} - \frac{1}{30} = \frac{3}{10},\quad d = \frac{1}{3} + \frac{1}{30} = \frac{11}{30}.$$

A függetlenség miatt (X, Y) egyenletes eloszlású az $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ négyzeten. Tehát sűrűségfüggvénye: $h(x,y) = \frac{1}{(b-a)(d-c)} = \frac{900}{8}$.

$$M\left(\frac{X}{X+Y}\right) = \int_a^b\int_c^d \frac{x}{x+y}\,\frac{900}{8}\,dy\,dx.$$

XI.3. Vegyes feladatok

33. Az eloszlás értékei: a 2, 3, 4, 5 értékeken rendre a $\frac{2}{20}, \frac{7}{20}, \frac{5}{20}, \frac{6}{20}$ valószínűségek.

34. $f(z) = \begin{cases} z, & 0 \leq z < 1 \\ 2 - z, & 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$

35. Tegyük fel tehát, hogy X $B\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ binomiális, Y $G\left(\frac{2}{3}\right)$ geometriai eloszlásúak és függetlenek. Ekkor

$$P(X+Y=5) = P(X=0, Y=5) + P(X=1, Y=4) = P(X=0)P(Y=5) +$$

$$+ P(X=1)P(Y=4) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^4\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\frac{2}{3} = \frac{10}{3^6}.$$

36. *a)* $\frac{1}{2}$; *b)* 2-n, ill. 5-ön $\frac{6}{9}$, ill. $\frac{3}{9}$; *c)* $\frac{6}{9}$.

37. $\int_0^1\int_0^{2-x} (y-1+x)^2\,dy\,dx$.

38. $f(z)=\begin{cases} 0{,}5, & 0 \le z < 1 \\ \dfrac{1}{2z^2}, & z \ge 1. \end{cases}$

39. Vezessük be az alábbi transzformációt: $U=\dfrac{X}{Y}$, $V=Y$. X és Y együttes sűrűségfüggvénye $f(x)\,g(y)$. A transzformáció inverze: $(X, Y)=(UV, U)$. U és V együttes sűrűségfüggvénye a transzformációs képlet szerint

$$h(u,v)=f(uv)\cdot g(v)\cdot\left|\frac{dx}{du}\cdot\frac{dy}{dv}-\frac{dy}{du}\cdot\frac{dx}{dv}\right|=$$

$$=f(uv)\cdot g(v)\cdot|v\cdot 1-0\cdot u|=f(uv)\cdot g(v)|v|.$$

U sűrűségfüggvényét úgy kapjuk, hogy ezt az eloszlást az u tengelyre vetítjük: $r(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(uv)\cdot g(v)|v|\,dv$.

40. Chauchy.

41. $-3e^{-2\sqrt{2u}}+2e^{-3\sqrt{2u}}$ $(u \ge 0)$.

42. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy=\int_{0}^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r^2\,\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}\,r\,dr\,d\varphi=\int_0^{\infty} r^2 e^{-\frac{r^2}{2}}\,dr=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

43. Y eloszlása $-(X_1+X_2)$ eloszlása, Z eloszlása $X_1\cdot X_2$ eloszlása, ahol X_1 és X_2 a gyökök.

Y sűrűségfüggvénye $f(y)=\dfrac{1}{4}(2-|y|)$ $(|y|\le 2)$.

Z sűrűségfüggvénye $g(z)=-\dfrac{1}{2}\log|z|$ $(|z|\le 1)$.

44. $\dfrac{25}{72}$.

45. Koncentrálódjon az eloszlás az $y=-x$ egyenesre vagy 0-ra.

46. A polárszöget osztjuk 2π-vel.

47. $P(\alpha<1)=$

$$=P\left(X<\frac{1}{2}\right)\cdot P\left(X+Y^2<1 \,\middle|\, X<\frac{1}{2}\right)+P\left(X>\frac{1}{2}\right)\cdot P\left(X+Y<1 \,\middle|\, X>\frac{1}{2}\right)=$$

$$=P\left(X+Y^2<1, X<\frac{1}{2}\right)+P\left(X+Y>1, X>\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\int_0^{0,5}\int_1^{\sqrt{1-x}} 1\,dy\,dx+\frac{3}{8}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{3}{8}=\frac{25}{24}-\frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

48. Az $\alpha_i-\beta_i$ számokon feltételezett egyenletes eloszlás egy az $\ln\left(\dfrac{1}{1-X}\right)-\ln\left(\dfrac{1}{1-Y}\right)$ valószínűségi változóra mért tapasztalati eloszlás, amely $n=100$-ra a nagy számok törvénye szerint közelíti az elméleti eloszlás eloszlásfüggvényét:

$$P\left(\ln\left(\frac{1}{1-X}\right)-\ln\left(\frac{1}{1-Y}\right)<u\right)=P\left(\ln\left(\frac{1-Y}{1-X}\right)<u\right)=P\left(\frac{1-Y}{1-X}<e^u\right)=$$

$$=P(1-e^u+e^uX<Y).$$

A függetlenség és az egyenletes eloszlás miatt számolhatunk területtel:

ha $0<e^u\le 1$, azaz $-\infty<u\le 0$, akkor $F(u)=\dfrac{e^{-u}}{2}$,

ha $1<e^u$, azaz $u>0$, akkor $F(u)=1-\dfrac{e^{-u}}{2}$.

49. Egyenletes eloszlás (0, 1)-ben.

50. $M\left(\dfrac{X_1+\ldots+X_m}{X_1+\ldots+X_n}\right)=M\left(\dfrac{X_1}{X_1+\ldots+X_n}\right)+\ldots+M\left(\dfrac{X_m}{X_1+\ldots+X_n}\right)$.

Az $\dfrac{X_i}{X_1+\ldots+X_n}=\alpha_i$ valószínűségi változók azonos eloszlásúak és

$M(\alpha_1)+M(\alpha_2)+\ldots+M(\alpha_n)=1$, tehát $n\cdot M(\alpha_i)=1$, azaz $M(\alpha_i)=\dfrac{1}{n}$.

Ezért a kérdezett várható érték $m\cdot\dfrac{1}{n}$, valóban.

51. $F(s) = 1 - \cos s$, ahol s az (1, 0) ponttól számított ívhossz.

52. $P(X+Y=n) = (n-1)\,p^n(1-p)^2 \quad (n = 1, 2, \ldots)$.

$$M(X+Y) = 2\frac{p}{1-p}.$$

53. *a)* $P(X_1 = \varepsilon_1, X_2 = \varepsilon_2, X_3 = \varepsilon_3) = p_1p_2p_3$, ahol $p_i = \frac{1}{6}$, ha $\varepsilon_1 = 1$ és

$p_i = \frac{5}{6}$, ha $\varepsilon_1 = 0$;

b) $\frac{1}{2}$;

c) $\frac{\sqrt{15}}{6}$.

54. Például öt független kísérletből kétszer egy 0,25, háromszor egy 0,75 valószínűségű eseménnyel kísérletezünk. A valószínűségi változó az események bekövetkezéseinek száma.

55. *a)* $\frac{7}{6}$; *b)* $\begin{cases} z^2, & \text{ha } 0 < z \le 1 \\ 1-(z-1)^2, & \text{ha } 1 < z < 2. \end{cases}$

56. Legyen a két izzó élettartama X, ill. Y. X és Y együttes sűrűségfüggvénye a függetlenség miatt $h(x,y) = \frac{1}{(100)^2}\cdot e^{-\frac{1}{100}(x+y)}$.

$$M(|X-Y|) = \int_{x=0}^{\infty}\int_{y=0}^{\infty} |x-y|\cdot\frac{1}{(100)^2}e^{-\frac{1}{100}(x+y)}\,dy\,dx =$$

$$= \int_{x=0}^{\infty}\int_{y=0}^{x}(x-y)\cdot\frac{1}{(100)^2}e^{-\frac{1}{100}(x+y)}\,dy\,dx + \int_{y=0}^{\infty}\int_{x=0}^{y}(y-x)\cdot\frac{1}{(100)^2}e^{-\frac{1}{100}(x+y)}\,dx\,dy.$$

Mivel a két integrál változóiban szimmetrikus, értékeik megegyeznek, ezért

$$M(|X-Y|) = 2\int_{x=0}^{\infty}\int_{y=0}^{x}(x-y)\cdot\frac{1}{(100)^2}e^{-\frac{1}{100}(x+y)}\,dy\,dx =$$

$$= \int_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{x}{100}}(x-100)}{50} + 2e^{-\frac{x}{50}}\,dx = 100.$$

57. $2\cdot\int_0^{\infty}\int_0^{x}\frac{x}{4}e^{-\frac{1}{2}(x+y)}\,dy\,dx = 3$.

58. Az $x \in (0, 1)$, $y \in (x^2+x, 1)$ tartományban y a nagyobb, a négyzet többi részében x^2+x a nagyobb. Valószínűségi változók függvényének várható értékét számoljuk ki:

$$\iint_{\mathbf{R}^2} t(x,y)h(x,y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1\int_{x^2+x}^{2}(y-1{,}5)\frac{1}{4}\,dy\,dx + \int_0^1\int_0^{x+x^2}(x+x^2-1{,}5)\cdot\frac{1}{4}\,dy\,dx +$$

$$+\int_1^2\int_0^2(x+x^2-1{,}5)\cdot\frac{1}{4}\,dy\,dx = \int_0^1\frac{1}{4}\left[y^2-1{,}5y\right]_{x^2+x}^{2}dx +$$

$$+\int_0^1\frac{1}{4}(x+x^2-1{,}5)\left[y\right]_0^{x+x^2}dx + \int_1^2\frac{1}{4}(x+x^2-1{,}5)\cdot 2\,dx \approx 1{,}046.$$

Az átlag pozitív, tehát Józsinak előnyös a játék.

59. Az eloszlás kevert. Legyen X a büntetőpontok száma. $P(X=4) = p$.

A folytonos rész eloszlásfüggvénye: $F(x) = P(X < x) = (1-p)\cdot\frac{x^2}{9}$ $(0 \le x \le 3)$. Ugyanis az $X < x$ esemény ekvivalens azzal, hogy egyrészt el kell találnunk a céltáblát, másrészt azon belül az x sugarú kört; a metszet esemény valószínűségét szorzástétellel számoltuk ki.

60. A $d < x$ esemény ekvivalens azzal, hogy a választott pont az $1-x$ sugarú körön kívül van az egységkörben. Ezért d eloszlásfüggvénye:

$$P(d < x) = \frac{\pi-(1-x)^2\pi}{\pi} = 2x - x^2 \quad (0 \le x \le 1).$$

Ebből a mediánra: $2x - x^2 = \frac{1}{2}$, tehát $x = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

61. *a)* Legyen a két szám X és Y. A feltételből következően (X, Y) egyenletes eloszlású a négyzeten. Kiszámítandó $Z = \frac{\min(X,Y)}{\max(X,Y)}$ eloszlása. Az $X > Y$, $X < Y$ particionálással meghatározzuk Z eloszlásfüggvényét:

$$P(Z < u) = P(X > Y, Z < u) + P(X < Y, Z < u) =$$

$$= P\left(X > Y, \frac{Y}{X} < u\right) + P\left(X < Y, \frac{X}{Y} < u\right).$$

Az összeg két tagja szimmetriaokokból egyenlő. Egyszerű területszámítással kapjuk, hogy $P\left(X > Y, \frac{Y}{X} < u\right) = \frac{u}{2}$. Ezért $P(Z < u) = 2 \cdot \frac{u}{2} = u$, azaz Z eloszlása egyenletes $(0, 1)$-en.

b) $\frac{1}{Z}$ eloszlását a $t(x) = \frac{1}{x}$ transzformációval kapjuk Z eloszlásából. Sűrűségfüggvény-transzformációval: $g(y) = 1 \cdot \left(\frac{1}{y}\right)' = \left|-\frac{1}{y^2}\right| \quad (y \in (1, \infty))$.

Z várható értéke nyilván $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{Z}$-nek pedig nincs várható értéke, mert az $\int_1^\infty y \frac{1}{y^2} dy$ integrál nem konvergens.

62. *a)* $M(T) = 25, \quad M(K) = 20$;

b) $D(T) = \sqrt{51}, \quad D(K) = 2\sqrt{2}$.

63. $P(\min(X, Y) < u) = P(X < Y, X < u) + P(X > Y, Y < u) = 1 - (1 - u)^2$ $(0 \le u \le 1)$, utóbbit területszámítással kapjuk. Másrészt,

$$P(|X - Y| < u) = P(X < Y, Y - X < u) + P(X > Y, X - Y < u) =$$

$$= 1 - 2\frac{(1-u)^2}{2} = 1 - (1-u)^2 \quad (0 \le u \le 1).$$

64. Jelölje a harmadik legjobb eredményt X. $P(X < u) = 1 - P(X \ge u)$. Vegyük észre, hogy az $X \ge u$ esemény ($u \in (2, 3)$) ekvivalens azzal, hogy pontosan

kettő, egy vagy 0, u-nál jobb eredmény születik. Utóbbiak kizáró események és valószínűségük a $B(10, u-2)$ binomiális eloszlásból számolható.

Ezért $P(X \ge u) = \sum_{i=0}^{2} \binom{10}{i} p^i (1-p)^{10-i}$, ahol $p = u - 2$. Tehát a kérdezett eloszlásfüggvény: $F(u) = 1 - \sum_{i=0}^{2} \binom{10}{i} (u-2)^i (3-u)^{10-i}$.

65. A kérdéses Z távolság eloszlásfüggvénye területszámítással:

$$P(Z < u) = u^2, \quad \text{ha} \quad 0 \le u \le \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$P(Z < u) = 1 - (\sqrt{2} - u)^2, \quad \text{ha} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} < u \le \sqrt{2}.$$

66. A távolság eloszlásfüggvénye: $1 - e^{-5x^2\pi} \quad (x \ge 0)$.

XII. Valószínűségi változók vektorfüggvényének eloszlása és paraméterei ($R^2 \to R^2$ eloszlástranszformáció)

XII.1. Gyakorlófeladatok

1. *a)* Alkalmazva az adott transzformációt azokra a pontokra, ahová az eredeti eloszlás koncentrálódik, a transzformált eloszlás lehetséges értékei:

(2, 2), (4, 1), $\left(6, \frac{2}{3}\right)$, (1, 1), $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, $\left(3, \frac{1}{3}\right)$, (0, 0). E pontokra rendre

$\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$, 0, 0, 0, $\frac{1}{2}$ valószínűségértékek jutnak.

b) A peremeloszlások várható értékei:

$$M(XY) = 2\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{2} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{10}{3},\quad M\left(\frac{Y}{X}\right) = 2\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6} = \frac{11}{18},$$

$M\left(XY\cdot\frac{Y}{X}\right) = M(Y^2) = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$. Ezért a kovariancia:

$$2 - \frac{10}{3}\cdot\frac{11}{18} = -\frac{1}{27}.$$

2. *a)* $u = x,\ v = x + y$. Ebből $y = v - u,\ x = u,\ h(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$.

Innen $g(u,v) = \lambda^2 e^{-\lambda v}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 e^{-\lambda v}\quad (u \ge 0,\ v - u \ge 0)$.

b) $M(X) = \frac{1}{\lambda},\quad M(X+Y) = M(X) + M(Y) = \frac{2}{\lambda}$.

$$D^2(X) = \frac{1}{\lambda^2},\quad D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y) = 2\cdot\frac{1}{\lambda^2}.$$

$$\operatorname{cov}(X, X+Y) = M(X(X+Y)) - M(X)\,M(X+Y) =$$

$$M(X^2) + M(XY) - M(X)^2 + M(X)\,M(Y) = D^2(X) = \frac{1}{\lambda^2},$$

hiszen $\operatorname{cov}(X, X+Y) = M(XY) - M(X)\,M(Y) = 0$, X és Y függetlensége miatt. A kovarianciamátrix: $\frac{1}{\lambda^2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Másik megoldás: a kovarianciamátrix meghatározása kovarianciamátrix-transzformációval:
Az eredeti kovarianciamátrix:

$\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{pmatrix}$. Így a transzformált kovarianciamátrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda^2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) $\frac{g(u,v)}{\lambda e^{-\lambda u}} = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda v}}{\lambda e^{-\lambda u}} = \lambda e^{-\lambda(v-u)}\quad (v \ge u \ge 0)$.

d) A szóban forgó feltételes eloszlás $2X$ eloszlása.

3. $X = u\cos v$, $Y = u\sin v$ $(0 < u,\ 0 \le v \le 2\pi)$.

a) Sűrűségfüggvény-transzformációval, a sűrűségfüggvény:

$$g(u,v) = \frac{1}{2\pi}e^{-\left(\frac{u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v}{2}\right)}u = \frac{u}{2\pi}e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

b) A várható érték első koordinátája: $\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty} u^2\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{u^2}{2}}du\right)dv = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. A várható érték második koordinátája π, hiszen a polárszög $(0, 2\pi)$-ben egyenletes eloszlású.

4. *a)* $u = x^2 + y^2,\ v = y^2$, tehát $x = \sqrt{u - v},\ y = \sqrt{v}$.

$$\text{Így } g(u,v) = \frac{4}{\pi}\begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u-v}} & -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u-v}} \\ 0 & \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{v(u-v)}}.$$

$0 \le u \le 1$, mert $0 \le x^2 + y^2 \le 1$, $0 \le v \le 1$, mert $0 \le \sqrt{y} \le 1$. Továbbá $u \ge v$, mert $u - v = x^2$ és $0 \le x^2 \le 1$.

Az eloszlás tehát a $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le u$ tartományra koncentrálódik.

b) Kihasználva $g(u, v)$ alakját, ha az eredeti $h(x, y)$ sűrűségfüggvény $h(x, y) = cxy$ alakú, akkor a transzformált sűrűségfüggvény konstans. Ekkor

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} cxy\, dydx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 c(r\cos\varphi)(r\sin\varphi) r\, d\varphi dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\varphi}{2} d\varphi \int_0^1 cr^3 dr = 1 \text{ -ből}$$

$c = 8$.

5. *a)* A transzformációból $x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{u-v}{2}$.

$$g(u,v) = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{4},$$

és az eloszlás a $0 \le \dfrac{u+v}{2} \le 1$, $0 \le \dfrac{u-v}{2} \le 2$ tartományra, azaz a $0 \le u+v \le 2$, $0 \le u-v \le 4$ téglalapra koncentrálódik.

b) A transzformáció lineáris és mátrixa: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Az eredeti eloszlásra $D^2(X) = \dfrac{1}{12}$, $D^2(Y) = \dfrac{4}{12}$, $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$, hiszen X és Y függetlenek. Tehát a kovarianciamátrix: $K = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. A transzformált kovarianciamátrix:

$$LKL^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Vezessük be a következő, síkról síkra transzformációt: $u = xy$, $v = x$.

Ezért $x = v$, $y = \dfrac{u}{v}$. Ekkor

$$g(u,v) = f(v)g\left(\frac{u}{v}\right)\left|\det\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix}\right| = f(v)g\left(\frac{u}{v}\right)\left|\frac{1}{v}\right|.$$

$U = X \cdot Y$ eloszlását a peremeloszlás kiszámításával kapjuk:

$r(u) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(v)g\left(\frac{u}{v}\right)\left|\frac{1}{v}\right| dv.$ $u = z$ jelöléssel megkapjuk a kívántat.

7. A transzformált eloszlás egyenletes eloszlás az egységkörvonalon. E kétdimenziós eloszlás nem diszkrét, nem folytonos, nem kevert, hanem szinguláris.

8. A szóban forgó transzformációk lineárisak, így a transzformáció eredménye folytonos, ha mátrixa reguláris, illetve nem folytonos, ha mátrixa szinguláris.

a) $L = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ szinguláris mátrix.

b) $L = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ reguláris mátrix.

9. Az eredeti eloszlás:

Y \ X	0	1
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

a) Az $u = x+y$, $v = x-y$ által transzformált eloszlás:

$V \backslash U$	0	1	2
1	0	$\frac{1}{4}$	0
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
−1	0	$\frac{1}{4}$	0

b) $M(U) = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1,\quad M(V) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$.

$M(U^2) = \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2},\quad M(V^2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, ezért

$D^2(U) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2},\quad D^2(V) = \frac{1}{2},\quad M(UV) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$, tehát $\operatorname{cov}(U, V) = 0$.

Így a kovarianciamátrix: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

10. Mint ismert, a normálvektor vetülete a gradiens, tehát $\operatorname{grad} f(x, y) = (x + y,\ x)$. Bevezetve az $u = x + y$, $v = x$ transzformációt $x = v$, $y = u - v$. Tehát a sűrűségfüggvény: $g(u, v) = 1 \cdot \left|\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right| = 1$,

ahol $0 \le v \le 1$, $0 \le u - v \le 1$, azaz $v \le u \le v + 1$.

11. Legyenek X és Y a téglalap oldalai. Igazolandó, hogy $2(X+Y)$ és $\operatorname{tg}\frac{Y}{X}$ független valószínűségi változók. Ismert tétel miatt elég igazolni, hogy $X+Y$ és

$\frac{Y}{X}$ függetlenek. Legyen $u = x + y$, $v = \frac{y}{x}$. Ebből $x = \frac{u}{1+v}$, $y = \frac{u \cdot v}{1+v}$. Így

$$g(u, v) = \lambda^2 e^{-\left(\frac{u}{1+v} + \frac{uv}{1+v}\right)} \begin{vmatrix} \frac{1}{1+v} & -\frac{u}{(1+v)^2} \\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \lambda e^{-\lambda u} u \frac{1 + v(1+v)}{(1+v)^2} \quad (0 \le u, v).$$

A sűrűségfüggvény u-ban és v-ben szeparálható függvény, így a hozzá tartozó eloszlás szorzateloszlás, tehát $X - Y$ és $\frac{Y}{X}$ valóban függetlenek.

12. A transzformáció mátrixa: $L = \begin{pmatrix} 2\cos\alpha & -2\sin\alpha \\ 2\sin\alpha & 2\cos\alpha \end{pmatrix}$,

azaz $u = 2(\cos\alpha)\,x - 2(\sin\alpha)y$, $v = 2(\sin\alpha)\,x - 2(\cos\alpha)y$.

Tehát $g(u, v) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2+v^2}{4}\right)} \frac{1}{\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 2\sin\alpha \\ -2\sin\alpha & 2\cos\alpha \end{vmatrix}} = \frac{1}{4 \cdot 2 \cdot \pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2+v^2}{4}\right)}$.

Tehát a kapott eloszlás normális eloszlás, két darab 2 szórású, 0 várható értékű egydimenziós normális eloszlás szorzata.

13. A normálvektor vetülete az (x, y) pontban $(c2x, c2y)$ gradiens irányú, tehát a gradiens értékétől függően egy (kx, ky) alakú függvény írja le a vetületet. Ezért az eredeti eloszlás is normális, mert a nyújtás nem vezet ki a normális eloszlások köréből.

14. $(1+2j)\overline{\beta}$ koordinátás alakja: $(1+2j)(x - jy) = x + 2y + j(2x - y)$. A kérdéses eloszlást azonosíthatjuk a következő transzformáció által nyert eloszlással:

$u = x + 2y$, $v = 2x - y$. Innen $x = \frac{1}{5}(u + 2v)$, $y = \frac{1}{5}(v - 2u)$.

Ezért: $g(u, v) = 1 \cdot \left|\det\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{5}$.

Tehát a transzformált eloszlás is egyenletes eloszlás, amely a tükrözés és forgatás eredményeként adódó 0, $2 - j$, $1 + 2j$, $3 + j$ csúcspontú négyszögre koncentrálódik.

XII.3. Vegyes feladatok

19. Nincs ilyen X, Y.

Pl.: $P(X=i, Y=k)$ legyen $\frac{1}{28}$, ha $i+j=3$; $\frac{1}{14}$, ha $i+j=1$ vagy $i+j=5$; $\frac{1}{7}$, ha $i=j$; 0 egyébként $(i, k \in \{0, 1, 2, 3\})$.

20. Legyen X a legkisebb, Y a legnagyobb szám. Együttes eloszlásfüggvényüket határozzuk meg: $P(X>u, Y<v)=(v-u)^n$, hiszen az $X>u \cap Y<v$ esemény azt jelenti, hogy mind az n számot az (u, v) intervallumon választjuk. $P(X<u, Y<v)=P(Y<v)-P(X>u, Y<v)$, hiszen $(X<u \cap Y<v) \cup (X>u \cap Y<v) = Y<v$.
$Y<v$ ekvivalens azzal, hogy mind az n számot $(0, v)$-ben választjuk, tehát $P(Y<v)=v^n$.
A keresett eloszlásfüggvény tehát: $P(X<u, Y<v)=v^n-(v-u)^n$ $(0 \le u, v \le 1)$. Innen az együttes sűrűségfüggvény $h(u, v)=n(n-1)(v-u)^{n-2}$.

21. $P(\alpha=0, \beta=j)=\frac{j+1}{10^2}$ $(j=0, 1, 2, \ldots, 9)$, hiszen a j számot $(j+1)$-féleképpen állíthatjuk elő j-nél kisebb vagy egyenlő nemnegatív egészek összegeként.
$P(\alpha=1, \beta=j)=\frac{9-j}{100}$ $(j=0, 1, 2, \ldots, 8)$, ugyanis a $10+j$ szám $(9-j)$- féleképpen áll elő 9-nél kisebb, vagy egyenlő számok összegeként. α és β nem független: $P(\alpha=1, \beta=9) \ne P(\alpha=1)\cdot P(\beta=9)$, mert a bal oldal 0, a jobb oldal pedig pozitív.

22. Az $u=x^2+y$, $v=\ln y$ transzformáció inverz transzformációja $y=e^v$, $x=\sqrt{u-e^v}$. A Jacobi-determináns értéke: $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \frac{e^v}{2\sqrt{u-e^v}}$.

Tehát $g(u,v)=1\cdot\frac{e^v}{2\sqrt{u-e^v}}$.

A T értelmezési tartományra: $0 \le \sqrt{u-e^v} \le 1$, $0 \le e^v \le 1$, azaz $T=\{(u, v): u \le 1+e^v;\ -\infty \le v \le 0\}$.

23. $\frac{1}{\pi\sqrt{u\,v}}$ a sűrűségfüggvény. A tartomány: $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1-u$.

Pl. $h(x, y)=8\,x\,y$.

24. $I(y)=P(Y \ge y)=\int_y^\infty \frac{z-y}{z} f(z)dz=\int_y^\infty \left(1-\frac{y}{z}\right) f(z)dz$, (1)

$$P(X-Y \ge u)=\int_u^\infty \frac{z-u}{z} f(z)dz = I(u),$$

$$P(Y \ge y, X-Y>u)=\int_{u+y}^\infty \left(1-\frac{u+y}{z}\right) f(z)dz = I(u+y).$$

Ha X és $X-Y$ függetlenek, akkor $I(u+y)=I(u)I(y)$, utóbbi megoldása $I(y)=e^{-\alpha y}$, valamely $\alpha>0$-ra. Kétszer deriválva az (1) egyenlőséget, kapjuk a kívántat.

25. $\sigma^2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

26. *a)* Az együttes sűrűségfüggvény $h(x, y)=e^{-x}e^{-y}=e^{-(x+y)}$ $(x, y \ge 0)$. Az adott transzformáció inverze: $x=uv$, $y=u-uv$. Sűrűségfüggvény-transzformációt alkalmazva:

$$g(u,v)=h(u\,v,\ u-u\,v)\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = e^{-u}\cdot u.$$

Az eloszlás nyilván a $0<u, v\in(0, 1)$ koordinátájú pontokra koncentrálódik.

b) V sűrűségfüggvénye: $g_2(v)=\int_0^\infty g(u,v)\,du=\int_0^\infty u\cdot e^{-u}\,du=1$ $(v\in(0, 1))$.

Tehát az eloszlás valóban egyenletes.

27. $\frac{1}{e^2-1}$.

28. $f(u)=\begin{cases} u, & \text{ha } 0 \le u < 1 \\ 2-u, & \text{ha } 1 \le u \le 2. \end{cases}$

29. $\mathrm{cov}(\alpha+\beta, \alpha-\beta)=M((\alpha+\beta)(\alpha-\beta))-M(\alpha+\beta)M(\alpha-\beta)=$
$=M(\alpha^2-\beta^2)-(M^2(\alpha)-M^2(\beta))=D^2(\alpha)-D^2(\beta)=0$.

30. Megmutatjuk, hogy $\mathrm{cov}(X, X+Y)\ne 0$. Ebből következik, hogy X és $X+Y$ nem lehet független.

$\mathrm{cov}(X, X+Y) = M(X(X+Y)) - M(X)M(X+Y) = M(X^2) + M(XY) - M^2(X) - M(X)M(Y) = D^2(X) + \mathrm{cov}(X, Y)$. $D^2(X) > 0$, továbbá a függetlenség miatt $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$, ezért $\mathrm{cov}(X, X+Y) \neq 0$, valóban.

31. $\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$.

32. $9\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

33. Pl. $X_n = \sum_{i=1}^{n} \cos\varphi_i$ eloszlása a centrális határeloszlás-tétel miatt nagy n-re tekinthető normálisnak, ahol $M(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{2\pi} \cos\varphi \cdot \frac{1}{2\pi} dy = 0$.

$$D^2(X_n) = \sum_{i=1}^{n} D^2(\cos\varphi_i) = \sum_{i=1}^{n} M(\cos^2\varphi_i) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \frac{1}{2\pi} dy = n \cdot \frac{1}{2}.$$

Ezért a közelítő eloszlás $N\left(0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right)$. Megmutatható, hogy ugyanez Y közelítő eloszlása is.

$$\mathrm{cov}(X_n, Y_n) = M(X_n, Y_n) = \sum_{i=1}^{n} M(\cos\varphi_i \sin\varphi_i) + \sum_{i \neq j} M(\cos\varphi_i \sin\varphi_j) = 0,$$

hiszen a függetlenség miatt $M(\cos\varphi_i \sin\varphi_j) = M(\cos\varphi_i)M(\sin\varphi_j) = 0$.

$$M(\cos\varphi_i \sin\varphi_i) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin 2\varphi \frac{1}{2\pi} d\varphi = 0.$$

Megjegyzés: X_n és Y_n már nyilván nem függetlenek.

34. Jelölje U a kisebbik értéket és V a két szám különbségét. Megmutatjuk, hogy együttes eloszlásfüggvényük az eloszlásfüggvényeik szorzata.

Jelölje $F(u)$ U eloszlásfüggvényét. Ekkor $F(u) = P(U < u) = 1 - P(U > u) = 1 - (e^{-\lambda u})^2$ $(u \geq 0)$, ahol az utolsó egyenlőség X és Y függetlensége miatt igaz.
Legyen V eloszlásfüggvénye $G(v)$. $G(v) = P(V < v) =$

$$= 1 - 2\int_v^{\infty}\int_0^{x-v} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}\, dy\, dx = 1 - 2\int_v^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} - \lambda e^{-\lambda(2x-v)}\, dx = 1 - e^{-\lambda v} \quad (v \geq 0).$$

Az együttes eloszlásfüggvényre, $H(u, v)$-re: $H(u, v) = P(U < u, V < v) =$

$$= 2\int_0^{u}\int_y^{y+v} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}\, dx\, dy = 2\int_0^{u} \lambda e^{-2\lambda y} - \lambda e^{-\lambda(2y+v)}\, dy = (1 - e^{-\lambda v})(1 - e^{-2\lambda u}).$$

Tehát valóban $H(u, v) = F(u) \cdot G(v)$, azaz U és V függetlenek.

35. Legyenek a tégla oldalai X és Y. $U = XY$ és $V = 2(X+Y)$ együttes eloszlását kell meghatározni.

A Jacobi-determináns reciproka: $\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(y - x)$.

Az $u = xy$, $v = 2(x + y)$ egyenletrendszerből $x = \frac{1}{4}(v \pm \sqrt{v^2 - 16u})$. Innen $|2(y - x)| = \sqrt{v^2 - 16u}$,

tehát maga a Jacobi-determináns abszolút értéke $\frac{1}{\sqrt{v^2 - 16u}}$. A $0 \leq x, y \leq 1$ feltételekből kapjuk, hogy $0 \leq v \leq 4$, $0 \leq v^2 - 16u$, $0 \leq u \leq 1$.

36. $h(u, v) = \frac{1}{2v}$ $\left(0 \leq u \leq 1, \quad u \leq v \leq \frac{1}{u}\right)$. A kovarianciája nem létezik.

37. *a)* Egyenletes: a $0 \leq u + v \leq 2$, $0 \leq u - v \leq 2$ tartományon;
b) a négyzet középpontja.

XII.4. Ellenőrző kérdések

38. Nem.
39. Nem.
40. *a)* Nem; *b)* igen; *c)* nem; *d)* nem.
41. *a)* Nem; *b)* nem; *c)* nem.
42. *a)* Igen; *b)* nem; *c)* nem.

43. Reciprok.
44. *a)* Nem; *b)* nem.
45. Nincs.
46. *a)* Igen; *b)* igen.
47. Igen.

XIII. Többdimenziós normális eloszlás

XIII.1. Gyakorlófeladatok

1. A sűrűségfüggvény vektoros alakját használva, az exponenciális tag kitevője

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{8}{7}(x-1)^2-\frac{4}{7}(x-1)y+\frac{4}{7}y^2\right)=-\frac{1}{2}(x-1\ \ y)\begin{pmatrix}\frac{8}{7} & -\frac{2}{7}\\ -\frac{2}{7} & \frac{4}{7}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\ y\end{pmatrix} \text{ alakú.}$$

Innen $K^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{8}{7} & -\frac{2}{7}\\ -\frac{2}{7} & \frac{4}{7}\end{pmatrix}$. Ebből, pl. az adjungálttal számolva, $K=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 2\end{pmatrix}$.

A kovarianciamátrix definíciója alapján: $c=\frac{1}{2}$, $\sigma_1=1$, $\sigma_2=\sqrt{2}$.

a) $k=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2-c^2}}=\dfrac{1}{\pi\sqrt{7}}$;

b) $M(X)=1$, $M(Y)=0$, $\sigma_1=1$, $\sigma_2=\sqrt{2}$.

Másik megoldás: σ_1, σ_2 és c meghatározásához kihasználjuk a K^{-1} elemeire $(a, b$ és $f)$ adott explicit összefüggéseket:

$$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2\cdot\sigma_2^2-c^2}=\frac{8}{7},\quad \frac{-2c}{\sigma_1^2\cdot\sigma_2^2-c^2}=\frac{4}{7},\quad \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2\cdot\sigma_2^2-c^2}=\frac{4}{7}.$$

Az egyenletrendszert megoldva megkapjuk σ_1, σ_2, c értékeit.

2. A kovarianciamátrix inverze: $K^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3}\end{pmatrix}$

a) A sűrűségfüggvény létezik, mert K pozitív definit.

$$K^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3}\end{pmatrix},\quad h(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}\left((x-1\ \ y-1)K^{-1}\binom{x-1}{y-1}\right)}$$

b) $P(3X-4>Y-2\sqrt{43})=P(3X-Y>4-2\sqrt{43})$. $3X-Y$ normális eloszlású, hiszen lineáris kombinációja X-nek és Y-nak. $M(3X-Y)=3M(X)-M(Y)=2$. $D^2(3X-Y)=D^2(3X)+D^2(Y)-2\operatorname{cov}(3X,Y)=9D^2(X)+D^2(Y)-6\operatorname{cov}(X,Y)$. K-ból leolvasható, hogy $D^2(X)=4$, $D^2(Y)=1$, $\operatorname{cov}(X,Y)=1$, ezért $D^2(3X-Y)=31$.

$3X-Y$ tehát 2 és $\sqrt{31}$ paraméterű normális eloszlású.
Standardizálással:

$$P(3X-Y>4-2\sqrt{43})=P\left(\frac{3X-Y-2}{\sqrt{31}}>\frac{2-2\sqrt{43}}{\sqrt{31}}\right)\approx 0{,}03.$$

Másik megoldás a)-ra: K-ból $\sigma_1=2,\sigma_2=1,c=1$. A K^{-1} mátrix a, b és f elemeire adott összefüggéseket használva:

$$h(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{3}\left((x-1)^2-2(x-1)(y-1)+1(y-1)^2\right)}.$$

3. A sűrűségfüggvény vektoros alakját használva, az exponens kitevőjéből

$$K^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & -\frac{1}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}.\ \text{Ebből } K=\begin{pmatrix}10 & 5\\ 5 & 5\end{pmatrix}.$$

Innen $D^2(X)=10$, $D^2(Y)=5$, $\operatorname{cov}(X,Y)=5$.
$X+Y$ normális eloszlású, mivel X és Y lineáris kombinációja.
$M(X+Y)=M(X)+M(Y)=2-1=1$.
$D^2(X+Y)=D^2(X)+D^2(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)=10+5+10=25$.

Standardizálással: $P(X+Y>-9)=1-\Phi\left(\frac{-9-1}{5}\right)=\Phi(2)\approx 0{,}9772$.

4. *a)* $K^{-1}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}8 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$. Innen $K=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 8\end{pmatrix}$. Tehát $\sigma_2=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $m_2=1$,

így standardizálással: $P(Y>0)=1-\Phi\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=\Phi\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\approx 0{,}637$.

b) Feltevés szerint $\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$.

A transzformált várható érték: $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ (hiszen a standard normális eloszlás várható értéke **0**) valóban (X, Y) várható értéke.
A standard normális transzformált eloszlásának kovarianciamátrixa: $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 8\end{pmatrix}$ valóban (X, Y) kovarianciamátrixa. Tehát (X, Y) valóban a standard normális eloszlás szóban forgó transzformáltja, hiszen tudjuk, hogy a transzformált eloszlás normális eloszlás.

5. $L=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Az új várható érték: $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ -5\end{pmatrix}$. Az új kovarianciamátrix: $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, használva az LKL^T kovarianciamátrix-transzformációs formulát. A kovarianciamátrix pozitív definit, ezért az eloszlás reguláris normális, azaz folytonos.

6. (X, Y)-nak α lineáris transzformáltja, ezért eloszlása normális. Várható értéke: $\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}$. Kovarianciamátrixa: $\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28 & 14\\ 14 & 7\end{pmatrix}$.
Az eloszlás nem reguláris, hiszen kovarianciamátrixa szinguláris, tehát nincs sűrűségfüggvénye.

7. (X, Y) kovarianciamátrixának inverze: $K^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3}\end{pmatrix}$.

Ebből $K=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3X+Y\\ 2X-Y\end{pmatrix}$ kovarianciamátrixa:

$\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31 & -20\\ -20 & 13\end{pmatrix}$. A kovariancia (–20), tehát nem nulla, így a szóban forgó változók nem függetlenek.

8. *a)* Igen, mert pl. X azonosítható $(X, 0)$-val, utóbbi viszont (X, Y)-nak L (szinguláris) lineáris transzformáltja, ahol $L=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

b) Igen, a valószínűségi változó (X, Y)-nak lineáris transzformáltja, ahol $L=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 8\end{pmatrix}$ szinguláris.

c) Igen, $2X+Y$ azonosítható pl. $(2X+Y, 0)$-val, ami a standard normális eloszlás $L=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ transzformáltja, tehát szinguláris.

9. *a)* Ha normális eloszlású lenne, akkor a feltételes eloszlás is normális eloszlású lenne;

b) nem lehet normális eloszlás, hiszen a feltételes várható érték függvény a regressziós egyenes, lineárisan függ x-től;

c) igen. Az együttes sűrűségfüggvény a feltételes eloszlásokra vonatkozó szorzásszabály miatt $h(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-2)^2}{5^2}}$.

Függetlenek, hiszen a feltételes eloszlás nem függ a feltételtől.

10. A feltételes eloszlás egydimenziós normális eloszlás. Várható értékét a regressziós egyenesből számoljuk. A kovarianciamátrix elemeit felhasználva, a regressziós egyenes: $\frac{x-1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{y-2}{1}\right)$. Innen $x=1+\sqrt{3}$, ha $y=3$. Tehát $M(X\,|\,Y=3)=1+\sqrt{3}$.

A feltételes eloszlás σ szórását így számoljuk: Az együttes sűrűségfüggvényt és a peremeloszlás sűrűségfüggvényét elosztva, az exponenciális tag együtthatója: $\frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi\sqrt{\det K}}$. Ez éppen $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Innen $\sigma=1$.

Tehát: $P(1\le X\le 4\,|\,Y=3)=\Phi\left(\frac{4-(1+\sqrt{3})}{1}\right)-\Phi\left(\frac{1-(1+\sqrt{3})}{1}\right)\approx 0{,}856$.

11. Legyen $U=X+Y$ és $V=2X-Y$, ahol (X, Y) standard normális eloszlású. (U, V) (X, Y)-nak L lineáris transzformáltja, ahol $L=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

(U, V) kovarianciamátrixa: $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$.

Innen $\sigma_1=\sqrt{2}$, $\sigma_2=\sqrt{5}$, $c=1$.

A $V=0{,}5$-re vonatkozó feltételes eloszlás normális eloszlás. Várható értékét, m-et a regressziós egyenesből kaphatjuk:

$\frac{u}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}}\frac{v}{\sqrt{5}}$-ből $u=\frac{v}{5}$, tehát $m=0{,}1$.

Szórását, σ-t hasonlóan kapjuk, mint a **10.** feladat megoldásánál: $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

A kérdezett valószínűség:

$$P\left(U>1\,|\,V=\frac{1}{2}\right)=1-\Phi\left(\frac{1-0{,}1}{\frac{3}{\sqrt{5}}}\right)=1-\Phi(0{,}67)\approx 0{,}251.$$

12. Normális eloszlás esetén a regressziós egyenessel tippelünk. A sűrűségfüggvényből leolvasható a kovarianciamátrix inverze:

$K^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$. Ebből $K=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 4\end{pmatrix}$. Így $\sigma_1=1$, $\sigma_2=2$, $c=-1$.

A regressziós egyenes implicit egyenlete: $\frac{x-2}{1}=\frac{-1}{2}\left(\frac{y-0}{2}\right)$. Ebből

$x=-\frac{y}{4}+2$, $a=-\frac{1}{4}$, $b=2$.

13. Legyen $U = X+Y$, $V = X-2Y$. (U, V) szintén normális eloszlású, mert a standard normális eloszlás $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ lineáris transzformáltja. (U, V) várható értéke 0, kovarianciamátrixa: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Ebből (U, V) paraméterei: $\sigma_1 = \sqrt{2}, \sigma_2 = \sqrt{5}, c = -1$. (U, V) normális eloszlású, így U-ból V-re a regressziós egyenessel tippelünk: $\frac{v}{\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{5}}\frac{u}{\sqrt{2}}$, tehát $v = \frac{-u}{2}$.

14. Az (X, Y) súlypont a találatvektorok átlaga. Így, mint sok független, abszolút értékben az egészhez képest kis abszolút értékű vektorváltozó összege, modellezhető közelítésként normális eloszlással, a vektorváltozókra vonatkozó centrális határeloszlás-tétel értelmében. A normális eloszlás paraméterei: $M(X) = M(Y) = 999m$, $D^2(X) = D^2(Y) = \sigma^2/999$, ahol m, ill. σ a körön vett egyenletes eloszlás peremeloszlásának várható értéke, illetve szórása. A körön az egyenletes eloszlás kovarianciája 0, ebből és a találatok függetlenségéből következik, hogy $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$.

15. Modellezzük a szóban forgó vektorváltozó eloszlását kétdimenziós normális eloszlással. Mivel a koordinátaváltozók normális eloszlásúak, a koordinátaváltozók paraméterei rendre 65 és 5, ill. 85 és 10, a kovariancia pedig $0{,}9 \cdot 5 \cdot 10 = 45$, kihasználva $R = 0{,}9$-t.

16. Legyen a négy mérés X_1, X_2, X_3 és X_4. Az $\frac{X_1+X_2+X_3}{3}$ átlag többdimenziós normális eloszlás lineáris transzformáltja, így normális eloszlású. Várható értéke nyilván a közös várható érték, azaz a valódi élhossz m, szórása $\frac{\sigma}{\sqrt{3}}$, ahol σ a közös szórás.

Legyen $X = \frac{X_1+X_2+X_3}{3} - m$, és $Y = X_4 - m$. Ekkor $M(X) = M(Y) = 0$, $D^2(X) = \frac{\sigma^2}{3}$, $D^2(Y) = \sigma^2$. X és Y nyilván függetlenek, együttes eloszlásuk szintén normális. Kiszámítandó a $P(|Y| \le |X|)$ valószínűség.

Legyen $U = \frac{Y}{\sigma}$, $V = \frac{X}{\frac{\sigma}{\sqrt{3}}}$. Ekkor (U, V) standard normális eloszlású.

$P(|Y| \le |X|) = P\left(|U| < \frac{\sqrt{3}}{3}|V|\right)$. Mivel $\frac{\sqrt{3}}{3} = \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{6}$, így a szóban forgó tartomány a 2π forgásszöghöz tartozó (sík-)tartomány harmada. A standard normális eloszlás körszimmetriáját kihasználva a keresett valószínűség: $\frac{1}{3}$.

17. Legyen X a vonat érkezési ideje, Y a busz indulási ideje. A sikeres átszállás feltétele $Y-X \ge 2$. $Y-X$ normális eloszlású, mivel X és Y lineáris kombinációja.

$M(Y-X) = 7$, $D^2(Y-X) = D^2(Y) + D^2(X) = 16 + 9 = 25$.

$P(Y - X \ge 2) = 1 - \Phi\left(\frac{2-7}{5}\right) = \Phi(1) = 0{,}8413$.

A kérdezett valószínűség: $p^5 + 5p^4(1-p)$, ahol $p = \Phi(1)$.

18. Legyen az A üzem felhasználása X, a B üzemé Y mennyiség. A feltétel: $P(X+Y \ge s) \approx 0{,}99$. $X+Y$ normális eloszlású, hiszen független, normális eloszlású valószínűségi változók összege. $M(X+Y) = 360$. $D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y) = 100 + 225 = 325$. Így

$P(X+Y \le s) = \Phi\left(\frac{s-360}{\sqrt{325}}\right) = 0{,}99$. Innen $\frac{s-360}{\sqrt{325}} \approx 2{,}33$. Tehát $s \approx 402$.

19. Mindkét transzformáció lineáris, így a transzformált eloszlás normális.

a) $L = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ a transzformáció mátrixa.

b) $L = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a transzformáció mátrixa.

A transzformált eloszlás várható értéke $L\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, kovarianciamátrixa $L\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}L^T$.

20. Modellezzük az először levágott sajtdarab X súlyát és a korrekciós sajtdarab Y súlyát is normális eloszlással. X paraméterei 20 és 2, Y $X = x$-re vonatkoztatott feltételes eloszlásának paraméterei pedig $20 - x$ és 1.

Így:

$$h(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-26)^2}{8}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-(20-x))^2}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}(x-20)^2-2y(20-x)+y^2\right)}.$$

Ezért $K^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{5}{4} & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. Ebből $K=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$, $\sigma_1=2,\ \sigma_2=\sqrt{5},\ c=4$.

a) $P(-\sqrt{5}\le Y\le 2\sqrt{5})=P\left(-1\le\frac{Y}{\sqrt{5}}\le 2\right)=\Phi(2)-\Phi(-1)=$

$=\Phi(2)+\Phi(1)-1\approx 0{,}818$.

b) $P(X+Y<19)=\Phi\left(\frac{19-20}{\sqrt{17}}\right)=1-\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=0{,}404$, hiszen

$M(X+Y)=20$ és $D^2(X+Y)=\sigma_1^2+\sigma_2^2+2c=17$.

21. Legyen a tényleges feszültség X, a leolvasott feszültség Y. Ekkor normális eloszlással modellezve, X eloszlása $N(220,5)$, Y-nak X-re vonatkozó feltételes eloszlása pedig $N(X,2)$. Így az együttes sűrűségfüggvény:

$$h(x,y)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-220)^2}{25}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-x)^2}{4}}=$$

$$=\frac{1}{10\cdot 2\pi}e^{-\frac{1}{2}(0,29(x-220)^2-2\cdot 0,25(x-220)(y-220)+0,25(y-220)^2)}.$$

Az exponenciális tag kitevőjéből leolvashatók K^{-1} elemei mint az $(x-220)^2$, $(y-220)^2$ és $(x-220)(y-220)$ tagok együtthatói:

$K^{-1}=\begin{pmatrix}0{,}29 & -0{,}25\\ -0{,}25 & 0{,}25\end{pmatrix}$. Innen $K=\begin{pmatrix}25 & 25\\ 25 & 29\end{pmatrix}$. Ezért $\sigma_2=\sqrt{29}\approx 5{,}38$.

22. Legyen X a sárkány megjelenésének helye, Y pedig a robot lövedéke villanásának helye. Mivel X eloszlása és X-nek Y-ra vonatkozó feltételes eloszlása is normális, ezért (X, Y) eloszlása is normális. A mesterlövész olyan $r(y)$ függvényt keres, amelyre $M(|X-r(Y)|)$ minimális. Ez éppen a regressziós egyenes, hiszen (X, Y) normális eloszlású.

$$h(x,y)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{50}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2}}=\frac{1}{5\cdot 2\pi}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{26}{25}x^2-2xy+y^2\right)}.$$

Innen $K^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{26}{25} & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. Ebből $K=\begin{pmatrix}25 & 25\\ 25 & 26\end{pmatrix}$. Tehát

$\sigma_1^2=25,\ \sigma_2^2=26,\ c=25$.

A regressziós egyenes: $\frac{x}{5}=\frac{25}{5\sqrt{26}}\cdot\frac{y}{\sqrt{26}}$, tehát $x=\frac{25}{26}y$.

Ha $y=20$, akkor $x=\frac{500}{26}\approx 19{,}23$-ra a fától jobbra kell célozni.

23. A centrális határeloszlás-tételt alkalmazva, a kockák éleinek hosszúságát, X-et és az összsúlyt, Y-t is normális eloszlásúnak tekintjük. Továbbá, modellezzük (X, Y)-t is normális eloszlással! Ekkor X-ből Y-ra a regressziós egyenessel tippelünk. $M(X)=100$, $D^2(X)=100$. Ha az egyes kockák élhosszúságai $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$, akkor $X=X_1+X_2+\ldots+X_{100}$, $Y=\gamma(X_1^3+X_2^3+\ldots+X_{100}^3)$, ahol $\gamma=2{,}7$.

Kihasználva, hogy az exponenciális eloszlás várható értéke és szórása $\frac{1}{\lambda}$, valamint azt, hogy $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx=n!=M(X_i^n)$:

$$M(X)=100,\ M(Y)=100\gamma M(X_i^3)=100\gamma\cdot 6.$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=M\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\cdot\sum_{i=1}^{100}\gamma\cdot X_i^3\right)=$$

$$=100\cdot\gamma\cdot M(X_i^4)+100\cdot 99\cdot M(X_i)\cdot M(X_i^3)=100\cdot\gamma\cdot 4!+100\cdot 99\cdot\gamma\cdot 3!.$$

$D^2(X)=100$ és $D^2(Y)=100\cdot\lambda\cdot D^2(X_i^3)$, ahol $D^2(X_i^3)=M(X_i^6)-$ $-M^2(X_i^3)=6!-(3!)^2$, tehát $D^2(Y)=6840\cdot\gamma$.

Ezzel a kétdimenziós normális eloszlás összes paraméterét meghatároztuk, a regressziós egyenes egyenlete felírható.

XIII.3. Vegyes feladatok

30. $\frac{1}{2}$.

31. $\frac{1}{2}(h_1(x,y)+h_2(x,y))$ nyilván nem kétdimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye. Például az egyik peremeloszlás:

$$\int_{\mathbf{R}^1}\frac{1}{2}(h_1(x,y)+(h_2(x,y))dx=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^1}h_1(x,y)dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^1}h_2(x,y)dx.$$

A jobb oldali integrálok az $N(0,1)$ eloszlás sűrűségfüggvényei, ezért átlaguk is ilyen sűrűségfüggvény.

32. *a)* $a=b$ és $|a|<\sqrt{10}$; *b)* $\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(2x^2+6xy+5y^2)}$.

33. *a)* $c=\frac{1}{2\pi}$; *b)* $(1,0)$ és $\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$; *c)* $\approx 0{,}0228$.

34. Tudjuk, hogy a standard normális eloszlás esetén a körszimmetria miatt például a $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$ tartományba esés valószínűsége $\frac{1}{8}$. Alkalmazzunk olyan L lineáris transzformációt, amely e tartományt az első síknegyedbe képezi. Ilyen transzformáció mátrixa például: $L=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Tudjuk, hogy a standard normális eloszlás L lineáris transzformáltja normális eloszlás. E transzformált teljesíti a kívánt tulajdonságot.

35. $\frac{9}{16}$.

36. $\alpha=|X|\operatorname{sign}Y$ értéke azonos valószínűséggel lehet X, illetve $-X$. α eloszlásfüggvényét az $\alpha=X$, $\alpha=-X$ teljes eseményrendszerre vonatkozó teljes valószínűség tétellel határozhatjuk meg:

$$P(\alpha<u)=\frac{1}{2}P(X<u\,|\,\alpha=X)+\frac{1}{2}P(-X<u\,|\,\alpha=-X)=$$

$$=\frac{1}{2}\Phi(u)+\frac{1}{2}P(X>-u\,|\,\alpha=-X)=\frac{1}{2}\Phi(u)+\frac{1}{2}(1-\Phi(-u))=\Phi(u).$$

Tehát α eloszlása egydimenziós standard normális eloszlás.

37. $N(-1,\sqrt{2})$.

38. *a)* 3; *b)* $\approx 0{,}225$.

39. 0,57.

40. $3X-Y$ $\sqrt{10}$ szórású, 0 várható értékű, $X+Y$ pedig $\sqrt{2}$ szórású, 0 várható értékű, normális eloszlású valószínűségi változó. Mivel mindkettő 0 várható értékű és az első szórása a nagyobb, ezért a $(-1,+1)$ intervallumba esés a második valószínűségi változóra a nagyobb, hiszen itt a kisebb szórás miatt jobban koncentrálódik 0 köré a valószínűség.

41. $2\Phi\left(\frac{z}{\sigma\sqrt{2}}\right)-1$.

42. Normális eloszlás $\mathbf{m}=(c,0)$; $K=\begin{pmatrix}a^2+b^2 & b\\ b & 1\end{pmatrix}$.

43. *a)* $\mathbf{m}=(0,0)$ és K;

b) $\mathbf{m}=(-10,40)$ és K, ahol $K=\begin{pmatrix}2 & 3\\ A & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & A\\ 3 & -5\end{pmatrix}$.

Ha $A=-\frac{10}{3}$, akkor az eloszlás elfajult.

44. Megmutatjuk, hogy $P(r<u,\varphi<v)=P(r<u)\cdot P(\varphi<v)$ $(0\le v\le 2\pi,\ 0<u)$.

$$P(r<u,\ \varphi<v)=\iint_{\{(x,y):r<u,\,\varphi<v\}}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy=\int_0^u\int_0^v\frac{1}{2\pi}e^{\frac{-r^2}{2}}r\,drd\varphi=$$

$$=\frac{v}{2\pi}\left(1-e^{\frac{-u^2}{2}}\right).$$

$$P(r<u)=\iint_{\{(x,y):r<u\}}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^u\frac{1}{2\pi}e^{\frac{-r^2}{2}}drd\varphi=1-e^{\frac{-u^2}{2}}$$

és $P(\varphi<v)=\frac{v}{2\pi}$, r és φ tehát valóban függetlenek.

Ha α és β (0, 1)-ben független, egyenletes eloszlású számok, és

$$F(u)=1-e^{\frac{-u^2}{2}},\quad G(v)=\frac{v}{2\pi},$$

akkor ismert, hogy az $F^{-1}(\alpha)$ és $G^{-1}(\beta)$ transzformáltak $F(u)$, ill. $G(v)$ eloszlásúak és függetlenek. Tekinthetőek ezért egy kétdimenziós standard normális eloszlású szám polárkoordinátáinak. Az utóbbiakhoz tartozó derékszögű koordináták pedig függetlenek és egydimenziós standard normális eloszlásúak.

45. *a)* $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$; *b)* független standard normális eloszlások, ill. $\{-1,+1\}$-n diszkrét egyenletes eloszlások.

46. Normális eloszlás **0** várható érték vektorral és $\begin{pmatrix}333+54\sqrt{3} & 111+18\sqrt{3}\\ 111+18\sqrt{3} & 37+6\sqrt{3}\end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal.

47. Definíció szerint X eloszlása megegyezik n darab független $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $N(0,1)$ eloszlású valószínűségi változó négyzetösszegének eloszlásával. Hasonlóan Y eloszlása megegyezik m darab $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ független, $N(0,1)$ eloszlású valószínűségi változó négyzetösszegének eloszlásával. $X+Y$ eloszlása megegyezik $(X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2)+(Y_1^2+Y_2^2+\ldots+Y_m^2)$ eloszlásával. Utóbbi, X és Y függetlensége miatt, definíció szerint, $\chi^2(n+m)$ eloszlású.

48. Kihasználjuk a standard normális eloszlás körszimmetriáját: A $\frac{\pi}{6}$ szám 2π-nek $\frac{1}{12}$-ed része, ezért a szögtartományba esés valószínűsége: $\frac{1}{12}$.

Vigyük az adott eloszlást egy L lineáris transzformációval a standard normális eloszlásba. L kielégíti az $L\begin{pmatrix}4 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}L^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ mátrixegyenletet, ahonnan $L=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}$. Látható, hogy L a kérdéses $0\le\varphi\le\frac{\pi}{6}$ szögtartományt éppen az $x, y>0$ síknegyedre képezi. Az utóbbi tartományba esés valószínűsége $\frac{1}{4}$, ezért az eredeti szögtérbe esés valószínűsége is $\frac{1}{4}$.

49. A feltételes eloszlás várható érték függvénye $1+\frac{x-1}{8}$, éppen a regressziós egyenes. A regressziós egyenes általános egyenlete $y=\frac{c}{\sigma_1^2}x-\frac{c}{\sigma_1^2}m_1+m_2$.

Itt $\sigma_1=1$, ezért $c=\frac{1}{8}$. A feltételes eloszlás $\sigma_{2/1}^2$ szórásnégyzetére:

$\sigma_{2/1}^2=\sigma_2^2-\frac{c^2}{\sigma_1^2}$, azaz $\left(\frac{15}{16}\right)^2=\sigma_2^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2$, innen $\sigma_2^2=\frac{229}{16^2}$. A keresett kovarianciamátrix tehát: $\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{8} & \frac{\sqrt{229}}{16}\end{pmatrix}$.

50. $k(y|x)$ az $N\left(\frac{x}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ eloszlás, $l(x|y)$ pedig az $N(y,1)$ eloszlás sűrűségfüggvénye.

51. Az $x=3$-ra vonatkozó feltételes eloszlás normális eloszlás. A várható értéket a regressziós egyenesből, azaz a normális eloszlás feltételes várható érték függvényéből határozhatjuk meg. A kovarianciamátrixból:

$\sigma_1=\sqrt{2}, \sigma_2=1, c=1$, tehát a regressziós egyenes: $\frac{y}{1}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot 1}\frac{x}{\sqrt{2}}$, azaz

$y=\frac{x}{2}$, ezért $M(Y|X=3)=\frac{3}{2}$.

A feltételes szórásnégyzet: $1^2-\frac{1^2}{2}$, azaz $\frac{1}{2}$.

A keresett $P(Y<1\mid X=3)$ valószínűséget ezután az $N\left(\frac{3}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ normális eloszlásból számolhatjuk standardizálással: $\Phi\left(\frac{1-\frac{3}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\approx 0{,}24$.

52. Felhasználjuk, hogy normális eloszlás feltételes eloszlásai is normálisak. Jelölje az $x=0, x=1, x=2$-re vonatkozó feltételes normális eloszlások várható értékeit rendre m_0, m_1, m_2. Utóbbiakról tudjuk, hogy éppen a regressziós egyenesen helyezkednek el. A feltételes szórásokról pedig tudjuk, hogy megegyeznek. Standardizálással a következőt kapjuk:

$\Phi\left(\frac{0-m_0}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{2-m_1}{\sigma}\right)=\frac{1}{2}$, $\Phi\left(\frac{5-m_2}{\sigma}\right)=0{,}8413$. Innen

$\frac{0-m_0}{\sigma}=\frac{2-m_1}{\sigma}=0$, $\frac{5-m_2}{\sigma}=1$. Tehát $m_0=0$, $m_1=2$. A regressziós függvény értéke tehát 0-ban 0, 1-ben 2. Ezért 2-ben 4, vagyis $m_2=4$. $\frac{5-4}{\sigma}=1$-ből $\sigma=1$.

A kérdezett $P(Y<8 \mid X=3)$ valószínűség tehát $\Phi\left(\frac{8-6}{2}\right)=0{,}8413$.

53. Nem.

54. $\frac{y}{2}$.

55. $\operatorname{cov}(\alpha,\ \beta)=0$, ezért α, ill. β várható értékei a konstans tippelőfüggvények: $\alpha=0, \beta=0$.

56. A regressziós egyenes általános egyenlete:

$y=\frac{c}{\sigma_1^2}x-\frac{c}{\sigma_1^2}m_1+m_2$. Utóbbit összevetve az adott egyenessel, $\sigma_1=5$ helyettesítéssel, $\frac{c}{25}=\frac{1}{2}$ és $-\frac{c}{25}\cdot m_1+m_2=-3$. Innen $c=12{,}5$ és $m_2=\frac{m_1}{2}-3$. A szükséges paraméterek tehát m_1 és σ_2. Ezért a várható érték vektor: $\left(m_1, \frac{m_1}{2}-3\right)$, a kovarianciamátrix pedig $\begin{pmatrix}25 & 12{,}5\\ 12{,}5 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$, ahol $\sigma_2\ge 2{,}5$.

57. A regressziós egyenes: $\frac{y_2+2}{\sqrt{5}}=-\frac{9}{\sqrt{145}}\frac{x_2-10}{\sqrt{29}}$.

58. $K^{-1}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Ebből inverz számolással, $c=-2$, $\sigma_1=\sqrt{2}$, $\sigma_2=2$.

Tehát az R korrelációs hányados abszolút értéke $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Mivel $|R|\ne 1$, ezért 1 valószínűséggel Y nem lineáris függvénye X-nek.

59. Centrális határeloszlás-tétel miatt (α, β) közel normális eloszlású.

$$M(\alpha)=1000\,M(X_i)=1000\int_0^1 x\,2x\,dx=\frac{2}{3}\cdot 1000.$$

$$M(\beta)=1000\,M(X_i^3)=1000\int_0^1 x^3\,2xdx=\frac{2}{5}\cdot 1000.$$

$$D^2(\alpha)=1000\,D^2(X_i)=1000(M(X_i^2)-M^2(X_i))=$$
$$=1000\left(\int_0^1 x^2\,2xdx-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)=\frac{500}{9}.$$

$$D^2(\beta)=1000\,D^2(X_i^3)=1000(M(X_i^6)-M^2(X_i^3))=$$
$$=1000\left(\int_0^1 x^6\,2xdx-\left(\frac{2}{5}\right)^2\right)=90.$$

$$M(\alpha\beta)=M\left(\sum_{i=1}^{1000}X_i^4+\sum_{i\ne j}X_i\cdot X_j^3\right)=$$
$$=1000\,M(X_i^4)+1000\cdot 999\,M(X_i)M(X_j^3)=$$
$$=1000\int_0^1 x^4\,2xdx+1000\cdot 999\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{800\,200}{3}\approx 266\,733{,}3.$$

$$M(\alpha\beta)-M(\alpha)\cdot M(\beta)=\frac{800\,200}{3}-\frac{2000}{3}\cdot\frac{2000}{5}.$$

A többdimenziós normális eloszlás paraméterei ezzel adottak.

60. Legyen X, ill. Y a gépek által töltött mennyiség dl-ben. $M(X)=2$, $M(Y)=8$, $D(X)=0{,}05$, $D(Y)=0{,}09$.

(X, Y) kovarianciamátrixa: $K=\begin{pmatrix}0{,}05^2 & 0\\ 0 & 0{,}09^2\end{pmatrix}$. Legyen $Z=X+Y$. Meghatározandó a $P(Y>8+0{,}05 \mid Z=11)=P(Y>8{,}05 \mid Z=11)$ valószínűség. Határozzuk meg Z és Y együttes eloszlását. Ez normális eloszlás, elég ezért a várható értéket és a kovarianciamátrixot megadni. A várható érték vektor: $(10, 8)$.

A kovarianciamátrix:

$$K' = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}05^2 & 0\\ 0 & 0{,}09^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}0106 & 0{,}09^2\\ 0{,}09^2 & 0{,}09^2\end{pmatrix}.$$

Ezért $M(Y \mid Z = 11) = 8 + \dfrac{0{,}09^2}{0{,}0106}(11-10) \approx 8{,}764$.

$D^2(Y \mid Z = 11) = 0{,}09^2 - \dfrac{0{,}09^4}{0{,}0106}$, tehát $D(Y \mid Z = 11) \approx 0{,}0437$.

Innen $P(Y > 8{,}05 \mid Z = 11) = 1 - \Phi\left(\dfrac{8{,}05 - M(Y \mid Z = 11)}{D(Y \mid Z = 11)}\right) \approx 1$.

61. $N(95, \sqrt{24{,}96})$.

62. A kovarianciamátrix inverze: $\dfrac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$. Ennek inverzéből, a kovarianciamátrixból: $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ és a kovariancia 0,5. Ezért a regressziós egyenes: $y = \dfrac{x}{2}$. A regressziós egyenes a feltételes várható érték függvény, ezért az $x = 3$ helyen a feltételes várható érték: $\dfrac{3}{2}$. A $\sigma_2^2 - \dfrac{c^2}{\sigma_1^2}$ feltételes szórásnégyzet formulából a feltételes szórás $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ és maga az eloszlás normális.

63. Számoljuk az alvásidőt is másodpercben. Ekkor $h(x, y) = f(x)\, k(y \mid x)$-t használva, az együttes sűrűségfüggvény:

$$h(x,y) = \frac{1}{3600\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\cdot 3600^2}(x-8\cdot 3600)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(y-\left(60-\frac{x}{3600}\right)\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3600^2\cdot 2\pi} e^{-\frac{1}{2\cdot 3600^2}\left(2(x-8\cdot 3600)^2+2\cdot 3600\cdot(x-8\cdot 3600)(y-52)+3600^2(y-52)^2\right)}.$$

Innen $m_2 = 52$, $K^{-1} = \dfrac{1}{3600^2}\begin{pmatrix}2 & 3600\\ 3600 & 3600^2\end{pmatrix}$. Az inverz mátrixból kapjuk, hogy $\sigma_2^2 = 2$.

Tehát a sportoló teljesítménye $N(52, \sqrt{2})$ eloszlású. Ezért annak valószínűsége, hogy 58 mp-nél jobb időt ér el, $\Phi\left(\dfrac{58-52}{\sqrt{2}}\right) \approx 1$.

64. $2\Phi\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

65. $F(u) = 1 - \left(e^{-\frac{u^2}{2}}\right)^3$.

XIII.4. Ellenőrző kérdések

66. *a)* Nem; *b)* nem; *c)* igen; *d)* nem; *e)* nem.
67. *a)* Igen; *b)* nem; *c)* igen; *d)* nem.

XIV. Matematikai statisztika

XIV.1. Gyakorlófeladatok

1. A valószínűséggel kapcsolatos $\dfrac{p-\mu}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$ statisztikát alkalmazzuk egy oldalról a $p=0{,}6$, $\alpha=0{,}05$ értékekkel, tehát $P\left(\dfrac{p-\mu}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}\le x\right)\approx\Phi(x)$.

$\Phi(x)=0{,}95$-ből $x\approx 1{,}645$. A polgármestert támogatók akkor vannak többségben, ha $\mu>0{,}5$, azaz $p-\mu<0{,}1$. A $p-\mu<0{,}1$ feltételből $1{,}645\cdot\sqrt{\dfrac{0{,}6\cdot 0{,}4}{n}}=0{,}1$, innen $n\approx 65$. Tehát $n\ge 65$.

2. A valószínűséggel kapcsolatos $\dfrac{p-\mu}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$ statisztikát alkalmazva:

$\alpha=0{,}05$, tehát $P\left(|p-\mu|\le u_\alpha\sqrt{\dfrac{pq}{n}}\right)\approx 0{,}95$.

$2\Phi(u_\alpha)-1=0{,}95$, tehát $\Phi(u_\alpha)=0{,}975$. Innen $u_\alpha=1{,}96$.

P-t növeljük, ha $\sqrt{p\cdot q}$-t a nála mindenképpen nagyobb $\dfrac{1}{2}$-del helyettesítjük, így $u_\alpha\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\le 10^{-4}$-t megoldva $n\ge 9800^2$.

3. Az $u_\alpha\dfrac{1}{2\sqrt{n}}=1{,}96\cdot\dfrac{1}{20\sqrt{20}}=0{,}0219$-nél nagyobb pontossággal tudunk becsülni.

4. Tudjuk, hogy $|\mu-p|\le u_\alpha\sqrt{\dfrac{\mu(1-\mu)}{n}}$. Itt $\mu=\dfrac{80}{5000}\cdot 2\Phi(u_\alpha)-1\approx 0{,}95$, tehát $u_\alpha=1{,}96$, $n=5000$. Tehát $|\mu-p|\le 0{,}0035$.

5. $1-p=0{,}99$, így $2\Phi(u_p)-1\approx 0{,}99$. Innen $u_p=2{,}58$, tehát

$$5100-2{,}58\cdot\frac{10}{\sqrt{1000}}\le m\le 5100+2{,}58\cdot\frac{10}{\sqrt{1000}}.$$

Az intervallum tehát $(5099{,}18,\ 5100{,}82)$.

6. $2\Phi(u_p)-1=0{,}9$. Innen $u_p=1{,}645$. $u_p\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ értéke: $1{,}645\cdot\dfrac{0{,}2}{10}\approx 0{,}033$. Tehát a közelítésre $0{,}033$ pontosságot tudunk garantálni.

7. $2\Phi(u_p)-1=0{,}8$. Ebből $u_p=1{,}29$. $1{,}29\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le 0{,}1$, ahol σ a szabadesés alatt megtett út szórása. Kiszámítása:

$$D^2\left(\frac{g}{2}t^2\right)=M\left(\left(\frac{g}{2}t^2\right)^2\right)-M^2\left(\frac{g}{2}t^2\right).$$

$$M\left(\frac{g}{2}t^2\right)=\int_1^{10}\frac{g}{2}t^2\cdot\frac{1}{9}dt=\frac{g}{54}(10^3-1).$$

$$M\left(\frac{g^2}{4}t^4\right)=\int_1^{10}\frac{g^2}{4}t^4\cdot\frac{1}{9}dt=\frac{g^2}{180}(10^5-1).$$

Innen $D^2\left(\dfrac{g}{2}t^2\right)=g^2\left(\dfrac{1}{180}(10^5-1)-\dfrac{1}{51^2}(10^3-1)^2\right)\approx 20{,}527$.

Innen $\sigma\approx 143$. Behelyettesítve az eredeti egyenlőtlenségbe: $3\,402\,918\le n$.

8. Az $m=m_0=1$ kg hipotézis felől kívánunk dönteni. $2\Phi(u_p)-1=0{,}9$, innen $u_p=1{,}645$. A $100-1{,}645\cdot\dfrac{1}{10}\le 99{,}5\le 100+1{,}645\cdot\dfrac{1}{10}$ egyenlőtlenség nem teljesül, így állíthatjuk, hogy a mészáros csal. Legfeljebb 0,1 elsőfajú hibát követhetünk el.

9. Az $m_1=m_2$ hipotézis felől kell döntenünk.

$$\bar{x}_1-\bar{x}_2=1\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=\sqrt{\frac{1{,}94^2}{7459}+\frac{2{,}01^2}{2146}}\approx 0{,}049.$$

Válasszunk biztonsági szintet, legyen pl. $p=0{,}1$. $2\Phi(u_p)-1=0{,}9$, $u_p=1{,}645$.
A $-1{,}645\cdot 0{,}049\le 1\le 1{,}645\cdot 0{,}049$ egyenlőtlenség nem teljesül, így mondhatjuk, hogy délcegebbek a régi katonák. Az elsőfajú hiba tehát 0,1.

10. A $p=0{,}01$ és 14 paraméterértékhez tartozó t-(Student-) eloszlás értéke $t_p=2{,}977$, tehát $P(-t_p,t_p)=0{,}99$. A becslés 0,99 biztonsági szinten:

$$1200-2{,}977\cdot\frac{186}{\sqrt{15}}\le m\le 1200+2{,}977\cdot\frac{186}{\sqrt{15}},\ \text{azaz } 1057{,}03\le m\le 1342{,}97.$$

11. A $p=0{,}1$ és 9 értékekhez tartozó t érték: 1,833. A mért adatokból $\bar{x}=2{,}002$, $s^*=0{,}035$. A kritikus tartomány:

$$2-1{,}833\cdot\frac{0{,}035}{\sqrt{10}}\le 1{,}9\le 2+1{,}833\cdot\frac{0{,}035}{\sqrt{10}}.$$

A bal oldali egyenlőtlenség teljesül, így 0,9 biztonsági szinten elfogadható az $m=2$ hipotézis.

12. $p=0{,}01$-hez és $6+6-2=10$-hez a $t_p=3{,}17$ érték tartozik. $\bar{d}=5{,}47$,

$\sqrt{n_1s_1^2+n_2s_2^2}\approx 22{,}5$. A $-3{,}17\cdot\dfrac{22{,}5}{5{,}47}\le 13\le 3{,}17\cdot\dfrac{22{,}5}{5{,}47}$ egyenlőtlenség teljesül, 0,99 szinten nincs lényeges különbség a két technológia között.

13. Szórások összehasonlítását végezzük F-próbával.

$\dfrac{s_1^{*2}}{s_2^{*2}}\approx 1{,}82$. A $p=0{,}05$-höz, valamint rendre a 11 és 14 paraméterértékekhez tartozó F érték: 2,57. Vagyis $P\left(\dfrac{1}{F}\le\dfrac{s_1^{*2}}{s_2^{*2}}\le F\right)=0{,}05$. Az 1,82 érték beleesik az $\left(\dfrac{1}{F},F\right)$ intervallumba, így nincs lényeges különbség a két technológia között.

14. Illeszkedésvizsgálatot végzünk. A mintából becsüljük a Poisson-eloszlás paraméterét: a tapasztalati várható érték $\dfrac{899}{900}$, tehát $\lambda=1$ adódik jó közelítéssel. A Poisson-eloszlás táblázatából a valószínűségértékek: $p_0=0{,}3679$, $p_1=0{,}3679$, $p_2=0{,}1839$, $p_3=0{,}0613$ és a 4 vagy nagyobb érték valószínűsége: $0{,}0190$. Így a χ^2 összeg:

$$\frac{(327-331)^2}{331}+\frac{(340-331)^2}{331}+\frac{(160-166)^2}{166}+\frac{(53-55)^2}{55}+\frac{(20-17)^2}{17}\approx$$
$$\approx 1{,}112.$$

A 0,01-hez és $5-1-1=3$ paraméterhez tartozó kritikus χ^2 érték: 11,3, ami nagyobb a számított χ^2 értéknél, így elfogadjuk, hogy a hibák száma Poisson-eloszlású.

15. Illeszkedésvizsgálatot végzünk. A normális eloszlás két paraméterét a mintából (a mintához tartozó hisztogramból) becsüljük: $m\approx 34$, $\sigma\approx 14{,}07$. Standardizálással és a normális eloszlás táblázata segítségével számoljuk ki az egyes osztályokra jutó valószínűségeket, ezek rendre

$p_1=0{,}0409$, $p_2=0{,}1106$, $p_3=0{,}2241$, $p_4=0{,}2787$, $p_5=0{,}2110$, $p_6=0{,}1$, $p_7=0{,}0347$.

Ebből a χ^2 összeg:

$$\frac{(11-240p_1)^2}{240p_1}+\frac{(22-240p_2)^2}{240p_2}+\frac{(46-240p_3)^2}{240p_3}+\frac{(85-240p_4)^2}{240p_4}+$$
$$+\frac{(43-240p_5)^2}{240p_5}+\frac{(20-240p_6)^2}{240p_6}+\frac{(13-240p_7)^2}{240p_7}\approx$$
$$\approx 0{,}14+0{,}78+1{,}13+4{,}9+1{,}15+0{,}67+2{,}62\approx 11{,}59.$$

A 0,95 szinthez és $7-1-2=4$ paraméterértékhez a 9,488 kritikus érték tartozik, $9{,}488<11{,}59$, így nem fogadjuk el azt a hipotézist, hogy a járművek száma normális eloszlású.

16. Függetlenségvizsgálatot végzünk. A χ^2 összeg:

$$\frac{(20-0{,}008(48\cdot 68))^2}{0{,}008(48\cdot 68)}+\frac{(28-0{,}008(48\cdot 57))^2}{0{,}008(48\cdot 57)}+\frac{(18-0{,}008(48\cdot 26))^2}{0{,}008(48\cdot 26)}+$$
$$+\frac{(8-0{,}008(48\cdot 26))^2}{0{,}008(48\cdot 26)}+\frac{(30-0{,}008(48\cdot 51))^2}{0{,}008(48\cdot 51)}+\frac{(21-0{,}008(48\cdot 51))^2}{0{,}008(48\cdot 51)}\approx$$
$$\approx 1{,}43+1{,}71+6{,}44+0{,}39+5{,}53+0{,}1=15{,}31.$$

A 0,95 és 2,1 értékekhez 0,1 kritikus érték tartozik, tehát van kapcsolat a nem és a pályaválasztás között.

XIV.2. Vegyes feladatok

17. $n \ge 6770$.

18. *a)* $2\Phi\left(\dfrac{0{,}01\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)-1=0{,}9$-ből $n=41$.

b) $\Phi(\varepsilon\cdot\sqrt{n}\cdot 2)\approx 0{,}95$-ből $\varepsilon\approx 0{,}08$.

19. $n \ge 67$.

20. $0{,}986$, illetve $2\Phi(0{,}1\cdot 2\cdot\sqrt{1000})-1$, azaz közel 1.

21. $0{,}095$.

22. A $\left(\dfrac{27}{250}-0{,}062,\ \dfrac{27}{250}+0{,}062\right)=(0{,}046,\ 0{,}17)$ intervallumban található.

23. Egy $1-\Phi(3{,}577)\approx 0$ valószínűségű esemény következett be, ezért gyanúnk megalapozott volt.

24. $n \ge 1441$.

25. $0{,}019$.

26. *a)* $0{,}994$; *b)* $0{,}997$.

27. $\left(98-1{,}96\cdot\dfrac{9}{\sqrt{27}},\ 98+1{,}96\cdot\dfrac{9}{\sqrt{27}}\right)=(94{,}6,\ 101{,}4)$.

28. Nem, hiszen

$$98-u_{0{,}05}\cdot\frac{9}{5}\le\bar{x}\le 98+u_{0{,}05}\cdot\frac{9}{5},\ \text{azaz}$$

$$98-3{,}53\le\bar{x}\le 98+3{,}53,\quad 0{,}95\ \text{valószínűséggel.}$$

29. $\dfrac{1{,}58-1{,}51}{\sqrt{\dfrac{0{,}5^2}{50}+\dfrac{0{,}35^2}{50}}}=0{,}81$ benne van a $(-1{,}96,\ 1,96)$ kritikus tartományban, ezért nincs különbség.

30. $\dfrac{180-175}{\sqrt{\dfrac{5^2}{100}+\dfrac{5^2}{100}}}=5\sqrt{2}$ nincs benne a $(-1,65,\ 1,65)$ kritikus tartományban, ezért van különbség.

31. $\left|\dfrac{49{,}9-50}{0{,}1}\right|=1$ nincs benne a $(-1{,}96,\ 1{,}96)$ kritikus tartományban, ezért nem csúszik át a cukor az ellenőrzésen.

32. $P\left(\left|\dfrac{X-m}{\sigma}\right|\ge 3\right)=0{,}0028$. Kb. 3 ezrelék valószínűségű esemény következett be, ezért a hipotézist elvetjük.

33. $0{,}48-t\cdot\dfrac{0{,}9862}{\sqrt{10}}\le m\le 0{,}48+t\cdot\dfrac{0{,}9862}{\sqrt{10}}$, $t=2{,}262$, azaz $m\in(-0{,}225,\ 1{,}185)$.

34. Szabályos kocka esetén egy $1-\Phi(415{,}7)$, azaz közel 0 valószínűségű esemény következett be, így vélhetően a kocka nem szabályos.

35. $\dfrac{0{,}62-0{,}55}{\dfrac{0{,}17}{\sqrt{50}}}\approx 2{,}91>t_{0{,}02}(49)=2{,}4$, ezért nem elfogadható.

36. $\dfrac{1{,}84-0{,}53}{\dfrac{13{,}61}{\sqrt{56}}}\approx 0{,}94>t_{0{,}05}(7)=2{,}36$, ezért nincs különbség.

37. $\dfrac{2{,}8-1{,}64}{\sqrt{10\cdot 0{,}95+5\cdot 0{,}198}}\cdot\sqrt{\dfrac{650}{15}}\approx 2{,}358>t_{0{,}05}(13)=1{,}771$, ezért különbség van.

38. $\dfrac{216{,}4}{198{,}1}\approx 1{,}0924$ beleesik a $0{,}05$ és $F(9,\ 9)$ által meghatározott kritikus tartományba, ezért az órák egyformán megbízhatóak, 0,95 szinten.

39. $\dfrac{1{,}1^2}{1{,}05^2}\approx 1{,}0975$ beleesik a 0,05-hoz, valamint $F(99,\ 99)$ -hez tartozó kritikus tartományba, ezért elfogadjuk a szórások egyenlőségét.

40. A χ^2 összeg $\approx 58{,}134>\chi^2_{0{,}01}(6)$, ezért a hipotézist elvetjük.

41. A χ^2 összeg $\approx 32{,}295>\chi^2_{0{,}1}(2)=4{,}61$, ezért nincs kapcsolat.

TÁBLÁZATOK

Normális eloszlás

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,5000	0,35	0,6368	0,70	0,7580	1,05	0,8531
01	5040	36	6406	71	7611	06	8554
02	5080	37	6443	72	7642	07	8577
03	5120	38	6480	73	7673	08	8599
04	5160	39	6517	74	7703	09	8621
05	5199	0,40	0,6554	75	7734	1,10	0,8643
06	5239	41	6591	76	7764	11	8665
07	5279	42	6628	77	7794	12	8686
08	5319	43	6664	78	7823	13	8708
09	5359	44	6700	79	7853	14	8729
0,10	0,5398	45	6736	0,80	7881	15	8749
11	5438	46	6772	81	7910	16	8770
12	5478	47	6808	82	7939	17	8790
13	5517	48	6844	83	7967	18	8810
14	5557	49	6879	84	7995	19	8830
15	5596	0,50	0,6915	85	8023	1,20	0,8849
16	5636	51	6950	86	8051	21	8869
17	5675	52	6985	87	8078	22	8888
18	5714	53	7019	88	8106	23	8907
19	5753	54	7054	89	8133	24	8925
0,20	0,5793	55	7088	0,90	0,8159	25	8944
21	5832	56	7123	91	8186	26	8962
22	5871	57	7157	92	8212	27	8980
23	5910	58	7190	93	8238	28	8997
24	5948	59	7224	94	8264	29	9015
25	5987	0,60	0,7257	95	8289	1,30	0,9032
26	6026	61	7291	96	8315	31	9049
27	6064	62	7324	97	8340	32	9066
28	6103	63	7357	98	8365	33	9082
29	6141	64	7389	99	8389	34	9099
0,30	0,6179	65	7422	1,00	0,8413	35	9115
31	6217	66	7454	01	8438	36	9131
32	6255	67	7486	02	8461	37	9147
33	6293	68	7517	03	8485	38	9162
34	6331	69	7549	04	8508	39	9177

Normális eloszlás

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,40	0,9192	1,76	0,9608	2,24	0,9875	2,96	0,9985
41	9207	77	9616	26	9881	98	9986
42	9222	78	9625	28	9887	3,00	0,99865
43	9236	79	9633	30	9893	10	99903
44	9251	1,80	0,9641	32	9898	20	99931
45	9265	81	9649	34	9904	30	99951
46	9279	82	9656	36	9909	40	99966
47	9292	83	9664	38	9913	50	99976
48	9306	84	9671	2,40	0,9918	60	99984
49	9319	85	9678	42	9922	70	99989
1,50	0,9332	86	9686	44	9927	80	99993
51	9345	87	9693	46	9931	90	99995
52	9357	88	9699	48	9934	4,00	0,999968
53	9370	89	9706	50	9938	50	999997
54	9382	1,90	0,9713	52	9941	5,00	999997
55	9394	91	9719	54	9945		
56	9406	92	9726	56	9948		
57	9418	93	9732	58	9951		
58	9429	94	9738	2,60	0,9953		
59	9441	95	9744	62	9956		
1,60	0,9452	96	9750	64	9959		
61	9463	97	9756	66	9961		
62	9474	98	9761	68	9963		
63	9484	99	9767	70	9965		
64	9495	2,00	0,9772	72	9967		
65	9505	02	9783	74	9969		
66	9515	04	9793	76	9971		
67	9525	06	9803	78	9973		
68	9535	08	9812	2,80	0,9974		
69	9545	10	9821	82	9976		
1,70	0,9554	12	9830	84	9977		
71	9564	14	9838	86	9979		
72	9572	16	9846	88	9980		
73	9582	18	9854	90	9981		
74	9591	2,20	0,9861	92	9982		
75	9599	22	9868	94	9984		

χ^2-eloszlás

n \ p	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50
1	0,000	0,000	0,003	0,016	0,064	0,148	0,455
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	16,266	19,337
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	22,719	26,336
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647	27,336
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336

χ^2-eloszlás

n \ p	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,268
4	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,465
5	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,517
6	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	36,123
15	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620
26	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,793
29	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

Student-féle t-eloszlás

n \ p	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036

Student-féle t-eloszlás

n \ p	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,578
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

0,5

F-eloszlás

A számláló szabadságfoka (f_1); A nevező szabadságfoka (f_2)

f_2 \ f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	
1	161	200	216	225	230	234	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	253	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	2,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,92	1,87	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,65	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,00	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,87	1,82	1,77	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00